HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXXIV.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique, pour la même Année,

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXVII.

TABLE
POUR L'HISTOIRE.

TABLE
POUR LES MÉMOIRES.



HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCLXXXIV.

SON ALTESSE ROYALE LE PRINCE HENRI DE PRUSSE, qui voyageoit en France, sous le nom du *comte d'Oëls*, ayant fait à l'Académie l'honneur d'assister à sa séance du 4 septembre 1784, le Secrétaire a lû le discours suivant :

MESSIEURS,

Ce jour glorieux pour nous, semble retracer à nos yeux les temps à jamais célèbres où les héros d'Athènes ne dédaignoient pas de venir au retour de leurs victoires,

entendre dans les écoles la voix d'Anaxagore & de Socrate, où ces Césars, si grands dans le sénat, si terribles à la tête des légions, déposant des lauriers cueillis sur les bords de l'Euphrate & du Rhin, se plaisoient à discuter les principes de la philosophie avec Apollonius, avec Pline, avec Maxime, ou à rechercher le peu qu'il étoit alors donné aux hommes de connoître sur les loix de la nature & sur les phénomènes de l'Univers.

Mais ces temps, qui furent ceux de la gloire & du bonheur des nations gouvernées par ces grands hommes, ne forment dans l'histoire qu'un petit nombre de jours sereins, qui ont brillé de loin en loin au milieu d'une longue suite de siècles condamnés à l'erreur & à la misère. Périclès vivoit encore quand les Athéniens chassèrent de leur ville Anaxagore, convaincu d'avoir osé dire, le premier, que le soleil étoit un globe de feu, & qu'une Intelligence avoit présidé à la formation du monde. Bientôt après, dociles à la voix d'un vil farceur, ils condamnèrent Socrate à la mort. Chez les Romains à peine un empereur vertueux a-t-il fermé les yeux, qu'un indigne successeur s'empressant d'étouffer les dernières lueurs de la raison, livre l'empire à la tyrannie de l'ignorance & de la superstition.

C'est qu'alors les lumières étoient le partage de quelques hommes privilégiés, choisis dans un seul peuple. Aujourd'hui, elles ont pénétré dans toutes les classes de la société, elles se sont répandues chez toutes les nations. Chaque peuple exposé à la censure de tous les autres, & contenu par l'opinion commune de l'Europe, ne peut plus ni se livrer à ces excès honteux, ni éteindre un flambeau que ses voisins auroient bientôt ralumé. Nous ne reverrons plus ces jours où Gerbert & Roger Bacon étoient regardés comme des magiciens, parce qu'ils avoient entrevu quelques demi-vérités; où Galilée couvert de gloire & d'années, condamné par des moines à une prison perpétuelle, étoit contraint d'abjurer les vérités qu'il avoit

découvertes; où l'indigence obligeoit Képler à faire des horoſcopes; où Deſcartes achetant par un exil volontaire le droit d'inſtruire les hommes, trouvoit encore des Voëtius, même dans le pays de la liberté; où le ſpectacle des maux cauſés par l'intolérance, forçoit Huyghens & Roëmer à fuir de la patrie qu'ils avoient adoptée.

Aujourd'hui les lettres, les ſciences & la philoſophie, long-temps ſéparées, quelquefois ennemies, ont acquis en ſe réuniſſant un empire ſur l'opinion des hommes, que rien ne peut plus leur enlever. Loin de croire, comme autrefois, que les préjugés peuvent être utiles, ſinon aux peuples, du moins à ceux qui les gouvernent, on ſait maintenant qu'il n'eſt aucun préjugé qui ne puiſſe devenir une ſource de malheurs pour les citoyens, une cauſe de révolutions ou d'affoibliſſement pour les états; on ſait que ſi les hommes éclairés ſont les ſeuls qui ſoient dignes de donner des loix à leurs ſemblables, les hommes inſtruits ſont auſſi les ſeuls qui ſachent obéir aux loix.

On commence à ſavoir que le plus dangereux & peut-être le ſeul ennemi du genre humain, c'eſt l'erreur; qu'elle produit également & ces paſſions qui troublent l'ordre du monde, & la foibleſſe qui rend ces paſſions dangereuſes; que c'eſt elle qui inſpire à ceux qui commandent des loix contraires à leurs intérêts comme à l'intérêt général, tandis qu'en ſéduiſant les eſprits de la multitude, elle oppoſe à tout changement utile une barrière trop ſouvent inſurmontable.

Les ſciences ont acquis une ſi grande étendue, leurs applications ſe ſont tellement multipliées, la philoſophie a ſu connoître ſi bien la véritable méthode de chercher la vérité, que tous ceux qui s'occupent du bonheur des hommes, de la grandeur & de la proſpérité des empires, ou trouvent à chaque pas l'occaſion de faire un uſage utile des vérités qu'on doit à la philoſophie & aux ſciences; ou ſont arrêtés au milieu de leurs travaux par des queſtions qu'elles ſeules peuvent réſoudre. L'art de la guerre, cet art

où le ſuccès paroît dépendre de l'activité & du coup-d'œil plutôt que des connoiſſances acquiſes, où les héros ſemblent devoir tout à eux ſeuls & rien à ce qu'on a pu leur enſeigner; cet art éprouve lui-même, dans preſque toutes ſes parties, le beſoin de ces ſciences paiſibles, fondées ſur l'expérience ou ſur le calcul, & ſes progrès qui ont ſuivi ceux des connoiſſances humaines en ont fait enfin de nos jours une véritable ſcience. Auſſi les plus grands maîtres de cet art, ſe ſont-ils montrés dans ce ſiècle les plus dignes protecteurs de la philoſophie & des lettres, & ſi cette protection n'avoit pas été une ſuite néceſſaire de l'étendue de leur eſprit & de l'élévation de leur caractère, l'intérêt de leur gloire leur eût inſpiré la même conduite; car les ſiècles éclairés peuvent ſeuls aſſigner la place qu'ils méritent, & ſentir la différence du conquérant qui ne doit ſes victoires qu'à la terreur qu'inſpire ſa férocité, & du héros dont le génie maîtriſe les événemens & ſait encore diminuer les maux de la guerre.

Mais ſi ceux qui ont intérêt de craindre le progrès des lumières, n'oſent plus ſuppoſer qu'elles ſont dangereuſes, ils ont eſſayé de rendre du moins odieux les hommes qui cherchent à les répandre. Déſeſpérant d'être déſormais aſſez forts avec le ſecours de l'ignorance, ils ont voulu ſoulever les paſſions en leur faveur; & pour y réuſſir, ils ont imaginé d'accuſer les philoſophes, les ſavans, les gens de lettres, de méconnoître les diſtinctions établies dans la ſociété & de reſerver uniquement leurs hommages aux talens & aux vertus. Ils eſpéroient avoir trouvé dans cette accuſation un ſecret ſûr de ſuſciter aux lumières utiles, des ennemis puiſſans, implacables & ſurtout très-nombreux; car la vanité perſuade aiſément à des particuliers très-obſcurs, qu'ils ſont auſſi dans une de ces claſſes qui auroient trop à perdre ſi on vouloit n'eſtimer dans chaque individu que ſon mérite réel. Mais en ſuppoſant même cette inculpation auſſi fondée qu'elle l'eſt peu, du moins elle ne rendroit pas ceux contre qui elle eſt dirigée bien coupables, aux yeux des hommes dont

ils doivent ambitionner le plus les bontés & l'eſtime. Suppoſons, en effet, qu'ils oublient qu'un héros eſt ſorti du ſang de Charlemagne ou de Witikind, & que le rang auguſte qu'il occupe ne leur en impoſe point ; la juſtice qu'ils rendront à ſes qualités perſonnelles n'en devient-elle pas plus digne de lui ? En ſauront-ils moins admirer la réunion ſi rare d'une activité qui ne laiſſe, ni perdre un inſtant, ni échapper une occaſion, & d'une ſageſſe conſommée, qui dans la conduite d'une guerre entière n'offre pas même l'apparence de la plus légère faute, aux yeux des juges les plus éclairés & les plus ſévères ? Verront-ils avec moins d'étonnement le même génie qui combine avec force pendant la guerre les plans les plus vaſtes, veiller pendant la paix ſur les plus petits détails qui ſervent à former les inſtrumens de ſes victoires ? Seront-ils moins touchés de cette humanité toujours agiſſante, toujours occupée d'adoucir ces malheurs, ſuite trop inévitable de la guerre, & qui dans toute une campagne au milieu des mouvemens les plus importans & dans les poſitions les plus critiques, n'oublie pas un ſeul inſtant qu'il exiſte dans une ville conquiſe, un citoyen que l'amitié a confié à ſes ſoins. N'applaudiront-ils pas à un prince ami de la vérité, prompt à ſe rendre l'appui de ceux qui ſouffrent pour elle ; regardant les hommes célèbres dans les lettres & dans les ſciences comme les objets les plus dignes de ſa curioſité ; chériſſant la mémoire de ceux qui ne ſont plus, & cherchant avec empreſſement ce qui reſte d'eux dans les lieux honorés par leur génie ? Cette ſimplicité de mœurs, ſi eſtimable, même dans un citoyen obſcur, ne devient-elle pas la preuve la plus certaine d'un grand caractère, lorſqu'elle ſe joint à tant de titres & ſur-tout à tant de gloire ? Enfin le ſtoïciſme le plus exagéré, à quelque degré qu'il puiſſe porter l'oubli des diſtinctions ſociales, pourra-t-il s'empêcher de reſpecter, dans un héros, le frère & l'ami d'un grand homme ?

Mais je ſens, Meſſieurs, combien mon foible organe eſt

au-deſſous de vos ſentimens, & combien je dois vous faire regretter la perte d'un ſavant illuſtre, en qui l'Académie auroit trouvé aujourd'hui un digne interprète. Comblé des bontés du Prince qui nous fait l'honneur d'aſſiſter à cette ſéance, honoré de ſa familiarité, il lui eût fait entendre les accens d'une voix qui lui étoit connue : ſans doute il a manqué au bonheur de M. d'Alembert de n'avoir pas aſſez vécu pour recevoir, dans cette Académie, le frère de ſon premier bienfaiteur, & nous oſons croire qu'il manque auſſi quelque choſe à la ſatisfaction du Prince, lorſque ſes yeux cherchent en vain le philoſophe qu'il avoit jugé digne de ſon amitié, & dont il ne reſte plus parmi nous que le ſouvenir de ſes vertus & les monumens de ſon génie.

M. LAVOISIER a lû enſuite un Mémoire ſur la combuſtion de l'eſprit-de-vin, dans lequel il prouve qu'une livre de cette liqueur produit, en brûlant, dix-neuf onces d'eau.

M. TENON, un Mémoire ſur l'œuf humain.

M. L'ABBÉ ROCHON, un Mémoire ſur la manière de meſurer les hauteurs ſolſticiales, en employant une lunette de criſtal d'Iſlande.

M. COULOMB, un Mémoire ſur la manière d'employer la torſion des fils, à la meſure des forces très-petites.

M. BAILLY a terminé la ſéance par la lecture du Mémoire ſuivant.

EXPOSÉ des Expériences qui ont été faites pour l'examen du Magnétiſme animal.

Lû par M. BAILLY, en ſon nom & au nom de M.rs FRANKLIN, LE ROY, DE BORY & LAVOISIER.

MESSIEURS,

VOUS ſavez que des commiſſaires ont été choiſis par le Roi dans la Faculté de Médecine & dans cette Académie

pour examiner le Magnétiſme animal, & pour donner leur avis ſur ſon exiſtence & ſur ſon utilité. Nous en avons rendu compte au Roi & devant le public. Sa Majeſté a été ſatisfaite de notre travail, le public & l'Europe vont le juger.

Mais les Académiciens doivent à l'Académie & à leurs confrères un récit détaillé de leur conduite. Cet écrit eſt deſtiné à mettre ſous vos yeux les vues qui ont dirigé nos recherches, & les réſultats que nos travaux ont produits.

Quand je dis nous, Meſſieurs, j'entends la commiſſion entière; rien n'a été diſtingué, le travail appartient à tous: également guidés par les intérêts de la vérité, nous avons été toujours unis, toujours unanimes. Le compte qui va vous être rendu ici eſt un hommage particulier de vos confrères, mais il ne renferme rien qui ne ſoit le réſultat du travail commun des membres des deux compagnies.

Il y a déjà plus de ſix ans que le Magnétiſme animal a été annoncé à l'Europe, ſur-tout en France & dans cette capitale; mais ce n'eſt que depuis deux ans environ qu'il a intéreſſé particulièrement un aſſez grand nombre de citoyens, & qu'il eſt devenu l'objet de l'entretien public. Jamais une queſtion plus extraordinaire n'avoit partagé les eſprits dans une nation éclairée. On propoſoit un moyen ſûr & puiſſant d'agir ſur les corps animés, un remède nouveau, un agent univerſel pour guérir & prévenir les maladies. Cet art étoit un myſtère; les phyſiciens en ignoroient les procédés, & ils n'entendoient parler que de ſes prodiges. On citoit peu de cures réelles, mais beaucoup de perſonnes ſe diſoient ſoulagées, & le remède plaiſoit aſſez pour ſoutenir l'eſpérance des malades. Depuis quelque temps le ſecret a été communiqué. Alors on a vu des perſonnes inſtruites, éclairées, diſtinguées même par leurs talens, adopter la théorie & la pratique nouvelle qu'on leur enſeignoit; on a vu un nombre de médecins & de chirurgiens admis à l'école du Magnétiſme, en devenir les partiſans, en défendre la théorie, en ſuivre la pratique. Ces témoignages rendus au Magné-

tiſme devoient donner à penſer aux meilleurs eſprits, & faire ſuſpendre le jugement des ſavans. C'eſt dans ces circonſtances que les commiſſaires ont été nommés par le Roi; l'examen qu'il a ordonné eſt un fruit de la ſageſſe de ſon adminiſtration. C'étoit un ſcandale pour l'Europe de voir un peuple éclairé par toutes les ſciences & par tous les arts, un peuple chez qui la philoſophie a fait les plus grands progrès, oublier la leçon de Deſcartes qui en eſt le reſtaurateur, & renfermer dans ſon ſein deux partis oppoſés, qui uniſſoient leurs vues & leurs penſées ſur le même objet, mais qui ſe diviſoient & ſe combattoient; l'un en annonçant le Magnétiſme comme une découverte utile & ſublime, l'autre en le regardant comme une illuſion à la fois dangereuſe & ridicule. La déciſion étoit importante & indiſpenſable; il falloit éclairer ceux qui doutoient, il falloit établir une baſe ſur laquelle puſſent venir ſe repoſer ou l'incrédulité ou la confiance. On ne doit pas être indifférent ſur le règne mal fondé des fauſſes opinions : les ſciences qui s'accroiſſent par les vérités, gagnent encore à la ſuppreſſion d'une erreur; une erreur eſt toujours un mauvais levain qui fermente & qui corrompt à la longue la maſſe où elle eſt introduite. Mais lorſque cette erreur ſort de l'empire des ſciences pour ſe répandre dans la multitude, pour partager & agiter les eſprits, lorſqu'elle préſente un moyen trompeur de guérir à des malades qu'elle empêche de chercher d'autres ſecours, lorſque ſur-tout elle influe à la fois ſur le moral & le phyſique, un bon gouvernement eſt intéreſſé à la détruire. C'eſt un bel emploi de l'autorité que celui de diſtribuer la lumière! Les commiſſaires ſe ſont empreſſés d'entrer dans les vues de l'Adminiſtration & de répondre à l'honneur de ſon choix.

Tranſportés au traitement public du Magnétiſme, ils ont d'abord été frappés d'une oppoſition très-remarquable entre la nature des effets produits & l'inſuffiſance apparente des moyens employés. D'une part, ce ſont des convulſions violentes, longues & multipliées; de l'autre, de ſimples attouchemens,

attouchemens, des geſtes & des ſignes : & cependant le traitement public fait reconnoître une grande puiſſance miſe en action par ces moyens, tout foibles qu'ils ſont. Un pareil ſpectacle ſemble nous tranſporter au temps & au règne de la féerie : cet empire exercé ſur un nombre d'individus, l'homme qui en diſpoſe, la baguette qui lui ſert d'inſtrument, tout reſſemble en effet aux enchantemens de nos fables ; ce ſont leurs récits mis en action. Mais ſi ce ſpectacle étonne, il ne doit pas ſubjuguer. S'il a pu ſurprendre la foi d'un nombre de ſpectateurs conduits par une curioſité plus ou moins attentive, s'il a ſéduit ſur-tout les malades toujours prêts à ſe tromper eux-mêmes, il n'a pu produire cet effet ſur des hommes choiſis pour un examen ſérieux. Leur premier devoir étoit d'être en garde contre l'illuſion ; ils ſe ſont mutuellement ſurveillés, ils ont obſervé en ſilence ; & reſtés de ſang-froid au milieu de l'enthouſiaſme, ils ont pu écouter leur raiſon & chercher la lumière.

Nous avons d'abord demandé par quels reſſorts étoient produits tant d'effets ſurprenans, & quelles étoient les raiſons qui les faiſoient attribuer à un fluide inconnu & nouveau, à un fluide qui appartient à l'homme & qui agit ſur l'homme. Plus cette découverte étoit grande & extraordinaire, plus on devoit être difficile ſur le choix des preuves. Enſuite, procédant en phyſiciens, nous avons cherché à reconnoître la préſence du fluide ; mais ce fluide échappe à tous les ſens. On nous a déclaré que ſon action ſur les corps animés étoit la ſeule preuve que l'on pût adminiſtrer de ſon exiſtence. Vous avez vu, Meſſieurs, dans notre rapport, les raiſons ſolides, qui parmi les effets prétendus de cette action, nous ont fait rejeter abſolument la cure des maladies. La nature agit en même-temps que le remède ; on ne ſait ſi le ſoulagement appartient au remède ou à la nature : la nature guérit quelquefois ſans remède ; comment ſe convaincre de l'exiſtence d'un remède inviſible, par des guériſons que la nature peut opérer ſans lui ? Nous avons donc été forcés de nous borner à obſerver l'action phyſique

du fluide opérant ſur l'économie animale, des changemens momentanés; mais alors, *Meſſieurs*, nous ſommes entrés dans un dédale de difficultés. Si les premières cauſes de la nature ſont ſimples, les derniers réſultats ſont le produit d'une vaſte complication. L'homme ne fait pas un mouvement qui ne puiſſe être dû à une infinité de cauſes; être moral & phyſique, ſes affections, ſes maux, ſes mouvemens dépendent autant de ſa penſée que de l'irritabilité de ſes organes. Les expériences que nous avons faites ſur nous-mêmes, nous ont fait reconnoître que lorſqu'on détourne ſon attention, il n'y a plus aucun effet. Les épreuves faites ſur les malades nous ont appris que l'enfance, qui n'eſt pas ſuſceptible de prévention, n'éprouve rien, que l'aliénation d'eſprit s'oppoſe à l'action du Magnétiſme, même dans un état habituel de convulſions & de mobilité de nerfs où cette action devroit être le plus ſenſible. Dans un nombre de malades, ſi les uns reſſentent des effets légers & équivoques, les autres ne ſentent rien, & nous avons dû en être ſurpris. Le Magnétiſme n'eſt-il pas annoncé comme un fluide univerſel, comme le principe de la vie, & le grand reſſort de la nature? Qu'eſt-ce qu'un agent qui n'agit pas toujours dans des circonſtances ſemblables? L'abſence de ſon action dans certains cas, n'indique-t-elle pas que dans les autres l'action qu'on lui attribue appartient à d'autres cauſes? Il a manqué ſon effet quand nous l'avons employé pour porter de la chaleur aux pieds; il a manqué ſon effet quand nous l'avons interrogé comme capable d'indiquer les maux. On a eſſayé différentes méthodes de magnétiſer, en obſervant, en négligeant la diſtinction des pôles; elles ont eu les mêmes effets. Les pôles ſont donc une chimère qui n'a d'autre objet que d'aſſimiler le nouveau Magnétiſme au véritable Magnétiſme qui eſt un des phénomènes de la nature. C'eſt ainſi, qu'en avançant dans notre examen, nous voyions diſparoître l'une après l'autre les propriétés attribuées à ce prétendu fluide, & que l'édifice entier poſé ſur une baſe idéale s'écrouloit devant nous.

Forcés de renoncer aux preuves phyſiques, nous avons été obligés de chercher les cauſes des effets réels dans les circonſtances morales. Nous avons, dans la ſuite de nos opérations, ceſſé d'être phyſiciens pour n'être plus que philoſophes; & nous avons ſoumis à l'examen les affections de l'eſprit & les idées des individus expoſés à l'action du Magnétiſme. Alors, en opérant ſur des ſujets qui avoient les yeux bandés, nous avons vu d'une manière évidente, cette action naître des idées que nous excitions, & les effets ſuivre la même marche que nos queſtions. En ne magnétiſant pas, les effets étoient les mêmes, & répondoient de même à nos queſtions.

A ces effets variés & indépendans du Magnétiſme, nous avons dû reconnoître l'influence de l'imagination; mais dans l'examen moral où nous conduiſoit la nature de la queſtion, nous avons ſuivi, autant qu'il a été poſſible, la marche certaine & méthodique des ſciences: obſervant en philoſophes, nous avons encore emprunté les procédés de la phyſique. Nous avons opéré, comme on fait en chimie, où, après avoir décompoſé les ſubſtances, découvert leurs principes, on s'aſſure de l'exactitude de l'analyſe, en recompoſant les mêmes ſubſtances à l'aide de ces principes réunis. Nous avons dit: les effets qu'on attribue au Magnétiſme, & à un fluide que rien ne manifeſte, n'ont lieu que lorſque l'imagination eſt avertie & peut être frappée; l'imagination ſemble donc en être le principe. Il faut voir ſi on reproduira ces effets par le pouvoir de l'imagination ſeule; nous l'avons tenté, & nous avons pleinement réuſſi. Sans toucher & ſans employer aucun ſigne, les ſujets qui ont cru être magnétiſés ont ſenti de la douleur, de la chaleur & une chaleur très-grande. Sur des ſujets doués de nerfs plus mobiles, nous avons produit des convulſions & ce qu'on appelle des *criſes*. Nous avons vu l'imagination aſſez exaltée, devenue aſſez puiſſante pour faire perdre en un inſtant la parole. Nous avons en même-temps prouvé la nullité du Magnétiſme, en le mettant en

oppoſition avec l'imagination. Le Magnétiſme ſeul, employé pendant trente minutes, n'a rien produit; & auſſi-tôt l'imagination miſe en action a produit ſur la même perſonne, avec les mêmes moyens, dans des circonſtances abſolument ſemblables, une convulſion très-forte & très-bien caractériſée. Enfin, pour compléter la démonſtration, pour achever le tableau des effets de l'imagination, également capable d'agiter & de calmer, nous avons fait ceſſer la convulſion par le même charme qui l'avoit produite, par le pouvoir de l'imagination.

Si nous n'avons pas fait d'expériences ſur les animaux que l'on regarde comme privés de l'imagination, c'eſt que les expériences auroient été plus difficiles & plus délicates, ſans être plus concluantes. D'abord, la cure des maladies des animaux ne prouve pas davantage que la cure des maladies des hommes; & quand nous nous bornerons à agir ſur les animaux momentanément, comment connoîtrons-nous ce qu'ils éprouvent? Ne pouvant les interroger, leurs mouvemens ne peuvent être qu'équivoques. D'ailleurs, une grande raiſon pour rejeter cette eſpèce de preuves, eſt qu'on annonce un fluide univerſel, un fluide agiſſant ſur l'homme, & propre à guérir ſes maux. Il ſeroit ſingulier qu'on en vantât les bons effets ſur l'eſpèce humaine, & qu'on ne pût les rendre ſenſibles que ſur l'eſpèce animale: c'eſt donc ſur l'homme que nous avons dû éprouver le Magnétiſme, & nos expériences ne nous ont fait découvrir que le pouvoir de l'imagination. Nous avons procédé par des preuves négatives, & cette marche étoit déterminée par la nature des choſes. Une opinion eſt attaquée & défendue par des moyens contraires: un agent réel doit être démontré par des preuves poſitives, tandis qu'un agent chimérique ne peut être exclu que par le manque d'effets & par la démonſtration de ſa nullité.

La ſuite d'expériences que nous avons faites nous a donc permis de conclure & d'établir que rien ne prouve l'exiſtence du fluide magnétique animal. La ſaine phyſique ne

permet pas de recourir à un fluide inconnu & insensible, pour expliquer des effets qui peuvent tous être produits par l'imagination, ou seule, ou combinée avec l'attouchement & l'imitation.

Telles sont les causes des effets attribués au Magnétisme, tel est le résultat de notre travail; mais les phénomènes observés permettent encore quelques résultats que nous allons proposer. Ces résultats concernent l'imitation & l'imagination, deux de nos plus étonnantes facultés : ce sont des faits pour une science encore neuve, celle de l'influence du moral sur le physique; & nous demandons qu'il nous soit permis d'entrer à cet égard dans quelques détails préliminaires & purement philosophiques.

L'homme moral, comme l'homme physique, n'existe & ne devient tel qu'il est que par ces deux facultés : il se forme, il se perfectionne par l'imitation; il agit, il devient puissant par l'imagination. L'imitation est donc le premier moyen de sa perfectibilité; elle le modifie depuis la naissance jusqu'à la mort. Sans l'imitation, les progrès d'un individu seroient perdus pour tous les autres : c'est par elle que dans la société polie & habituelle les caractères s'effacent, & que tous les individus ont la même physionomie; c'est par elle que les enfans apprennent nos usages, nos conventions, se plient à nos habitudes, s'instruisent de la langue. La prononciation adoucie par un long usage, est un effet de la même cause. Cette imitation agit également sur les esprits; elle n'introduit pas les vérités nouvelles, mais elle conserve les idées reçues; elle forme & constitue l'esprit national; & comme le plus souvent elle fait croire sans examen, c'est sur son pouvoir irrésistible que sont fondés les préjugés qui ont une durée si longue & une résistance si puissante.

Avec cette faculté, tout resteroit au même terme, tout seroit communiqué; mais le niveau des connoissances & des institutions ne s'éleveroit jamais. L'imagination est la faculté progressive; c'est par elle que les hommes ont par-

couru les différens états de la société perfectionnée : faculté éminemment active, auteur des biens & des maux, tout est devant elle, l'avenir comme le présent, les mondes de l'univers comme le point où nous sommes. Elle agrandit tout ce qu'elle touche, elle va sans cesse exagérant, & cette exagération fait sa force. C'est par cette force qu'elle déploie les ressources morales & qu'elle multiplie les forces physiques : à sa voix la nature obéit & se développe toute entière. Aussi quand l'imagination parle à la multitude, la multitude ne connoît plus de dangers ni d'obstacles; un seul homme commande, & les autres ne sont que des instrumens. Les nations sont ce que veulent les souverains, les armées ce que sont leurs généraux ; & c'est une vérité connue depuis Alexandre jusqu'à FRÉDÉRIC & SON ILLUSTRE FRÈRE.

L'imitation, telle que nous venons de la peindre, Messieurs, semble avoir une marche lente & graduée, elle ne s'établit que par des leçons répétées ; mais si dans la société elle a des progrès insensibles, dans le traitement du Magnétisme elle se manifeste par des phénomènes frappans. Les crises y sont d'autant plus multipliées qu'elles sont plus violentes ; elles commencent toutes à-peu-près dans le même-temps, il semble que ce soit une étincelle qui allume un incendie. Cette facilité de communication est très-remarquable. Nous savions que l'homme, machinal dans un grand nombre de ses mouvemens, se plie à la longue à répéter ce qu'il voit & ce qu'il entend; mais les convulsions du Magnétisme nous montrent que le même effet a lieu instantanément, en grand, & de manière qu'un nombre d'individus convenablement disposés, sont des instrumens montés à l'unisson, & dont un seul fait mouvoir tous les autres.

Quant à l'imagination, on connoît les dérangemens qu'une impression vive & subite a souvent occasionnés dans la machine de l'homme. L'imagination renouvelle ou suspend les fonctions animales; elle ranime par l'espérance,

ou elle glace par la terreur. Dans une nuit elle fait blanchir les cheveux, dans un inſtant elle rend ou l'uſage des jambes ou la parole ; elle détruit ou elle développe le germe des maux, elle donne même la mort. Mais ces effets ſurprenans appartiennent à des révolutions inopinées ; c'eſt le concours des circonſtances qui les amène, & le haſard qui ſemble les produire ; ils ne paroiſſent point dépendre de la puiſſance & de la volonté de l'homme. Ce que nous avons appris, ou du moins ce qui nous a été confirmé d'une manière démonſtrative & évidente, par l'examen des procédés du Magnétiſme, c'eſt que l'homme peut agir ſur l'homme, à tous momens & preſque à ſa volonté, en frappant ſon imagination ; c'eſt que les geſtes & les ſignes les plus ſimples peuvent avoir les plus puiſſans effets ; c'eſt que l'action que l'homme a ſur l'imagination peut être réduite en art, & conduite par une méthode, ſur des ſujets qui ont la foi. On parle du Magnétiſme d'intention, ſans doute l'intention peut ſuffire, pourvu qu'elle ſoit réciproque ; elle établit entre deux individus une relation & une dépendance néceſſaires. L'intention que je dirige, c'eſt mon imagination qui commande ; l'intention qui me répond, c'eſt l'imagination qui s'exalte & qui obéit. La recherche d'un agent qui n'exiſte pas, ſert donc à faire connoître une puiſſance réelle de l'homme. L'homme a le pouvoir d'agir ſur ſon ſemblable, d'ébranler le ſyſtème de ſes nerſs, & de lui imprimer des convulſions ; mais cette action ne peut être regardée comme phyſique : nous ne voyons pas qu'elle dépende d'un fluide communiqué ; elle eſt entièrement morale, c'eſt celle de l'imagination ſur l'imagination. Action preſque toujours dangereuſe, que l'on peut obſerver en philoſophe, & qu'il n'eſt bon de connoître que pour en prévenir les effets.

Le Magnétiſme n'aura pas été tout-à-fait inutile à la philoſophie qui le condamne ; c'eſt un fait de plus à conſigner dans l'hiſtoire des erreurs de l'eſprit humain, & une grande expérience ſur le pouvoir de l'imagination.

OUVRAGES

PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

PRIX.

L'ACADÉMIE avoit proposé, pour sujet d'un Prix qui devoit être donné en 1782, la question suivante:

1.° Déterminer par des caractères constans, faciles à saisir même par ceux qui n'ont pas fait une étude particulière de la botanique, les différences qui existent entre les divers cotonniers d'Asie, d'Afrique, & d'Amérique.

2.° Indiquer l'état naturel du coton dans sa coque après la maturité, son adhérence à la graine, la manière dont ses brins enveloppent les graines, afin d'en déduire le meilleur procédé pour les en séparer dans leur plus grande longueur.

3.° Établir, d'après des épreuves suffisantes, les rapports des degrés de finesse, de blancheur, de longueur & de ténacité qui sont propres aux brins de chaque espèce de cotonnier, ainsi que le rapport de ces qualités avec la perfection des filatures.

Ce Prix a été remis en 1784, & décerné à une pièce ayant pour devise, *Deus bone*, dont l'auteur est M. Quatremère.

LES

LES Mémoires approuvés par l'Académie, destinés pour le Volume des Savans-Étrangers, sont au nombre de vingt-cinq.

Essai sur la construction des tables de logarithmes: par M. Callet.

Mémoire sur plusieurs pièces de canon, forgées en Espagne : par M. de Norbek, depuis correspondant de l'Académie.

Sur la fonte des minéraux de plomb.

Sur la fonte des scories provenant de celle des minéraux de plomb, où l'on détaille la manière de retirer l'argent & l'or des cendres des Monnoies & des Orfévres.

Observations sur le traitement des minérais de fer à la fonte.

Ces trois Mémoires sont de M. Duhamel, depuis membre de l'Académie.

Sur les difficultés que présente la préparation des alkalis fixes caustiques secs, & sur les propriétés peu connues de ces sels bien purs.

Sur la nécessité d'employer l'alkali volatil, en état de gaz, dans les expériences délicates de la chimie; & sur quelques propriétés nouvelles du gaz alkalin.

Sur la décoloration du bleu de Prusse, par la chaux, la magnésie, &c.

Observation sur la dissolution lente du régule d'antimoine, par l'acide marin.

Observation sur un précipité rose mercuriel, produit par le lait, la lymphe, &c.

Remarques sur la différence du foie d'arsenic & du sel neutre arsenical, & sur la cause de cette différence.

Mémoire ſur les propriétés du ſel neutre, réſultant de la combinaiſon de l'acide crayeux avec le fer.

Deſcription d'un feld-ſpath criſtalliſé, que l'on trouve mêlé avec le criſtal de roche & le mica dans les environs d'Alençon.

Obſervations ſur une ſingulière criſtalliſation du ſel neutre arſenical; avec quelques remarques ſur la nature de ce ſel.

Mémoire ſur les phénomènes que préſente l'alkali fixe végétal cauſtique, trituré à froid avec le ſoufre & quelques préparations antimoniales.

Recherches chimiques ſur le kermès minéral.

Ces onze Mémoires ſont de M. de Fourcroy, depuis membre de l'Academie.

Réſultat d'une expérience faite ſur la réſiſtance d'un maſſif de bois de chêne imbibé d'eau, contre les progrès de l'inflammation excitée par les matières incendiaires, &c : par M. Darçon.

Obſervations aſtronomiques faites à Bagdad : par M. de Beauchamp, vicaire général de Babylone, depuis correſpondant de l'Académie.

Mémoire ſur la manière d'échauffer les maiſons des pays-froids, &c : par M. le Maréchal-Duc de Croy.

Sur la montagne des Chalanches près d'Allemont en Dauphiné : par M. Schreiber, directeur des Mines de Monſieur.

Sur les ſemences des champignons : par M. de Beauvois, correſpondant de l'Académie.

Sur les nombres : par M. l'Abbé Genti, depuis correſpondant de l'Académie.

Obſervation ſur les plantes de mer : par M. Vaſtel.

Mémoires & obſervations ſur quelques procédés peu connus, mais utilement employés à des conſtructions maritimes d'exécution difficile : par M. de Fourcroy, maréchal-de-camp, depuis membre de l'Académie.

Sur le tartre contenu dans le verjus & dans le mouſt, &c : par M. le Marquis de Bullion.

MACHINE approuvée par l'Académie.

INSTRUMENT propre à tracer toutes ſortes de lignes parallèles : par M. Milon, conſeiller au Châtelet.

ÉLOGE

DE M. MACQUER.

PIERRE-JOSEPH MACQUER, docteur-régent de la Faculté de médecine de Paris, professeur de chimie au Jardin du Roi, pensionnaire de l'Académie des Sciences, membre de la Société de médecine, de l'Académie de médecine de Madrid, & des Académies de Stockolm, de Turin & de Philadelphie, naquit à Paris le 9 Octobre 1718, de Joseph Macquer & de Marie-Anne Caillet. Il tiroit son origine d'une famille noble d'Écosse, qui avoit sacrifié ses biens & sa patrie à son attachement pour la religion romaine & pour la maison de ses anciens Rois.

Les parens de M. Macquer exigeoient qu'il prît un état, & il choisit celui de médecin, qui contrarioit moins qu'aucun autre son goût naissant pour les sciences physiques. La chimie fut le principal objet de ses travaux, & il fut reçu à l'Académie en 1745, à l'âge de vingt-sept ans. Depuis cette époque, des recherches sur la chimie, des ouvrages élémentaires sur cette science, & des travaux sur les arts qui en dépendent, ont rempli toute l'étendue de sa vie.

Les phénomènes singuliers que présentoit l'arsenic avoient attiré l'attention des chimistes dans le temps où presque tous avoient conservé au moins un penchant secret pour les idées chimériques des adeptes. On connoissoit la propriété qu'a cette substance de décomposer le nitre & d'en séparer l'acide, qui, dans cette opération, acquiert une belle couleur bleue; mais personne encore n'avoit songé à examiner

le résidu de la distillation. M. Macquer l'essaya le premier, & il trouva un sel cristallisable, dissoluble dans l'eau, ayant toutes les propriétés d'un sel neutre, & formé par la combinaison de la base du nitre, avec un acide particulier, qui tire son origine de l'arsenic.

Les deux autres alkalis & la chaux peuvent servir de base à un sel semblable ; & c'est ici le premier exemple connu en chimie, de ces acides propres à certaines substances, & qu'on en retire par la distillation avec l'acide nitreux, soit que ces acides y existent tout formés, soit qu'ils doivent quelques-unes de leurs parties constituantes à la décomposition qu'éprouve alors l'acide qu'on a employé.

M. Macquer donna, peu de temps après, la première analyse exacte du bleu de Prusse. Cette matière colorante n'est, suivant lui, qu'une combinaison du fer avec une substance que les alkalis enlèvent aux matières charbonneuses ; & il le prouve en montrant que l'alkali digéré sur le bleu de Prusse, se charge de cette substance, & ne laisse plus qu'une chaux de fer, tandis que ce même alkali ainsi saturé & versé sur une dissolution de fer, précipite de nouveau bleu de Prusse. Les chimistes ont regardé cette substance extraite du charbon par l'alkali fixe, comme étant du phlogistique ; & l'alkali qui en est chargé a même porté le nom *d'alkali phlogistiqué.* Mais les progrès de la chimie, en l'enrichissant d'un grand nombre de faits, l'ont rendue en même-temps bien plus pauvre en théories qu'elle ne croyoit l'être, si pourtant avoir perdu des théories & des systêmes, ce n'est pas avoir beaucoup gagné. La plupart des dénominations & même des expositions que l'on faisoit des phénomènes portoient, sans presque qu'on s'en doutât, quelque teinte de ces systèmes, & il a fallu créer une nouvelle langue, que peut-être dans quelques années il faudra changer encore.

M. Macquer soumit, conjointement avec M. Baumé, une quantité assez considérable de platine à des expériences nouvelles, où ils se proposoient d'examiner sur-tout la

fusibilité & la ductilité de ce métal, celles de ses propriétés, dont les chimistes s'étoient jusqu'alors le moins occupés. Ils parvinrent à la fondre au miroir ardent d'une manière imparfaite. Quelques morceaux arrondis par la fusion, parurent avoir une véritable ductilité ; & ce fait important consigné dans nos Mémoires, a soutenu l'espérance des chimistes qui, depuis, ont trouvé des moyens de forger & de travailler cette substance singulière, également intéressante, & par les faits nouveaux qu'elle présente dans la chimie des métaux, & par l'utilité dont elle deviendra un jour dans les arts.

Un voile épais en couvre encore l'origine & l'histoire ; & malgré l'abondance de ce métal, le préjugé en refuse à ceux qui veulent l'étudier & dont heureusement ces obstacles n'ont fait qu'exciter le zèle. On avoit cru d'abord que la platine qui peut se mêler avec l'or, s'y unissoit si intimement, qu'il étoit impossible de reconnoître le mélange & de la séparer d'avec l'or. Sans doute cet inconvénient auroit encore été un motif bien foible pour condamner à une éternelle inutilité une substance que la nature a prodiguée, & qu'à bien des égards il seroit difficile de remplacer ; mais cet inconvénient n'existe même plus depuis quarante ans. Cependant l'opinion de ceux qui possèdent la platine est restée la même ; exemple moins rare qu'on ne croit, & de la lenteur avec laquelle les vérités s'établissent, & de cette fatalité singulière qui fait regarder l'opinion la moins fondée, comme suffisante pour donner le droit de ravir aux hommes quelque portion de leur liberté, tandis qu'on exige que l'inutilité d'une prohibition soit rigoureusement prouvée, & souvent le soit depuis long-temps, pour se croire autorisé à la faire cesser. Il semble que chez tous les peuples & dans tous les temps, on ait regardé l'esclavage comme le véritable état de l'homme, & la liberté comme un état forcé, & pour ainsi dire contre nature.

Vers 1750, M. Macquer fut chargé, par la Cour, d'une commission particulière. Il existoit alors en Bretagne, un

homme, le Comte de la Garaie, qui, entraîné par une véritable paſſion à l'exercice de la bienfaiſance, s'étoit dévoué depuis quarante ans, au ſervice de l'humanité ſouffrante. Il avoit bâti un hôpital à côté d'un laboratoire de chimie; il ſoignoit, il traitoit lui-même les malades auxquels il adminiſtroit les remèdes préparés dans ſon laboratoire, remèdes qu'il avoit ou que du moins il croyoit avoir inventés. Son premier ouvrage étoit fondé ſur l'idée chimérique d'extraire des mixtes, par le moyen de l'eau, toutes leurs parties actives; & on devoit à cet ouvrage quelques préparations utiles, nouvelles ou peu connues.

D'autres idées du même genre avoient frappé depuis le Comte de la Garaie; & il vouloit vendre au Gouvernement ſes nouveaux remèdes, comme il lui avoit vendu ſes premiers ſecrets, c'eſt-à-dire, toujours au profit de ſon hôpital. Il eſt ſingulier, peut-être, qu'un homme ſi bienfaiſant fît un ſecret de ſes découvertes, & qu'il ne s'empreſsât point de les conſacrer gratuitement à l'utilité commune; mais puiſque ceux qui ſollicitent des grâces oublient ſi facilement que c'eſt aux dépens du ſang du peuple qu'ils cherchent à ſatisfaire leur avarice ou leur ambition, pourroit-on ne point pardonner un pareil oubli à celui qui ne demande que pour les malheureux?.

M. Macquer fut chargé d'examiner ces remèdes. Le projet du Comte de la Garaie étoit alors d'extraire les parties ſalubres des minéraux par une longue macération avec des ſels neutres. Il avoit entr'autres préparé une teinture mercurielle par des procédés qui duroient pluſieurs mois; mais cette teinture n'étoit qu'une diſſolution de ſublimé corroſif dans l'eſprit-de-vin. Telle eſt en général l'hiſtoire de ces ſecrets ſi vantés, tantôt chimériques, tantôt connus de tout le monde, excepté de ceux qui les achettent.

M. Macquer ſe trouva placé à une époque où la chimie commençoit à ſe délivrer des rêves des alchimiſtes dont les ouvrages des reſtaurateurs de cette ſcience ſont encore infectés; mais la clarté, la méthode étoient un mérite

inconnu dans les livres de qui en traitoient, & sur-tout en France, un reste de cartésianisme ajoutoit à l'obscurité de la science, en la surchargeant de prétendues explications mécaniques.

M. Macquer est le premier qui ait donné des élémens de chimie où l'on trouve la même clarté, la même méthode, qui règnoient déjà dans les autres branches de la physique. Avant lui, on regardoit la chimie comme une science isolée, embarrassée, obscure, remplie d'opérations secrètes, de recettes énigmatiques presque comme une occupation dangereuse où l'on risquoit de compromettre sa santé, sa fortune, & même sa raison : elle parut dans les ouvrages de M. Macquer, une science simple, fondée sur les faits, procédant par des opérations dont une sage méthode prescrivoit tous les détails, utile à tous les besoinsde la vie humaine & liée au système général de nos connoissances. Ainsi, ses élémens contribuèrent à répandre le goût de la chimie, en montrant combien il étoit facile de l'apprendre ; tandis qu'un autre chimiste son contemporain, & autrefois son maître, en inspiroit l'enthousiasme par une marche plus hardie & des idées plus vastes & plus imposantes.

M. Macquer fit, pendant plusieurs années, des cours, conjointement avec M. Baumé. Il avoit préféré, dans ces cours, l'ordre qui lui avoit paru exiger de ceux qui les suivoient moins de connoissances préliminaires en chimie ; il décrivoit les expériences, exposoit les faits avec clarté, avec précision, y ajoutoit les explications les plus plausibles, les plus généralement adoptées, mais avec le ton d'un homme qui doute encore & qui veut seulement payer un léger tribut au besoin si naturel aux hommes, & surtout aux jeunes gens, de croire quelque chose. L'incertitude où une suite de simples faits auroit laissé ses disciples, leur eût paru trop pénible ; il les consoloit donc par quelques explications, mais il ne les trompoit point sur le prix qu'ils devoient y attacher. Il avoit l'art de choisir les parties de la chimie où les faits étoient le plus certains, où

où les objets avoient été le plus discutés & le mieux éclaircis; enfin son but sembloit être principalement d'inspirer quelque confiance dans les vérités chimiques aux esprits d'une justesse sévère, & qui se piquent d'être difficiles en preuves. Il se concilioit ainsi l'estime & la confiance de ses disciples plus qu'il n'attiroit leur admiration; ils n'étoient point frappés de la fécondité de ses vues, mais ils sentoient qu'ils avoient en lui un guide sûr, qui ne les égareroit jamais. C'est avec un plaisir mêlé de douleur que je m'arrête sur ces détails. Je dois à M. Macquer mes premières connoissances en chimie; & en parlant ici de ses talens comme démonstrateur, c'est un devoir de reconnoissance dont je m'acquitte envers sa mémoire.

M. Macquer jugea qu'un dictionnaire de chimie étoit nécessaire pour assurer les heureux effets que ses livres élémentaires & ses cours avoient déjà produits. Cette manière de traiter les sciences appartient presque à notre siècle, & c'est un des services qu'il aura rendus à l'esprit humain. Aucune espèce de livres n'est plus propre à montrer à chaque époque le point où les sciences sont parvenues, à en faire connoître tous les détails, à en perfectionner la langue. Le public attendoit cet ouvrage de M. Macquer; son esprit naturellement juste & méthodique, son impartialité bien connue, son aversion pour les systèmes, la sagesse qu'il savoit mettre dans ses vues & dans ses jugemens, l'indiquoient comme le chimiste auquel on devoit desirer que cet important travail fût confié. L'exécution & le succès répondirent à cette attente. Il avoit pris la méthode la plus sûre pour faire un bon dictionnaire : celle de composer une espèce de cours de chimie complet & méthodique, dont les grands articles de son dictionnaire sont en quelque sorte les principaux chapitres, & peuvent être lûs suivant leur ordre naturel qu'il a indiqué dans une table particulière.

M. Macquer donna la seconde édition de son dictionnaire dans un moment où de nouvelles difficultés auroient pu

refroidir ſon zèle. C'étoit préciſément celui où la connoiſſance d'un grand nombre de ſubſtances aériformes, juſqu'alors négligées dans les analyſes, avoit produit dans toutes les parties de la chimie une révolution, & preſque un bouleverſement général; où toutes les théories devenoient incertaines, & toutes les expériences incomplètes. M. Macquer ſut éviter à la fois les deux inconvéniens qui étoient le plus à craindre, celui de ſe refuſer à des idées nouvelles qui l'obligeoient de revenir ſur des opinions qu'il avoit long-temps adoptées, & celui de trop ſacrifier à ces nouvelles idées, & de négliger les autres parties de la ſcience. Il expoſa les faits nouvellement découverts, en diſcuta les circonſtances & les réſultats, & garda un juſte milieu entre un attachement ſervile aux opinions anciennes & l'enthouſiaſme des nouveautés.

Il eſt impoſſible d'être chimiſte ſans avoir la curioſité d'étudier les travaux des arts qui ne ſont que des opérations chimiques faites en grand, d'après les règles fondées ſur une expérience en général groſſière & peu préciſe, mais qui préſentent beaucoup de phénomènes inſtructifs, & où, parmi un grand nombre de procédés inutiles & bizarres, il s'en trouve d'autres qu'on ſeroit d'abord tenté de condamner, & dont un examen plus approfondi fait connoître les raiſons & l'utilité.

M. Hellot, qui étoit commiſſaire du Conſeil pour les teintures, & chimiſte de la manufacture de porcelaine, deſira d'avoir M. Macquer pour adjoint; & ce deſir fait d'autant plus d'honneur à M. Hellot, qu'il ſavoit très-bien que la réputation de M. Macquer, en chimie, ſurpaſſoit la ſienne, & qu'il eſt rare de ſe choiſir pour ſucceſſeurs ou pour adjoints, des hommes par leſquels on puiſſe craindre d'être éclipſé; mais il ne l'eſt pas moins de mériter, comme M. Macquer, qu'une conduite ſi noble ne puiſſe être regardée comme imprudente.

L'art de la teinture dépend de la chimie, & d'une chimie très-délicate & très-compliquée. M. Macquer voulut

d'abord traiter cette partie de la ſcience comme il avoit traité toutes les autres, c'eſt-à-dire, en donner les élémens, les principes, en diſſiper les ténèbres. Il regardoit ce préliminaire comme auſſi eſſentiel aux véritables progrès des arts qu'à ceux des ſciences, & une grande partie de ſon art de la teinture en ſoie, publié dans la collection de l'Académie, eſt conſacrée à l'expoſition de ces principes élémentaires. Il y joignit dans nos Mémoires, des procédés pour employer le bleu de Pruſſe comme teinture, & pour donner à la ſoie teinte avec la cochenille, la même nuance & le même brillant que cette ſubſtance colorante fait prendre à la laine; ces procédés ſont le fruit d'obſervations chimiques très-fines, & ce qui eſt rare dans les opérations des arts, on y eſt guidé par une méthode ſûre.

M. Macquer n'a rien publié ſur l'art de la porcelaine, & on doit le regretter. Cette poterie, utile à la Chine & au Japon, pays dans leſquels elle eſt d'un uſage commun, n'eſt encore, parmi nous, qu'un objet de luxe, & par conſéquent une bagatelle inutile. L'art de la porcelaine étoit le ſecret de quelques manufactures au commencement de ce ſiècle; mais elles ſe ſont répandues depuis chez preſque toutes les nations; elles ſe ſont multipliées, & pour nous procurer la jouiſſance d'un objet qui, ſans être d'une néceſſité réelle, pourroit devenir d'une véritable utilité, il ne faudroit aujourd'hui que rendre la liberté à ce genre d'induſtrie, & lever le voile, bien tranſparent à la vérité, ſous lequel quelques parties de cet art ſont encore cachées. Heureuſement l'on commence à convenir preſque généralement que les ſecrets dans les arts ne peuvent que produire le double effet, d'en reſtreindre l'uſage & d'en arrêter les progrès.

L'eſprit qu'on remarque dans les ouvrages de M. Macquer, eſt le même qui dirigea ſa conduite. Tout en lui étoit d'accord: cette juſteſſe d'eſprit, cette modération dans ſes jugemens, cette réſerve dans ſes aſſertions, étoient la ſource de la modeſtie, de la tranquillité, de la douceur qu'il

montra conſtamment dans toutes les circonſtances de ſa vie. Il étoit ſenſible aux critiques; mais il ne connoiſſoit ni l'aigreur, ni l'emportement de l'amour-propre bleſſé. S'il ne faiſoit pas valoir avec enthouſiaſme ce qui lui paroiſſoit utile & bon, du moins il approuvoit toujours avec plaiſir. C'étoit malgré lui, & lorſqu'il y étoit contraint par la juſtice, qu'il ſe déterminoit à porter un jugement ſévère. Il voyoit le bien, il l'aimoit, mais quelquefois cédoit trop facilement aux obſtacles, croyoit trop promptement à l'impoſſibilité du ſuccès, & ſe conſoloit trop tôt par l'idée qu'il eſt impoſſible d'empêcher le bien s'il eſt une fois connu, & qu'il ne faut que ſavoir attendre.

Quoiqu'il eût peu pratiqué la médecine, la Société Royale le choiſit pour un de ſes premiers membres; & ſon amour pour le bien public lui fit un devoir de s'intéreſſer à un établiſſement ſi utile. Les réclamations qui s'élevèrent contre cette inſtitution, n'ébranlèrent pas M. Macquer; il y reconnut les mêmes raiſonnemens & les mêmes principes que dans le ſiècle dernier on avoit oppoſés à l'établiſſement des compagnies ſavantes. Son zèle éclairé pour les Sciences & pour l'Académie, étoit encore un des motifs de ſon attachement à cette ſociété nouvelle; il ſavoit que c'eſt ſur-tout des progrès de la théorie que doivent s'occuper les compagnies qui, par leur conſtitution, embraſſent toute l'étendue des ſciences. C'eſt dans ces Académies ſeules que les recherches qui ne ſont point d'une application immédiate, qui ne frappent point la curioſité publique, peuvent être appréciées, ou eſpérer de trouver une récompenſe. Si, ſéduites par des vues d'une utilité prochaine, les compagnies ſavantes ſe livroient excluſivement à des recherches pratiques, la marche des ſciences en ſeroit retardée aux dépens de cette même utilité à laquelle on les auroit imprudemment ſacrifiées.

L'inſtitution d'un corps chargé ſpécialement de l'application des ſciences phyſiques à l'utilité commune, devoit donc paroître à un eſprit auſſi juſte que celui de M. Macquer,

non-ſeulement un moyen de perfectionner la médecine, mais un ſervice rendu aux ſciences, qui, s'enrichiſſant tous les jours de vérités & d'applications nouvelles, deviennent d'une immenſe étendue, & demandent à être partagées pour être mieux cultivées.

M. Macquer avoit paſſé une grande partie de ſa vie avec un frère qui aimoit les Lettres, & à qui l'on doit quelques abrégés chronologiques eſtimés; après la mort de ce frère, le ſeul chagrin violent qu'il ait jamais éprouvé, il ne vécut plus qu'avec ſa femme & deux enfans, dont l'éducation étoit ſon unique délaſſement & ſon occupation la plus chérie.

Il aimoit peu le monde, parce qu'il préféroit à tout la tranquillité & l'indépendance; cependant il étoit doux, facile même dans la ſociété, & on n'eût jamais deviné qu'il ne s'y livrât qu'à regret : l'eſpèce de contrainte qu'il y éprouvoit n'étoit pas l'embarras que donne l'humeur, c'étoit le beſoin de ces ſentimens doux auxquels il eſt ſi touchant de pouvoir s'abandonner en liberté, & qui rendent, pour ceux qui les connoiſſent, tout autre plaiſir inſipide. Il n'étoit point malheureux dans le monde, mais il y portoit toujours le ſouvenir involontaire du bonheur qui l'attendoit au ſein de ſa famille. C'eſt le contraire de ce qu'éprouve le commun des hommes, qui ſouvent ſe trouvent mal où ils ſont, ſans pouvoir dire où ils ſeroient mieux.

La ſérénité qui paroiſſoit dans toute ſa perſonne de M. Macquer, ſembloit indiquer une ſanté conſtante; mais cette ſérénité n'annonçoit que le calme de ſon ame. Il ſouffroit depuis long-temps, mais le cachoit aux perſonnes qu'il aimoit le plus, parce qu'il regardoit ſes maux comme incurables; il les ſentit redoubler peu-à-peu dans ſes dernières années, en obſerva le progrès, & conjectura très-juſte le moment où la mort devoit les finir. Peu de temps auparavant, il en avertit ſa femme, lui parla de ſa fin prochaine avec ſenſibilité, mais ſans trouble, la remercia du bonheur qu'elle avoit répandu ſur ſa vie, & inſiſta beaucoup

ſur le deſir qu'il avoit d'être ouvert après ſa mort, afin que la cauſe en fût connue. Quelques jours après, ſes maux augmentèrent, & il y ſuccomba le 15 Février 1784, ſans avoir perdu un inſtant ni ſa préſence d'eſprit, ni ſa ſenſibilité, ni ſa douceur, ni ſa tranquillité ordinaire. L'oſſification de l'aorte & des concrétions pierreuſes formées dans les cavités du cœur, avoient été la cauſe de cet état de ſouffrance auquel il étoit condamné depuis pluſieurs années, & de l'impoſſibilité d'exiſter dont il avoit ſenti ſi long-temps les approches lentes & douloureuſes.

ÉLOGE
DE M. BERGMAN.

TORBERN BERGMAN, professeur de chimie à Upsal, membre de l'Académie des Sciences de la même ville, de celles de Londres, de Berlin, de Stockolm, des Curieux de la nature, de Gottingue, de Turin, associé-étranger de la Société de médecine de Paris & de l'Académie des Sciences, naquit le 20 Mars 1735, à Catharineberg, dans la province de Vestro-Gothie, de Barthold Bergman, receveur des finances, & de Sara Hœgg.

Chez presque toutes les nations de l'Europe, l'état de financier est une profession lucrative & paisible; il n'en étoit pas de même alors en Suède. Souvent les receveurs des deniers publics, créatures d'un parti qui avoit été dominant dans une Diète, étoient exposés à la persécution de la Diète suivante, où le parti contraire avoit l'avantage. On croyoit trouver dans la recherche de leur fortune, des ressources pour le trésor public, & dans les poursuites exercées contre eux, un moyen presque sûr de capter la bienveillance du peuple. Il en résultoit que leurs profits devoient être d'autant plus grands, d'autant plus onéreux à la nation, qu'ils étoient plus incertains; mais en même-temps ceux qui, comme M. Bergman, refusoient d'embrasser cette profession, annonçoient au moins autant de sagesse que de désintéressement.

Lorsqu'il eut fini ses premières études, son père lui permit de suivre la carrière des universités, & de se rendre à Upsal. Un de ses parens fut chargé de veiller sur sa conduite. Bien loin d'avoir besoin de l'exhorter au travail, le surveillant se vit bientôt obligé de modérer son ardeur,

& ſur-tout de l'empêcher de cultiver les ſciences phyſiques. L'univerſité d'Upſal embraſſe les connoiſſances humaines dans toute leur étendue ; & ceux qui s'y appliquent à la théologie, au droit public, à la juriſprudence, peuvent eſpérer des places importantes & une grande fortune, tandis que les ſuccès dans l'étude des mathématiques & de la phyſique ne ſont récompenſés que par un peu de gloire. M. Bergman préféroit cependant ces dernières études, & cette préférence imprudente étoit l'objet des remontrances de ſon parent ; remontrances auxquelles il ne put échapper qu'en imaginant un moyen de cacher ſubitement ſes livres de phyſique, lorſqu'il étoit ſurpris, pour ne laiſſer voir que ceux qu'il lui étoit permis d'étudier. Cette néceſſité d'acquérir dans des genres auxquels il ne ſe livroit qu'avec dégoût, aſſez de connoiſſances pour perſuader qu'il en avoit été uniquement occupé, & cacher les progrès plus grands qu'il faiſoit dans les ſciences de ſon choix, altéra promptement ſa ſanté ; & au bout d'une année, il fut obligé de retourner dans ſa famille & de joindre aux études ſédentaires un exercice de corps habituel, qui ſeul pouvoit rétablir & fortifier ſa conſtitution. Mais il voulut que cet exercice ſervît encore à l'inſtruire ; il avoit étudié la botanique avant d'aller à Upſal ; il reprit cette étude dans ſa retraite, & y joignit celle des inſectes. Pluſieurs de ceux qu'il obſerva ne ſe trouvoient point claſſés dans les ouvrages de Linné. M. Bergman en forma une petite collection, & la fit remettre à cet homme illuſtre, qui alors habitoit Upſal. M. Bergman n'avoit pas oſé ſe préſenter à lui pendant ſon premier ſéjour. Cette diſcrétion eſt un ſentiment bien naturel dans un jeune homme qui, frappé d'un juſte reſpect pour le génie, ne ſe croit pas digne encore de l'approcher, mais nourrit au fond de ſon cœur l'eſpérance de mériter un jour d'attirer ſes regards. Cet hommage fut d'autant plus agréable à Linné, que le jeune naturaliſte avoit eu le bonheur de rencontrer des eſpèces curieuſes & réellement inconnues.

Lorſque

Lorſque la ſanté de M. Bergman fut rétablie, il obtint la permiſſion de retourner à Upſal, avec une liberté entière de cultiver les mathématiques, la phyſique, l'hiſtoire naturelle. Il s'y étoit ménagé l'avantage d'être connu du ſavant dont le nom célèbre y éclipſoit alors les autres noms. Ainſi, cédant à cet empire que la gloire & le génie exercent ſur tout ce qui les environne, M. Bergman ne parut d'abord aimer que l'hiſtoire naturelle; elle fut l'objet de ſes premiers travaux, & ſon premier Mémoire fut une découverte. On ignoroit la nature d'un corps qui ſe trouve dans quelques eaux, & qui porte le nom de *coccus aquaticus.* M. Bergman s'aperçut que c'étoit l'œuf d'une ſangſue, œuf qui renfermoit dix à douze petits. Linné, auquel il fit part de cette obſervation, refuſa de le croire; mais M. Bergman le rendit lui-même témoin de ce fait. Alors Linné, après avoir écrit de ſa main au bas du mémoire de ſon élève; *vidi & obſtupui, je l'ai vu, & j'en ai été frappé d'étonnement,* l'envoya, décoré de cette honorable apoſtille, à l'Académie de Stockolm.

Peu de temps après, Linné donna le nom de M. Bergman à une nouvelle eſpèce d'inſectes. Cette manière d'attacher le nom d'un homme à une eſpèce qui doit être éternelle, ſemble annoncer qu'on croit, ou ſes talens, ou le ſentiment qu'on éprouve pour lui dignes d'être conſacrés à l'immortalité. C'eſt une ſorte d'apothéoſe qui ne coûte rien à la raiſon; mais le ſuccès de cet honneur dépend beaucoup du haſard. Ces dénominations diſparoiſſent ſouvent de la langue des ſciences, d'autres fois elles s'y conſervent, mais elles ceſſent de rappeler un nom oublié dont on a voulu vainement prolonger la mémoire; & les ſavans ne doivent compter ſur l'immortalité que lorſqu'ils l'ont méritée par leurs ouvrages.

Des Mémoires couronnés par l'Académie de Stockolm, ſur l'hiſtoire des inſectes qui attaquent les arbres à fruit, & ſur les moyens de ſe mettre à l'abri de leurs ravages; une méthode de les claſſer d'après la forme qu'ils ont dans

l'état de larve, époque où il seroit le plus utile pour l'agriculture de pouvoir reconnoître & détruire ceux qui sont nuisibles; un grand nombre d'observations sur cette classe d'animaux si variés dans leurs formes & dans leur organisation, si importans pour l'homme qui a su en soumettre quelques-uns à ses besoins, tandis que les autres défendus par leur petitesse, & puissans par leur multitude, osent lui disputer encore quelques parties de son empire, enfin si intéressans par cette foule d'observations qu'offre au philosophe qui sait voir & réfléchir, le spectacle de leur industrie, de leur prévoyance, de leurs travaux, de leurs mœurs, de leur état de civilisation plus ou moins perfectionnée : tel a été le fruit du goût de M. Bergman pour une étude qui déjà n'étoit plus pour lui qu'un délassement; car les mathématiques & les parties de la physique qui y ont rapport étoient devenues sa véritable occupation. M. Bergman aimoit à parler de ses premiers travaux dans un genre auquel il avoit renoncé, mais pour lequel il avoit conservé un goût très-vif; & long-temps après il citoit avec une sorte de complaisance, que dans un seul jardin & pour une seule année, l'usage d'un moyen qu'il avoit indiqué avoit prévenu la naissance de plus de sept millions d'insectes destructeurs.

Il fut nommé, en 1761, professeur de mathématiques & de philosophie naturelle. Depuis plusieurs années il enseignoit les différentes parties de ces sciences. Nous lui devons une savante histoire de l'arc-en-ciel & des crépuscules, des recherches sur l'aurore boréale, sur les phénomènes électriques, sur l'électricité du crystal d'Islande, sur celle de la tourmaline. Enfin on trouve son nom dans la liste des astronomes qui ont observé le premier passage de Vénus sur le Soleil, parmi ceux dont les résultats méritent le plus la confiance des savans.

Personne alors ne savoit à Upsal qu'il eût cultivé la chimie; mais Wallerius s'étant démis, en 1767, du titre de professeur dans cette science, M. Bergman fit inscrire son nom dans la liste des concurrens. Wallerius avoit espéré

pouvoir faire paſſer ſa chaire à un de ſes élèves, & bientôt M. Bergman vit ſe réunir contre lui tous ceux qui formoient, à Upſal, le parti de l'ancien profeſſeur : car tout homme célèbre a la triſte facilité d'en avoir un, à moins qu'il n'ait la ſageſſe & la noble fierté de dédaigner un avantage ſi dangereux. Ce parti s'accrut bientôt de la foule de ces hommes condamnés à ne jamais reconnoître un mérite ſupérieur dans leurs contemporains, ainſi qu'à ne jamais croire une vérité ſi elle n'a point été une des opinions de leur jeuneſſe.

Deux diſſertations ſur l'alun, que M. Bergman avoit données comme un eſſai de ſes forces, furent critiquées avec amertume. Il devoit ſuccomber ſous cette eſpèce de conjuration. Heureuſement pour la chimie, le prince royal, aujourd'hui roi de Suède, étoit alors chancelier de l'univerſité d'Upſal; il conſulta des ſavans qui, étrangers à ce corps, ne pouvoient partager les préventions de ſes membres, examina les titres de M. Bergman & les reproches élevés contre lui, ſe chargea lui-même de répondre à ces reproches & de le défendre auprès du ſénat. C'eſt à-la-fois une anecdote bien honorable pour les ſciences, & une preuve frappante des progrès de la raiſon humaine, que de voir l'héritier d'un trône employer ſes talens, plutôt encore que ſon crédit, à ſoutenir devant les chefs de la nation la cauſe du génie perſécuté, & à lui faire obtenir juſtice.

On auroit pu craindre que M. Bergman, livré pendant long-temps à des études étrangères à la chimie, ne manquât, dans la nouvelle carrière où il s'étoit jeté, de cette étendue de connoiſſances, de cette facilité, de cette habitude des opérations, avantages ſans leſquels, dans les ſciences phyſiques, le talent peut encore beaucoup pour la célébrité du ſavant, mais très-peu pour le progrès de la ſcience & l'utilité réelle. On s'aperçut bientôt au contraire, que ſes études de géométrie, de phyſique, d'hiſtoire naturelle, étoient bien loin de lui avoir été inutiles. Elles le préſervèrent des préjugés & de l'eſprit de routine dont chaque partie

de nos connoiſſances ſemble avoir encore conſervé quelques veſtiges ; elles donnèrent à ſes idées & à ſes vues plus de préciſion & plus d'étendue. Il vit que la chimie devoit être, après les mathématiques, la baſe fondamentale de la connoiſſance de la nature, qu'il falloit donc reculer les bornes du champ trop reſſerré où cette ſcience avoit été renfermée ; mais qu'en lui ouvrant une carrière plus vaſte, on couroit riſque de n'y multiplier que les erreurs, ſi on ne s'occupoit en même temps d'en bannir toutes les explications vagues & ſyſtématiques, d'en réformer la langue, enfin d'y porter l'exactitude de quelques autres parties de la phyſique.

Son premier ſoin fut de former auprès de ſon laboratoire un cabinet dans lequel les ſubſtances du règne minéral étoient rangées par ordre, à côté des produits des expériences qui lui en avoient fait connoître la compoſition ; une autre pièce renfermoit les minéraux qui ſe trouvent en Suède, & ils y étoient rangés ſuivant leur ordre géographique; enfin dans une troiſième, les modèles des machines, des inſtrumens, des métiers employés à faire ſubir à ces ſubſtances les préparations, à leur donner les formes qui les rendent utiles à nos beſoins, étoient placés à côté des produits que les arts en avoient formés. Par ce moyen, un élève apprend d'abord à connoître les ſubſtances d'après leur nature & la proportion de leurs principes. Plus loin, il les aperçoit rangées dans l'ordre où elles ont été répandues ſur le globe, & les loix qui ont préſidé à cet ordre deviennent plus faciles à reconnoître ou à ſaiſir. Enfin il voit comment les arts ont ſu employer ces ſubſtances, comment leur pratique a prévenu les théories, ou a ſu en profiter, comment on y a réſolu une foule de problèmes chimiques compliqués par une condition de plus, la néceſſité de les réſoudre avec profit, élément qui rend cette ſolution plus difficile, & les méthodes par leſquelles on l'a trouvée, ſouvent plus piquantes.

Cette manière d'inſtruire, ſi nouvelle, & pour laquelle

M. Bergman fit des ſacrifices conſidérables, eſt un des grands ſervices qu'un eſprit profond & philoſophique pût rendre aux ſciences. Bientôt après il les enrichit par de nombreuſes découvertes.

C'eſt lui qui le premier a fait bien connoître la ſubſtance à laquelle on donnoit le nom d'*air fixe*, & qu'il a nommée *acide aérien*, après avoir prouvé qu'elle avoit toutes les propriétés des acides.

Le nikel, le régule de manganèſe, la terre de magnéſie, la terre peſante étoient des ſubſtances nouvellement découvertes, & ſur leſquelles la chimie n'offroit avant lui que des vues ingénieuſes ou des expériences iſolées.

L'acide qu'on retire du ſucre & d'un grand nombre d'autres ſubſtances végétales, en diſtillant ſur elles de l'acide nitreux; ceux qu'on retire de l'arſenic, de la molibdène, du ſpath fluor, de la tunſthène, avoient été découverts dans ſon école, par lui ou par ſes diſciples. Mais il falloit une longue ſuite d'expériences & de recherches pour apprendre à connoître ces ſubſtances, ou nouvelles, ou peu familières aux chimiſtes, auſſi parfaitement que celles qui ont été plus anciennement traitées; & pour que leur analyſe, leurs propriétés, les phénomènes qu'elles préſentent dans leurs combinaiſons, formaſſent également un enſemble ſyſtématique de faits conſtans & précis.

M. Bergman oſa entreprendre ce travail immenſe; & tandis que ce terrein, juſque-là ſans culture, lui offroit d'abondantes moiſſons, il ſavoit en recueillir de nouvelles ſur ceux qu'une culture aſſidue ſembloit avoir épuiſés. Le fer qui eſt depuis ſi long-temps le ſujet des opérations de tant d'arts différens, & l'objet des recherches des ſavans & des artiſtes, n'a commencé à être vraiment connu que depuis les recherches de M. Bergman, qui a montré, dans ce qu'on prenoit pour du fer, pluſieurs ſubſtances étrangères, preſque toutes métalliques, dont l'exiſtence étoit inconnue; mais ce n'eſt point par ces travaux particuliers qu'il faut juger de ſon génie; c'eſt dans ſes nouvelles

méthodes, dans ses théories générales, qu'il faut apprendre à le connoître & à l'apprécier.

Dans ses dissertations sur l'analyse des eaux, on le voit ajouter aux réactifs déjà employés, des réactifs nouveaux; faire sentir l'imperfection de cette méthode, en même temps qu'il enseigne à la porter à un degré d'exactitude encore inconnu; ajouter à l'analyse directe de nouveaux moyens de ne laisser échapper aucun des produits, de les séparer avec plus d'exactitude & d'en déterminer les quantités respectives avec une très-grande précision. Au lieu de chercher à les obtenir seuls pour les peser ensuite, méthode souvent difficile & qui exposeroit à en perdre une partie, il cherche au contraire le poids d'une des combinaisons de chacun de ces principes, avec une substance bien connue qu'il a employée, pour enlever ce principe à ceux auxquels il étoit uni. Des expériences faites à part & plus en grand lui apprennent ensuite à connoître la proportion des substances qui constituent cette combinaison nouvelle; cette méthode ingénieuse & féconde dont il est l'auteur rend les résultats plus précis & souvent même plus assurés,

Les pierres précieuses, connues sous le nom de *gemmes*, avoient presque entièrement échappé à tous les efforts de l'analyse. M. Bergman parvint à les y soumettre, brisa l'union qui règne entre leurs parties, & sépara les terres de différente nature dont elles sont composées. La terre alumineuse en forme plus de la moitié; la terre quartzeuse & la terre calcaire, un peu de chaux de fer en sont les autres principes; & c'est avec ces substances communes & viles en apparence, que la Nature, avec l'aide du temps, & par des moyens qui sont encore un secret pour nous, parvient à former ces pierreries que leur éclat, leur rareté, leur éternelle durée ont rendu dignes de servir d'ornement à la beauté, & de parer la tête des rois ou les statues des dieux.

Le diamant qui diffère de toutes les autres pierres, par la propriété qu'il a de brûler, n'a pu même se dérober tota-

lement à la ſagacité de M. Bergman, qui en a fait aſſez pour prouver que ſi dans ſes recherches ſur le diamant, il n'a pu obtenir un ſuccès également complet, c'eſt ſa fortune & non ſon génie qu'il en faut accuſer.

M. Bergman a prouvé la néceſſité de procéder dans les opérations docimaſtiques par la voie humide, c'eſt-à-dire, par l'analyſe où l'on emploie des menſtrues, ſeule méthode qui puiſſe être rigoureuſe; mais il enſeignoit en même temps à perfectionner les procédés ordinaires, à les ſimplifier; il montroit quelle pouvoit en être la véritable utilité; il apprenoit à exécuter avec un chalumeau, un charbon, une ſimple cuillier & quelques ſubſtances d'épreuve, de premières analyſes aſſez exactes, pour reconnoître les ſubſtances minérales avec certitude & ſe guider dans une analyſe plus complète. M. Bergman entreprit alors de claſſer toutes ces ſubſtances d'après leur compoſition chimique. Cette méthode eſt la ſeule vraiment ſcientifique, puiſque c'eſt la ſeule qui ait pour objet les qualités eſſentielles aux ſubſtances, celles dont dépendent toutes leurs propriétés ſecondaires; mais une difficulté juſqu'à lors inſoluble avoit empêché les naturaliſtes d'adopter cette méthode, l'impoſſibilité d'en faire uſage ailleurs que dans un laboratoire, par des moyens lents, coûteux & pénibles. M. Bergman avoit ſçu vaincre cette difficulté, en inventant cette analyſe au chalumeau; & aujourd'hui le minéralogiſte armé de cet appareil portatif peut, au ſein des mines, ſur le ſommet des montagnes, au fond des ſouterrains creuſés par la nature, tout analyſer & tout reconnoître.

Dans un Mémoire ſur la criſtalliſation, publié en 1773, M. Bergman montra comment d'une forme primitive très-ſimple peuvent naître des formes de criſtaux qui, au premier coup-d'œil, n'ont aucun rapport avec la forme génératrice; & comment la diſſection de ces criſtaux, l'examen des coupes qu'on peut y faire avec plus ou moins de facilité, apprennent à reconnoître cette figure primitive & les loix plus ou moins ſimples, d'après leſquelles elle a déterminé

la production des cristaux différens. Ce Mémoire n'est qu'un simple essai, c'est la première esquisse d'une théorie nouvelle, mais cette esquisse est l'ouvrage d'un grand maître. M. l'abbé Haüy s'occupoit de son côté des mêmes objets à peu-près dans le même temps, mais avec plus de suite, & c'est à lui que doit appartenir la gloire d'avoir établi cette théorie qui manquoit aux sciences naturelles.

Un des derniers ouvrages de M. Bergman, est un savant traité sur les attractions électives. Nous entrerons dans un détail plus long sur cette théorie qui est à la fois le fondement de la chimie, & le point par lequel elle se lie le plus à la physique, & doit un jour s'unir aux sciences mathématiques ; union dont les recherches sur les phénomènes de la cristallisation peuvent nous faire espérer que l'époque n'est pas aujourd'hui très-éloignée.

M. Geoffroi, de cette Académie, paroît être le premier qui ait imaginé de réduire à quelques règles générales les phénomènes observés constamment dans les opérations chimiques. On appeloit alors *affinité* la force inconnue, en vertu de laquelle deux substances s'unissent & forment une combinaison. Si une troisième substance détruit cette première combinaison pour en former une nouvelle avec un de ses principes, on disoit qu'elle avoit avec ce principe une affinité plus grande que le second principe qui en avoit été séparé par elle. M. Geoffroi imagina de donner une table qui contenoit, pour les substances les plus importantes ou les plus connues, l'ordre de la force d'affinité, suivant laquelle les autres y adhèrent. C'étoit d'après les observations que cette table avoit été formée ; elle étoit comme le précis des résultats que l'on en pouvoit tirer; elle réduisoit à un petit nombre de faits simples & généraux, la masse déjà très-grande des faits chimiques : elle pouvoit servir à donner l'explication de plusieurs phénomènes nouveaux, c'est-à-dire à montrer leur accord avec les faits déjà connus. Cette table eut le succès que méritoit une idée si ingénieuse, & depuis ce temps il n'est presque pas de chimiste célèbre qui,

qui, dans ſes leçons ou dans ſes ouvrages, n'ait donné la table des affinités de M. Geoffroi, corrigée, augmentée, perfectionnée. M. Bergman avoit porté, dans l'étude de la chimie, des vues trop philoſophiques pour ne pas ſentir l'importance de cette table & ne pas s'occuper de la rendre plus utile. Mais il regardoit ce travail comme devant former le réſultat & le complément de tous les autres, & il avoit calculé le nombre effrayant de trente mille expériences néceſſaires encore pour la rendre auſſi complète que nos connoiſſances le permettent. Auſſi auroit-il retardé encore long-temps la publication de cet ouvrage, ſi le dépériſſement de ſa ſanté ne lui eût fait enviſager une mort prochaine. Alors il ſe crut permis de mettre au jour les matériaux qu'il avoit raſſemblés, les idées qu'il auroit voulu éclaircir, les vues qu'il ſe propoſoit de vérifier; il ne craignit plus le reproche d'avoir publié un ouvrage trop imparfait, de n'avoir fait que déviner ce qu'il auroit fallu prouver. *Il me ſuffit*, diſoit-il, *que mes eſſais puiſſent mettre les autres en état de porter plus loin leurs recherches. Qu'importe que la vérité ſoit trouvée par moi ou par un autre, pourvu qu'elle le ſoit.*

Cependant cet ouvrage ſi imparfait à ſes yeux, ne l'a pas été aux yeux des autres chimiſtes. Sa table incomparablement plus étendue que celle de M. Geoffroi, eſt la première qui contienne les loix des affinités, telles qu'on les obſerve en opérant par la voie sèche. Il a eu de plus l'idée abſolument nouvelle d'exprimer, par des eſpèces de formules, toutes les opérations chimiques, dont les réſultats ſervent de baſe à ſa table. Un ſeul coup-d'œil fait voir les ſubſtances ſur leſquelles on a opéré, la méthode employée & le réſultat de l'opération.

Cette eſpèce de langue nouvelle mérite l'attention des philoſophes; le moment approche où la langue alphabétique ne ſera plus ni aſſez rapide, ni aſſez riche, ni aſſez préciſe, pour répondre aux beſoins des ſciences & ſuivre leurs progrès; elles ſeront forcées de s'arrêter, ou il faudra créer pour chacune une langue dans laquelle des ſignes invariablement déterminés,

expriment les objets de nos connoiſſances, les diverſes combinaiſons de nos idées, les opérations auxquelles nous ſoumettons les productions de la nature, & celles que nous exécutons ſur nos propres idées, qui ſoient enfin pour tous les genres de ſciences, mais avec plus de perfection encore, ce que la langue de l'algèbre eſt pour l'analyſe mathématique.

Perſonne, avant M. Bergman, n'avoit mieux prouvé combien les loix des affinités ſont conſtantes, & comment on peut, par un examen plus approfondi des phénomènes, rappeler à ces loix les faits qui paroiſſent le plus les combattre. Il montre en effet que la même ſubſtance agit tantôt comme n'étant qu'un ſeul principe, & tantôt comme étant elle-même décompoſable, & par l'action ſéparée des différens principes dont elle eſt formée. Ici les principes, au lieu de ſe combiner deux à deux, ſe combinent trois à trois; là, une ſubſtance formée de deux principes eſt capable de conſerver, avec une certaine quantité ſurabondante d'un de ſes principes, une affinité aſſez forte pour enlever ce principe à une autre ſubſtance & la décompoſer. M. Bergman s'eſt borné à la table des affinités ſimples ou regardées comme telles : car peut-être n'en exiſte-t-il pas réellement dans la nature. La table des affinités doubles eût exigé un travail immenſe que la durée trop courte de ſa vie ne lui a point permis de terminer.

Au mot d'*affinité* il ſubſtituoit celui d'*attraction élective;* il employoit le mot *attraction*, parce que cette force, comme l'attraction Newtonienne, peut s'obſerver dans tous les corps de la nature, & tend à rapprocher, à unir les molécules entr'elles; & il y ajoutoit l'épithète *élective*, parce qu'elle n'eſt pas la même dans les molécules égales en maſſe, mais qu'elle varie ſuivant la nature des ſubſtances qui tendent à ſe combiner.

Dans cet ouvrage rempli de tant de vérités, ou neuves, ou éclaircies & mieux prouvées, dans celui où, par la comparaiſon des maſſes de métaux qui ſe précipitent mutuellement, M. Bergman cherche le rapport des quantités de

phlogiſtique qu'ils contiennent, on voit qu'il admettoit une théorie différente de celle qui paroît preſque généralement adoptée par les chimiſtes françois. Dans M. Bergman, le ſoufre n'eſt pas une ſubſtance qui, s'uniſſant avec un des principes de l'air vital, forme de l'acide vitriolique; c'eſt une combinaiſon de l'acide vitriolique & du phlogiſtique. Elle ſe change en acide lorſqu'elle perd ce phlogiſtique & qu'elle s'unit à la matière de la chaleur, qui eſt elle-même une combinaiſon du phlogiſtique & de l'air vital. Une terre métallique eſt, ſuivant M. Lavoiſier, le métal uni à l'air vital: ſuivant M. Bergman & M. Schéelle, c'eſt une terre unie à la matière de la chaleur, & le métal étoit la même terre unie avec le phlogiſtique. On voit combien les deux explications qui peuvent paroître oppoſées au premier coup-d'œil, ſe rapprochent lorſqu'on vient à les conſidérer de plus près. Auſſi rendent-elles raiſon des phénomènes avec un ſuccès preſque égal; & juſqu'ici il paroît qu'aucune expérience vraiment déciſive n'a ni confirmé, ni détruit aucun des deux ſyſtèmes. Mais quand M. Bergman ſe ſeroit trompé, la ſincérité avec laquelle il n'a donné ſon opinion que comme la plus vraiſemblable à ſes yeux, la modeſtie avec laquelle il emploie le ſyſtème d'explications propoſé par M. Schéele, lorſqu'il lui eût été ſi facile d'en imaginer un autre, devroient lui faire pardonner cette erreur. D'ailleurs on ne pourroit lui faire, ſans injuſtice, le reproche de n'avoir pas aſſez étudié la nouvelle théorie des gaz, reproche qu'ont mérité peut-être quelques partiſans du phlogiſtique, puiſque indépendamment de ſes travaux ſur le gaz aérien, ſur le gaz hépatique des eaux ſulfureuſes, on lui doit la première explication ſolide de la détonation de l'or fulminant, détonation dûe à la production d'un air alkalin.

Une théorie de la terre fait partie des ouvrages de M. Bergman. Mais dans un diſcours ſur la manière de chercher la vérité, ouvrage digne d'un homme qui avoit commencé par donner de grands exemples, il nous apprend lui-même ce que nous devons penſer de ces hypothèſes

philosophiques. Il croyoit, comme M. Francklin, qu'il ne peut y avoir dans ces systèmes d'autre mérite que la facilité de les faire, jointe à celle de les abandonner. Il croyoit en même temps qu'en les envisageant comme de simples plans d'expériences ou d'observations, ils peuvent avoir quelque utilité : d'ailleurs ils servent de cadre pour arranger les faits sous un ordre plus frappant; en parlant à l'imagination, ils soutiennent une attention foible que lasseroit une suite non interrompue de discussions & de faits; & à cet égard ils sont en quelque sorte, dans les sciences, ce que sont dans la littérature ces romans de morale ou de politique destinés à rendre l'instruction plus agréable & plus facile.

Les événemens de la vie de M. Bergman sont peu variés. Placé comme professeur de chimie à Upsal, il n'en sortit plus que pour faire quelques courses scientifiques dans les mines, & pour aller prendre les eaux lorsque sa santé lui en avoit rendu le secours nécessaire.

Il eut l'honneur d'être élu recteur de l'Université : cette compagnie n'est pas seulement un corps littéraire; propriétaire de grandes terres sur lesquelles elle exerce une autorité très-étendue, jouissant d'une juridiction sur ses membres & sur les écoliers, possédant un grand nombre de ces immunités, de ces priviléges, que dans les siècles qui nous ont précédés on regardoit comme des encouragemens, & qui ne servent qu'à décourager le talent, à rallentir l'activité en détruisant la concurrence; l'université d'Upsal est au milieu de la Suède une sorte de république. Les professeurs en sont les chefs; & tandis que dans les établissemens littéraires, toutes les institutions devroient avoir pour but d'y maintenir la paix, & de dispenser leurs membres de toute occupation étrangère aux sciences, la constitution de cette université oblige les professeurs à des soins qui peuvent les écarter ou les dégoûter de leurs fonctions, & inspire aux autres corps de l'état, aux personnes puissantes le desir de s'y faire des créatures, d'y avoir de l'influence. Ses membres pourroient être tentés quelquefois d'oublier que ce n'est pas leur intérêt, mais l'intérêt commun des citoyens, qui a été l'objet de leur

établiſſement ; & de ſacrifier leur véritable devoir, le zèle pour le progrès des ſciences, à cet eſprit de corps auſſi mépriſable dans ſon principe, moins raiſonnable dans ſes motifs que l'intérêt perſonnel, mais plus audacieux dans ſes excès, & moins ſuſceptible d'être contenu par l'honneur ou par la crainte. Chef de cette univerſité alors partagée en deux grands partis, celui des théologiens unis aux juriſconſultes & celui des phyſiciens, M. Bergman ne s'occupa que de maintenir entr'eux l'union, l'égalité même, quoiqu'il eût contribué plus que perſonne à faire pencher la balance du côté du parti trop long-temps le plus foible ; & l'époque de ſa magiſtrature eſt remarquable dans les faſtes de ce corps, par le petit nombre d'affaires & de délibérations que préſentent les regiſtres. Elle le fut auſſi par la ſageſſe de la conduite des écoliers ; ils ſont en grand nombre, preſque tous au-deſſus de l'enfance & dans le premier âge des paſſions : ſouvent ils avoient éludé ou bravé la ſévérité des règlemens, & ils furent ſubjugués par leur reſpect pour la gloire de leur chef & leur admiration pour ſon génie. M. Bergman ſavoit que le premier dans une ſociété ſavante, n'eſt ni le chef de cette ſociété, ni l'homme dont la voix y a le plus d'influence ; mais celui qui s'eſt illuſtré par un plus grand nombre de découvertes, ou qui en a fait de plus importantes.

Le roi de Pruſſe deſira d'attacher M. Bergman à ſon Académie. Le ſavant Suédois héſita un moment : ſa ſanté altérée par le double travail de l'enſeignement & des recherches chimiques, pouvoit ſe rétablir dans un climat plus doux ; il auroit pu s'y livrer ſans partage à des travaux académiques. Mais le roi de Suède avoit été ſon bienfaiteur particulier ; il ſut que ſa retraite affligeroit ce monarque, & il n'y ſongea plus : ſeulement il demanda au roi de ne pas lui faire perdre le mérite de ce ſacrifice en augmentant ſes appointemens ; mais ſa demande ne fut point écoutée.

La réputation d'un ſavant illuſtre s'accroît par celle de ſes diſciples. Son nom ſe préſente à la poſtérité entouré des

noms célèbres qui ont dû à ſes ſoins une partie de leur éclat; il conſerve enfin ſur les découvertes faites dans ſon école, une eſpèce de droit de ſuzeraineté. Parmi les chimiſtes formés par M. Bergman, nous citerons ſur-tout M. Schéelle, parce qu'il eſt plus particulièrement ſon ouvrage. Un des auditeurs de M. Bergman découvrit par haſard, chez un apothicaire d'Upſal, un jeune élève à qui l'on reprochoit de négliger les travaux de ſon état en s'abandonnant à ſon goût pour la chimie. Il vit ce jeune homme, fut ſurpris des recherches ingénieuſes auxquelles il avoit pu ſe livrer dans un laboratoire particulier, que, malgré la médiocrité de ſa fortune & la gêne à laquelle il étoit ſoumis, il avoit ſu ſe former: cet élève étoit M. Schéelle. M. Bergman inſtruit de cet événement, voulut voir ce jeune homme, fut étonné de ſes connoiſſances, de ſes diſpoſitions heureuſes: ce génie naiſſant ne put échapper à la ſagacité d'un maître habile; dès ce moment M. Schéelle fut ſon diſciple chéri, bientôt ſon digne émule & toujours ſon ami. Au lieu d'affecter ſur lui cette ſupériorité à laquelle un maître renonce avec tant de peine, M. Bergman ſe trouvoit aſſez grand pour ne vouloir que l'égalité; & loin de chercher à s'arroger quelque droit ſur les travaux de M. Schéele, on lit dans ſes lettres à des chimiſtes étrangers, qu'il voyoit avec une véritable douleur que l'erreur les lui attribuât quelquefois. Sa conduite à cet égard fut la même pour tous ſes diſciples; exact à les citer, ardent & habile à faire valoir leurs travaux, il alloit au-delà même de la juſtice rigoureuſe qui malheureuſement auroit encore été un mérite.

La célébrité de M. Bergman lui avoit fait des diſciples dans toutes les contrées de l'Europe. En France, nous citerons en particulier deux magiſtrats qui honorent la magiſtrature par leurs lumières, par leur zèle ardent & éclairé pour le progrès des ſciences, par le courage avec lequel ils ſe ſont élevés au-deſſus des préjugés, & qui en même temps ont fait honneur aux ſciences par l'eſprit d'humanité, de raiſon, de patriotiſme éclairé qu'ils ont porté dans leurs fonctions. On reconnoîtra ici M.rs de Morveau

& de Virli. L'un d'eux, M. de Virli, voulut même aller entendre M. Bergman en Suède, & profiter de ses leçons; & nous devons à M. de Morveau la traduction de l'ouvrage où, sous le titre modeste d'Opuscules, M. Bergman a rassemblé les plus importantes de ses recherches.

L'usage de l'Académie de Stockolm est de partager entre ses membres le travail des éloges décernés à ceux qu'elle a perdus. M. Bergman se chargea de celui de Wallerius qui avoit été constamment injuste envers lui, & même envers la chimie, sur laquelle son aversion s'étoit étendue. Nous ne le louerons point d'avoir oublié en ce moment son ancienne injure; mais il étoit utile que le mérite réel de Wallerius fût apprécié par un homme fait pour le bien connoître, dont le suffrage ne seroit pas suspect, & M. Bergman fut assez sûr de lui-même pour ne pas craindre de confondre les limites étroites qui séparent la justice de la sévérité, & l'indulgence qu'on doit à un ennemi, d'une générosité qui seroit un outrage.

La passion de M. Bergman pour les sciences, avoit épuisé sa constitution naturellement ardente & délicate. Il prodiguoit sa santé, non-seulement pour les travaux qui pouvoient lui procurer des connoissances nouvelles ou lui mériter de la gloire, mais encore pour ceux qui, n'étant utiles qu'à l'instruction de ses disciples, ne lui offroient d'autre récompense que le plaisir d'avoir rempli son devoir. Pendant quelque temps les eaux minérales artificielles suspendirent ses maux, & ce fruit de ses travaux répara une partie du mal qu'ils lui avoient fait. Les eaux de Medewi en Suède lui sauvèrent une fois la vie, mais en 1784 il eut encore besoin de ce secours, elles ne lui firent plus aucun effet, & le 8 Juillet de la même année, il succomba sous le poids de ses maux, victime de son zèle pour ses devoirs & pour la chimie. Il n'avoit pas encore cinquante ans, & depuis long-temps son nom étoit, dans les sciences, un des premiers de l'Europe.

ÉLOGE

DE M. MORAND.

JEAN-FRANÇOIS-CLÉMENT MORAND, docteur-régent de la Faculté de médecine de Paris, premier médecin du cardinal de Bavière électeur de Cologne, des Académies des Sciences de Stockholm, de Harlem & de Bruxelles; de la Société Royale de Londres, de l'Académie de médecine de Madrid, de la Société botanique de Florence; de la Société économique de Berne, & de la Société d'émulation de Liége, pensionnaire anatomiste de l'Académie des Sciences, naquit à Paris le 29 Avril 1726, de Sauveur-François Morand, de cette Académie, & de Marie-Clémence Guerin.

Le père de M. Morand comptoit parmi ses parens, plusieurs chirurgiens célèbres; lui-même s'étoit illustré dans cette profession, & avoit contribué à lui faire obtenir la juste considération dont elle jouit de nos jours. Il étoit naturel qu'il desirât d'avoir dans son fils un successeur qui soutînt le nom que sa famille avoit acquis dans la chirurgie. Mais quoique le jeune Morand eût pris pour l'anatomie le goût qu'il seroit difficile qu'un si bon maître & un exemple si glorieux n'eussent pas réussi à lui donner, il préféra l'état de médecin.

Le goût naturel de M. Morand le portoit à cultiver les sciences, mais beauconp moins à en approfondir une en particulier, qu'à les effleurer toutes, & à rassembler sur chacune les faits singuliers ou importans, les observations neuves ou utiles qui s'offroient à sa curiosité, & qu'il cherchoit avec une activité infatigable. En parcourant ses observations

obſervations répandues dans une foule de recueils différens, on eſt également ſurpris de leur nombre & de leur variété. Des analyſes d'eaux minérales, des obſervations ſur la compoſition ou les effets de remèdes nouveaux, & ſur l'utilité de divers inſtrumens de chirurgie ; l'expoſition de pluſieurs maladies extraordinaires obſervées, ſoit dans l'homme, ſoit dans les animaux, & propres à éclairer ſur les ſecrets de l'économie animale ; des remarques ſur quelques phénomènes de botanique ou de météorologie ; l'hiſtoire d'un inſecte, la deſcription d'une mine ou d'une montagne, des obſervations ſur l'altération que différentes ſubſtances ont éprouvée ou dans la terre, ou dans la mer ; des diſſertations ſur des antiquités, & enfin juſqu'à des recherches ſur le lieu de la ſépulture de cet Hermite Pierre, le premier auteur des croiſades, qui doit ſon immortalité à l'honneur funeſte, mais rare pour un particulier, d'avoir été la première cauſe de la mort de pluſieurs millions d'hommes : tel eſt le tableau très-abrégé & très-incomplet de ce qu'offrent les ouvrages épars de M. Morand.

En 1759, il entra dans l'Académie comme adjoint-anatomiſte ; & on trouve dans les Mémoires de la même année, ſa diſſertation ſur la conſtruction intérieure & l'uſage du thymus. Cet organe ſingulier exiſte dans la poitrine du fœtus des animaux vivipares, croît avec eux, & continue même de croître encore dans les premiers temps qui ſuivent la naiſſance ; bientôt après il diminue, s'oblitère & diſparoît preſque en entier. Il exerce donc, dans les premiers temps de la vie, des fonctions qui deviennent enſuite inutiles à la conſervation de l'individu, & n'entrent plus dans l'ordre des loix d'après leſquelles il doit exiſter. Comme les conjectures des anatomiſtes ſur ces fonctions étoient peu ſatisfaiſantes, M. Morand a cru devoir en former de nouvelles ; & il ſuppoſe que, pendant le temps de la geſtation, le thymus ſépare du ſang la partie laiteuſe que lui fournit le placenta. Elle paſſe du thymus dans le canal thorachique, pour prendre enfin la route que ſuit le chyle dans les

animaux adultes. Lorſque l'animal eſt né & qu'il reſpire, ce même organe peut encore ſervir à la ſécrétion d'une partie du ſang, tant que la nouvelle route que prend alors la circulation n'eſt pas aſſez établie, & que le poumon n'exerce pas ſes fonctions d'une manière complète. La poſition du thymus, ſa conſtruction intérieure, la nature des vaiſſeaux qui le parcourent, tout ſemble concourir à rendre vraiſemblable cette opinion de M. Morand; & c'eſt beaucoup en ce genre, où l'ignorance, peut-être à jamais invincible, du premier principe de la vie, ne permet guère de s'élever au-deſſus de la vraiſemblance.

M. Morand s'occupa bientôt après d'un travail d'un autre genre. Il ſe chargea de donner à l'Académie la deſcription de l'art d'exploiter les mines de charbon de terre; minéral dont la nature ſemble avoir tenu en réſerve des maſſes immenſes pour le temps où l'induſtrie des hommes auroit perfectionné tous les arts ſans leſquels ce minéral ſeroit reſté ou inutile ou même inconnu. Cette précaution eſt d'autant plus bienfaiſante, que les progrès des arts accompagnent néceſſairement ceux de l'agriculture, qui ne peut elle-même ſe perfectionner ſans faire diſparoître de la ſurface de la terre les forêts immenſes qui la couvroient. En effet, la diſette de bois dont on ſe plaint déjà depuis long-temps, n'eſt que la ſuite infaillible des progrès de l'agriculture & du commerce. Les forêts doivent diminuer juſqu'à ce que le bois ait acquis le prix naturel qu'il doit avoir relativement aux autres productions, & que ce prix ſoit aſſez fort pour en rendre la culture avantageuſe. Ainſi, les moyens de multiplier les uſages du charbon de terre & de les répandre, ſont devenus un objet important, non pour ménager le bois, mais pour le rendre moins néceſſaire, laiſſer plus de terreins à d'autres productions, & le réſerver pour des uſages dans leſquels il peut être plus difficilement remplacé.

Les travaux de M. Morand, ſur le charbon de terre,

renferment à la fois tout ce que les ſciences peuvent apprendre ſur ſon origine ou ſur ſa nature, & les plus petits détails des travaux néceſſaires pour le tirer de la mine, ou des uſages économiques auxquels il peut être utilement employé. M. Morand prenoit au charbon de terre, aux ouvrages qui en ont traité, aux manufactures qui le conſomment, à tout ce qui a quelque rapport, même éloigné, avec cette ſubſtance, cet intérêt vif, cette eſpèce d'enthouſiaſme que l'objet d'une longue occupation ne manque guère d'inſpirer, dont ceux qui ne le partagent pas ne peuvent s'empêcher de s'étonner, que dans le premier mouvement on ſeroit tenté de trouver ridicule, mais qu'on reſpecte, par réflexion, comme la ſource de preſque tout ce qui ſe fait d'utile.

M. Morand entreprit un grand travail relativement aux états de population, objet important en politique comme en médecine. Il raſſembloit avec ſoin, tous les ans, ce qu'il lui étoit poſſible de recueillir, & il ſe propoſoit de donner chaque dixième année le réſultat de ſes obſervations dans les Mémoires de l'Académie des Sciences; mais il n'a pu exécuter ce projet que pour deux époques, celle de 1770 & celle de 1780. Les recherches de ce genre n'ont encore, parmi nous, ni obtenu toute l'eſtime, ni excité tout l'intérêt qu'elles méritent, ſoit parce que l'art d'en tirer des réſultats eſt encore & peu connu, & peu avancé, ſoit parce qu'elles aſſujettiſſent l'eſprit à une marche trop ſimple & trop régulière, qui conduit à quelques vérités utiles, mais avec beaucoup de travail & très-peu de gloire; au lieu qu'on peut obtenir à peu de frais une renommée plus brillante, en renfermant des demi-vérités ou même des erreurs dans des maximes vagues, mais impoſantes, & en les embelliſſant des formes de l'éloquence.

Quoique M. Morand n'eût preſque jamais pratiqué la Médecine, il n'en étoit pas un membre moins zélé de la Faculté. Il y a ſouvent préſidé à des thèſes, dont quelques-unes avoient pour objets des queſtions curieuſes:

telle eſt celle où il demande ſi les héros produiſent des héros.

Cette queſtion de la reſſemblance des pères aux enfans dans les qualités morales, eſt ſûrement une des plus dignes d'occuper les phyſiciens & les philoſophes; mais il faudroit, pour la réſoudre, avoir raſſemblé un nombre d'obſervations d'autant plus grand, qu'il s'y trouve une ſource particulière d'incertitude à laquelle on ne doit pas ſans doute attacher une importance trop grande, mais qu'il ſeroit imprudent de négliger.

L'humanité, le zèle de M. Morand pour le bien public, ne lui permettoient pas de refuſer ſes ſecours toutes les fois qu'une maladie épidémique ou extraordinaire réclamoit ſon aſſiſtance. Il donnoit ſes ſoins aux malheureux & à quelques amis ; il étoit même le médecin de trois communautés religieuſes, qui, par la confiance qu'elles lui avoient montrée, avoient vaincu ſa répugnance pour la pratique. Cette confiance n'a pas été trompée, ſi on en juge par leurs regrets & par le deſir qu'elles m'ont témoigné de rendre ici en leur nom, à M. Morand, un témoignage public de leur reconnoiſſance.

M. Morand, fils d'un ancien Académicien, étoit né, pour ainſi dire, dans le ſein de cette compagnie; il en avoit connu dès l'enfance le régime intérieur, & il l'aima toujours comme ſa patrie. Sévèrement attaché à la règle, même dans les petites choſes, ennemi des innovations, mais ſans avoir l'humeur qui accompagne preſque toujours cette diſpoſition, & qui en trahit alors le motif, ceux mêmes dont il combattoit les opinions, reſpectoient la ſincérité de ſon zèle & la pureté de ſes intentions. Nous l'avons vu remplir, il y a peu d'années, les fonctions de directeur, avec ce mélange d'amour pour la règle & de condeſcendance pour ſes confrères, que doit réunir le chef annuel d'une compagnie où il ne peut voir que des égaux; tandis qu'il ſavoit ſoutenir les intérêts de ſon corps avec cette dignité modeſte

ſi convenable au repréſentant d'une Académie qui doit toute ſa conſidération à ſon utilité réelle, & au mérite perſonnel de ceux qui la compoſent.

La ſanté de M. Morand paroiſſoit nous promettre de conſerver encore long-temps un confrère qui nous étoit cher; mais il fut attaqué d'une péripneumonie maligne, le 9 août 1784, & il y ſuccomba le 13 du même mois, laiſſant une femme à laquelle il étoit uni par une amitié très-tendre, & dont il ne lui reſtoit pas d'enfans, & un frère, chanoine de la Sainte-Chapelle.

ÉLOGE
DE M. CASSINI.

César-François Cassini de Thury, noble Siennois, maître des comptes, directeur de l'Obſervatoire, de la Société royale de Londres, de l'Inſtitut de Bologne, des Académies de Berlin & de Munich, penſionnaire aſtronome de l'Académie des ſciences, naquit à Paris le 17 Juin 1714, de Jacques Caſſini & de Suſanne-Françoiſe Charpentier de Charmoi.

Quoique la famille de M. Caſſini, connue depuis pluſieurs ſiècles en Italie, fût comptée parmi les familles ſénatoriales de Sienne, dès le temps du cardinal Caſſini, archevêque de cette ville en 1426, & qu'il y ait eu un ſecond cardinal de ce nom dans la promotion de 1712, c'eſt aux ſciences qu'elle doit ſa principale illuſtration. Le nom de Dominique Caſſini ſera long-temps cité parmi ceux dont s'honore un ſiècle fécond en hommes de génie; & ce qui eſt ſans exemple dans notre hiſtoire, M. le comte de Caſſini, notre confrère, fils de M. de Thury, eſt le quatrième académicien en ligne directe de cette famille, qui, depuis 1669, a conſtamment & ſans interruption donné des aſtronomes à l'Académie.

Le nom de Caſſini impoſoit, pour ainſi dire, au jeune Thury l'obligation d'étudier l'aſtronomie, & de ſe rendre digne de ſuccéder à ſon père à l'Obſervatoire comme parmi nous. M. Maraldi voulut ſe charger de diriger les premières études du petit-fils de Dominique Caſſini dont il étoit l'élève & le neveu, ſes ſoins, aidés des heureuſes diſpoſitions de M. de Thury, eurent un ſi heureux ſuccès,

qu'ayant à peine dix ans le jeune Aſtronome calcula les phaſes de l'éclipſe totale de Soleil, qu'on attendoit pour l'année 1727. En 1735, il fut reçu à l'Académie comme adjoint ſurnuméraire à l'âge de vingt-un ans : ſon père y avoit été admis beaucoup plus jeune, à dix-ſept ans ſeulement. On peut croire que dans ces adoptions, en quelque ſorte prématurées, l'Académie avoit compté pour quelque choſe le nom de Caſſini, & que dans l'empire des ſciences, comme ailleurs, une naiſſance illuſtre peut aplanir tous les chemins; mais ſi, dans cette carrière, ce mérite étranger aide quelquefois au talent, du moins il ne peut diſpenſer d'en avoir; & il ſeroit à deſirer qu'on pût en dire autant des avantages que la naiſſance procure dans d'autres états.

Les premiers travaux de M. Caſſini eurent pour objet la vérification de la méridienne qui paſſe par l'Obſervatoire. Il y travailla d'abord avec ſon père, & enſuite avec M. l'abbé de la Caille. Cette méridienne avoit été tracée par Dominique Caſſini; ſon fils & Picard avoient eu part à ce travail, mais les valeurs qu'ils avoient trouvées pour les degrés du méridien en France & pour le degré de longitude pris à Paris, tendoient à faire regarder la terre comme alongée, tandis que les expériences du pendule, la meſure d'un degré de latitude, faite près du pôle, conduiſoient à ſuppoſer à notre globe une forme aplatie, la ſeule qui pût s'accorder avec la théorie Newtonienne. Il paroiſſoit donc néceſſaire de vérifier de nouveau les anciennes meſures, & ſur-tout celle de la baſe, quoiqu'exécutée par Picard, puiſque toutes les autres en dépendoient. M.rs Caſſini s'en chargèrent, y découvrirent une erreur de quelques toiſes; & Jacques Caſſini, après avoir long-temps combattu contre l'aplatiſſement de la terre, eut le mérite d'avoir contribué à détruire la ſeule objection raiſonnable qu'on pût oppoſer à cette opinion.

En même temps que les aſtronomes vérifioient, corrigeoient toutes ces meſures, ils prolongeoient à l'orient & à l'occident de Paris la perpendiculaire à la méridienne,

On avoit aussi formé le projet de faire une description géométrique de la France. Le jeune Cassini s'occupa de ces travaux avec toute l'activité de son âge. Il conçut le plan plus étendu de ne pas borner cette description à la détermination des points des grands triangles qui devoient embrasser toute la surface du royaume, mais de lever le plan topographique de la France entière, de déterminer par ce moyen la distance de tous les lieux à la méridienne de Paris & à la perpendiculaire à cette méridienne. Jamais on n'avoit formé en géographie une entreprise plus vaste & d'une utilité plus générale. C'étoit en effet un préliminaire absolument nécessaire pour parvenir à une connoissance approfondie & détaillée de la France. On ne se bornoit pas à marquer sur la carte tous les objets, même jusqu'à des chaumières isolées ; on devoit y figurer les terreins, autant qu'il étoit possible de le faire, par de simples hachures. Ces cartes, ainsi exécutées, devenoient une espèce de cadre dans lequel toutes les connoissances particulières, tous les détails sur l'élévation des terreins, la pente & la direction des eaux, sur l'histoire naturelle, sur les productions de chaque pays, sur l'étendue des phénomènes de l'atmosphère, sur la population & l'histoire naturelle de l'homme, les limites même des coûtumes, des différentes administrations, des loix de finance ou de commerce, venoient se ranger dans un ordre méthodique qui permettoit d'en mieux saisir l'ensemble, d'en tirer des conclusions plus exactes. Cette base une fois donnée, si on se proposoit d'acquérir une idée générale & exacte de la France, ou d'une de ses provinces, la partie du travail la plus pénible, la plus dispendieuse, devoit se trouver toute préparée.

Une entreprise si utile, mais en même temps si difficile, exigeoit de la part du gouvernement des secours extraordinaires, & M. de Cassini en obtint sans peine.

Le feu Roi qui avoit appris la géographie, dans son enfance, du célèbre Guillaume de l'Isle, avoit conservé pour cette science un goût assez vif : d'ailleurs il n'en est point d'une utilité

utilité plus immédiate dans la plupart des opérations du gouvernement, & dont le besoin se fasse plus sentir à presque tous les instans. Elle a même encore l'avantage, non moins grand, de rendre plus facile l'acquisition de toutes les connoissances qui peuvent être nécessaires aux princes. Mais malgré l'intérêt constant que le Roi prenoit à cette entreprise, M. de Sechelles supprima les fonds que ses prédécesseurs avoient accordés. Le Roi, qui aimoit M. Cassini, voulut se charger de lui annoncer lui-même cette nouvelle fâcheuse. *Sire,* lui dit M. Cassini, *que Votre Majesté daigne dire seulement qu'Elle voit avec peine la suspension de cette entreprise & qu'Elle en desire la continuation, je me charge du reste.* Le Roi y consentit, mais en plaisantant M. Cassini sur l'inutilité de cette marque d'intérêt; car ce prince, après plus de trente ans de règne, ne connoissoit pas encore toute la force de l'influence que l'opinion du monarque a sur les courtisans.

Cependant M. Cassini forma le plan d'une compagnie qui se chargeroit de faire les avances, & qui, devenue propriétaire de l'entreprise, retireroit ses fonds sur la vente des cartes. Le mérite de rendre l'activité à un travail dont le Roi regrettoit la suspension, & l'avantage d'acquérir le droit de lui parler d'un objet qui lui étoit agréable, déterminèrent plusieurs courtisans à entrer dans cette compagnie; quelques citoyens se joignirent à eux dans la vue de contribuer au succès d'un ouvrage utile. L'entreprise se continua sous cette nouvelle forme, avec plus de rapidité & de méthode. Bientôt le gouvernement accorda quelques encouragemens; différentes provinces contribuèrent à la dépense, & M. Cassini a eu la consolation de voir terminer presque entièrement un travail si étendu, & d'en devoir à lui-même presque tout le succès.

Les points des triangles avoient été déterminés avec toute la précision à laquelle les progrès de la physique & ceux de l'art de construire les instrumens permettoient d'atteindre. Mais on avoit été obligé de partager entre un

grand nombre de coopérateurs le travail de lever l'intérieur de ces triangles; & malgré les moyens de vérification que M. Caſſini s'étoit procurés, l'exactitude de toutes les cartes ne pouvoit être la même; les coopérateurs ne pouvoient avoir ni la même intelligence, ni le même zèle. On put s'apercevoir auſſi que, dans la manière de repréſenter la forme des terreins, on n'avoit ni formé un plan général avec aſſez de ſoin, ni exécuté avec aſſez d'attention celui auquel on s'étoit arrêté; mais en convenant de ces défauts, on ne peut s'empêcher d'avouer que cette entrepriſe, la plus vaſte qui ait été tentée en géographie, eſt en même temps celle dont l'exécution a été la plus exacte.

M. Caſſini ne vouloit pas qu'elle fût bornée à la France; il profita de la guerre de 1741, pour étendre ſes cartes à la Flandre, & vérifier la meſure du degré faite par Snellius. C'étoit la première que les occidentaux euſſent oſé tenter; & ce travail, joint à la découverte de la loi de la réfraction, avoit immortaliſé avec juſtice le nom du ſavant Hollandois. Cette meſure étoit cependant très-fautive; l'erreur paroiſſoit de près de deux mille toiſes ſur un degré, & il étoit curieux de ſavoir quelle en avoit pu être la cauſe. M. Caſſini trouva qu'il falloit l'attribuer preſque uniquement à l'erreur qui avoit été commiſe dans la détermination de la différence de latitude des deux points dont Snellius avoit meſuré la diſtance.

Il embraſſa uniquement dans ſa carte de Flandre, le terrein que les armées Françoiſes avoient occupé; & comme il le diſoit lui-même, où s'arrêtèrent les conquètes du Roi, là s'arrêtèrent les opérations de ſon aſtronome. Quelquefois il choiſiſſoit pour ſommet d'un de ſes triangles le clocher, ſoit d'une ville aſſiégée, ſoit d'une place dont on préparoit le ſiége; & cette confiance dans la certitude du ſuccès, étoit une manière de flatter les généraux ou le prince, à laquelle peut-être ils n'étoient pas inſenſibles.

En 1761, M. Caſſini fit un voyage en Allemagne. Il avoit pour objet de prolonger juſqu'à Vienne la perpen-

diculaire à la méridienne de Paris, d'unir les triangles de la carte de France à des points pris en Allemagne, de préparer les moyens d'étendre à ce vaste pays le plan qu'on avoit suivi pour la France, & d'établir ainsi successivement pour toute l'Europe, une uniformité utile en elle-même, & glorieuse pour la nation qui avoit donné l'exemple.

L'empereur François, l'impératrice reine, les princes de la maison de Bavière, les margraves de Bareith & de Bade, les souverains ecclésiastiques de cette partie de l'empire, sentirent tous également l'utilité du projet de M. Cassini, tous s'empressèrent d'y concourir. Il étoit à Vienne, le 6 juin 1761, jour du passage de Vénus; le temps ne lui permit d'en observer que la sortie: cependant le Soleil paroissoit par intervalle, & M. Cassini eut la facilité de faire quelques observations, d'en expliquer l'objet, & d'en développer la méthode à l'archiduc Joseph, qui étoit venu de Laxembourg pour assister à cette observation. M. Cassini se rappeloit avec plaisir, dans ses dernières années, cette circonstance de sa vie. Ce souvenir sembloit lui faire contempler avec un intérêt plus vif les efforts heureux & soutenus de ce prince pour rendre à la patrie les hommes & les biens que d'antiques abus lui avoient enlevés, détruire les obstacles que les préjugés & l'ignorance avoient opposés aux progrès de l'industrie & des lumières, à l'instruction comme au bonheur du peuple, & rétablir les habitans de ses vastes états dans ces droits naturels de l'homme, dont l'intolérance & la tyrannie féodale les avoient privés trop long-temps. Enfin, M. Cassini, toujours occupé de la perfection de son grand ouvrage, profita de la dernière paix pour proposer de joindre à quelques points pris sur la côte d'Angleterre, ceux qui avoient été déterminés sur celle de France, & lier ainsi sa carte générale de ce royaume à la carte des îles Britanniques, de même qu'il l'avoit déjà liée à celles des Pays-bas & de l'Allemagne. Le roi d'Angleterre a bien voulu approuver ce plan.

Si l'on se représente les détails immenses qu'exigeoit la

direction d'une telle entreprise, si on songe aux voyages longs & souvent pénibles, qui se multiplioient d'autant plus pour M. Cassini, qu'il ne s'étoit reposé sur personne des déterminations les plus importantes; si on observe enfin qu'un travail de ce genre, souvent presque purement mécanique & toujours minutieux, fatigue, dégoûte, & semble ne devoir laisser à l'esprit aucune activité pour d'autres travaux, on sera tenté de croire que la direction de la carte de France a dû occuper toute la vie de M. Cassini, & on jugera en même temps qu'en se bornant à ce seul ouvrage, il auroit encore assez bien rempli sa carrière, & mérité la reconnoissance de son pays comme celle des savans. Mais il fut de plus un astronome très-laborieux; & en voyant la liste de ses travaux astronomiques, on sera encore tenté de croire qu'il s'y est appliqué tout entier.

M. Cassini a publié, dans nos Mémoires, une suite presque complète de ces observations que le ciel présente chaque année, dont chacune prise en elle-même est sans doute peu utile aux progrès de la science, & n'exige, pour être bien faite, que de l'attention & l'habitude d'observer, mais dont l'ensemble est nécessaire à la perfection des théories astronomiques, ou peut servir de base à des théories nouvelles; (c'étoit un devoir que lui imposoit le titre de directeur de l'Observatoire).

Il a traité de plus, séparément, plusieurs des questions fondamentales de l'astronomie. L'on trouve dans les Mémoires qu'il a donnés, des recherches sur la parallaxe du Soleil, de la Lune, de Vénus & de Mars; un travail suivi sur les réfractions astronomiques & sur le changement que la température produit dans la quantité ou dans la loi de la réfraction; un grand nombre d'observations sur l'obliquité de l'écliptique, sur la loi des variations qu'elle éprouve; & un examen des différentes méthodes d'observer les hauteurs solsticiales, d'après lequel il préfère celle qui consiste à prendre la distance du Soleil à des étoiles fixes dans lesquelles on ne reconnoît point de mouvement propre qui

puiſſe nuire à l'exactitude des déterminations, ou pour leſquelles la loi de ces mouvemens eſt bien connue. Pendant plus de cinquante ans, il a cultivé l'aſtronomie dans un temps que la meſure des degrés du méridien, deux paſſages de Vénus ſur le Soleil, ſi importans pour nous en apprendre la diſtance, une diſparition de l'anneau de Saturne, l'application du calcul aux perturbations des planètes & aux mouvemens de l'axe terreſtre, l'introduction des méthodes analytiques dans les queſtions aſtronomiques, la découverte de plus de comètes qu'on n'en avoit obſervé depuis l'origine des ſciences, enfin celle d'une nouvelle planète, rendent une des époques les plus brillantes de l'aſtronomie, qui, par l'invention des lunettes acromatiques & de pluſieurs inſtrumens, acquéroit dans le même temps des moyens nouveaux d'étendre les obſervations & de les faire avec plus d'exactitude; & il eſt peu de ces objets ſi intéreſſans pour cette ſcience, ſur leſquels M. Caſſini n'ait été utile par ſes obſervations ou par ſes recherches.

Il étoit d'un caractère franc & ouvert; ſon ame paroiſſoit inacceſſible à la haine; mais il étoit très-ſenſible à l'amitié, & ſon penchant ſembloit le porter de préférence vers les hommes dont il ſe feroit éloigné s'il avoit pu connoître ce ſentiment pénible que la ſupériorité des talens ou de la réputation réveille trop ſouvent. Il jouiſſoit du ſuccès des autres, non avec cette fierté noble d'un homme qui compte ſur ceux qu'il mérite, ou qui a le courage de s'en paſſer, mais par un ſentiment naturel, par l'effet d'un premier mouvement & ſans aucun retour ſur lui-même. L'exiſtence d'un nouveau talent, une nouvelle couronne qu'un de ſes confrères ajoutoit à ſa gloire, étoit pour lui une jouiſſance nouvelle, & le plaiſir naïf & pur qu'il éprouvoit alors, ſe peignoit dans ſes regards & dans ſa contenance.

M. Caſſini eut des liaiſons dans différentes claſſes de la ſociété, & ne fut déplacé dans aucune. Eſtimé des magiſtrats ſes confrères, par ſa probité, il étoit cher à ſes confrères Académiciens par ſa ſimplicité & ſa douceur; quoiqu'admis

dans la familiarité des Grands, il ſut conſerver leur eſtime. On lui a reproché d'avoir trop cherché, peut-être, à s'approcher d'eux. En effet, l'eſpèce de domination qu'ils aiment à exercer ſur les occupations, ſur les ſentimens même de ceux qu'ils nomment leurs amis, ſemble incompatible avec cette liberté & cette indépendance dont la perte enlève au talent la moitié de ſes forces & de ſes reſſources. Plus la raiſon nous a convaincus de l'égalité primitive que la nature a miſe entre les hommes, plus elle nous fait une loi d'éviter l'intimité de ceux que l'opinion a placés au-deſſus de nous. Il eſt d'ailleurs difficile, en formant ces liaiſons, d'échapper au ſoupçon de partager les motifs de vanité ou d'intérêt qui engagent les hommes ordinaires à en braver les inconvéniens & le danger; mais du moins elles n'ont valu à M. Caſſini ni fortune, ni places, ni titres, & cette exception à l'uſage eſt trop rare pour qu'il puiſſe avoir beſoin d'apologie.

On doit ſans doute reſpecter le philoſophe qui ſait éviter ces liaiſons à la fois ſi ſéduiſantes & ſi dangereuſes; cependant, ſi tous ceux qui ont des lumières avoient le courage & la prudence de s'y refuſer, ce ſeroit un malheur & pour les ſciences & pour les grands eux-mêmes, & ſur-tout pour ceux ſur le ſort deſquels les grands ont de l'influence. Il ne faut donc pas blâmer les ſavans qui imiteroient, à cet égard, M. Caſſini, pourvu toutefois qu'ils n'oublient point que pour être exempts de tout reproche, ils doivent imiter auſſi ſon déſintéreſſement & ſa modeſtie.

M. Caſſini étoit né avec une conſtitution très-forte; ſes travaux pour la géographie, l'avoient obligé à des voyages pénibles; graviſſant des montages eſcarpées où il falloit braver, dans une même ſaiſon, tantôt un ſoleil brûlant, tantôt le froid de leurs neiges éternelles, paſſant ſouvent des nuits en plein air ou dans quelques chaumières écartées, obligé de s'y contenter d'une nourriture groſſière ou malſaine, ſon tempérament avoit réſiſté à ces fatigues, & ſem-

bloit avoir acquis de nouvelles forces. Mais il fut attaqué d'une rétention d'urine dont les suites le condamnèrent, les douze dernières années de sa vie, à des incommodités habituelles & douloureuses, souvent même à des souffrances cruelles. Il supporta cet état avec ce courage calme d'une ame forte, unie à des organes vigoureux : son activité, sa douceur, sa gaieté, n'en étoient pas altérées.

Cette disposition de l'ame est un des meilleurs moyens de combattre les maladies & d'y résister ; aussi M. Cassini étoit-il resté dans un état qui laissoit l'espérance de le conserver encore long-temps, lorsqu'au mois d'août 1784, il fut attaqué de la petite vérole, à laquelle il succomba le 4 septembre.

Il a laissé une fille & un fils, M. le comte de Cassini, membre de cette compagnie, & directeur de l'Observatoire, comme ses ancêtres, qui, en recueillant cette partie si noble de leur héritage, a aussi succédé à l'attachement de l'Académie pour un nom si cher aux sciences.

ÉLOGE

DE M. LE COMTE DE MILLY.

NICOLAS-CHRISTIERN DE THY, comte de Milly, des académies de Madrid & de Harlem, aſſocié-libre de celle des Sciences, naquit le 18 juin 1728.

La famille de M. le comte de Milly eſt établie dans le Beaujolois, depuis plus de quatre ſiècles, & la conformité du nom & des armes ſemble prouver qu'elle eſt une branche de l'ancienne maiſon de Thy, originaire de l'Auxois, connue dès le commencement du onzième ſiècle, & également illuſtrée par ſes alliances & par les grandes charges qu'elle a occupées à la cour des ducs de Bourgogne de la première race.

M. le comte de Milly ſuivit, comme ſes ancêtres, le parti des armes. N'ayant qu'une fortune médiocre & point de parens à la cour, il ne pouvoit porter ſes eſpérances au-deſſus de l'avancement tardif & borné que l'on peut attendre du temps & des ſervices; mais il croyoit remplir un devoir. Il avoit peu d'ambition, & il trouvoit des reſſources contre le dégoût & contre l'ennui, dans ſon penchant pour les plaiſirs de la jeuneſſe, & dans un goût plus vif encore pour les études ſérieuſes.

Dans la guerre de 1741, il ſe trouva aux batailles de Laufeld & de Raucoux; & dans la guerre de 1756, à celles de Roſbac, de Crevelt & de Minden. L'année qui ſuivit cette dernière battaille, il entra au ſervice de M. le duc de Wirtemberg, allié de la France; &, en moins d'un an, il devint colonel, adjudant-général, chambellan & chevalier de

l'ordre de l'Aigle-rouge. Mais ce qui fut plus important pour le bonheur du reste de sa vie, la fin de la guerre & le loisir dont jouissent si paisiblement dans les cours ceux que l'intrigue n'y occupe pas, permirent à son amour pour les sciences de se développer & de s'exercer. Le goût des arts & le desir de servir l'humanité le conduisirent à l'étude de la chimie. Lorsqu'il revint dans sa patrie, en 1771, il y rapporta un ouvrage très-détaillé, sur les procédés employés dans la fabrication de la porcelaine de Saxe; & l'Académie jugea cet ouvrage digne d'entrer dans sa collection des arts.

Il obtint, à cette époque, l'agrément d'une charge de lieutenant des gardes-suisses de Monsieur, & le brevet de colonel. Depuis plus de dix ans il avoit mérité & obtenu la croix de Saint-Louis; il se crut permis alors d'abandonner la carrière militaire, pour se livrer uniquement aux sciences, & quelques années après, une place d'associé-libre dans l'Académie fut la récompense de ce dévouement.

On ne doit pas attendre d'un homme qui, depuis quatorze ans jusqu'à plus de quarante, a vécu dans les garnisons, dans les camps & dans les cours; ces grands ouvrages, qui ne peuvent être que le fruit d'un travail constant & suivi, & qui exigent qu'on soit accoutumé dès l'enfance à se rendre maître de son temps, à dominer ses passions & ses goûts, à déployer toutes ses forces. Aussi lorsque M. de Milly a donné ses recherches sur l'activité des dissolvans, auxquels on imprime un mouvement rapide & continu; sur l'application de cette idée aux effets médicinaux des bains; sur l'acidité de l'air fixe, alors peu connue & même contestée; sur la nature du fluide aériforme qui se dégage des pores du corps humain lorsqu'il est plongé dans l'eau; sur l'emploi d'une chaleur graduée &, soutenue dans l'analyse animale & végétale; sur les couleurs que les préparations de platine peuvent fournir à la peinture; enfin sur la revification des chaux métalliques par l'électricité, il eût été injuste de se plaindre qu'il se bornât à présenter de simples essais, &

on a dû applaudir aux vues ingénieuſes ou utiles que ces eſſais renferment.

Nous devons à M. le comte de Milly l'art du poêlier. Cet art eſt proprement celui d'employer toute la chaleur que peut donner une certaine maſſe de combuſtible à échauffer l'air d'un appartement ou d'une maiſon, & d'obtenir dans toutes les parties d'une même pièce une chaleur uniforme que l'on puiſſe graduer facilement.

La néceſſité l'a fait naître dans les pays du Nord, dans les forêts de l'Allemagne. C'eſt-là que M. de Milly l'avoit obſervé, & il avoit ſenti combien on devoit deſirer de le voir ſe répandre & ſe perfectionner dans les climats plus tempérés, y rendre les habitations plus ſaines & plus commodes, & donner en même temps les moyens d'épargner une denrée qui devient d'autant plus précieuſe & plus rare, que les pays ſont & plus peuplés & mieux cultivés. Mais malheureuſement les hommes opulens ont encore plus de vanité que de molleſſe, & préfèrent l'agrément ou la magnificence à la commodité réelle; tandis que ceux qui auroient le plus beſoin d'épargner ſur leur dépenſe, ne ſont pas aſſez riches pour ſonger aux moyens d'être économes.

Ce n'eſt pas que dans ces climats plus doux, la rareté réelle ou apparente des combuſtibles ne ſe ſoit fait ſentir plus d'une fois; mais au lieu de chercher dans la phyſique des moyens, ou de ménager ces ſubſtances, ou d'en augmenter la production, on a cru, par une erreur que l'habitude doit en quelque ſorte rendre excuſable, pouvoir réparer, par des règlemens, un mal dont la multiplicité des règlemens inutiles étoit déjà la principale cauſe.

La chimie n'a été pendant long-temps qu'un recueil de procédés preſque tous ſecrets, ou qui du moins avoient commencé par l'être. Il n'eſt donc pas étonnant que ceux qui cultivent cette ſcience ſoient plus diſpoſés que les autres ſavans à croire qu'il en exiſte encore; à s'occuper de pénétrer ceux qu'on annonce, à donner quelque confiance aux

hommes qui leur promettent de les initier dans ces myſtères. M. le comte de Milly partagea cette foibleſſe avec des chimiſtes très-célèbres. Mais heureuſement ce goût ne lui avoit pas fait perdre celui des recherches vraiment ſcientifiques, c'étoit pour lui une diverſion à des travaux plus ſérieux, un véritable amuſement beaucoup moins frivole que la plupart de ceux auxquels ſe livrent les hommes même qui paſſent pour les plus ſages auprès de la multitude.

M. le Comte de Milly, avide de connoiſſances, & prompt à embraſſer tous les moyens d'en acquérir, avoit voulu être admis dans toutes les ſociétés où il pouvoit eſpérer de trouver quelques lumières, & ſur-tout dans celles qui, faiſant profeſſion d'avoir une doctrine ſecrète, excitent une curioſité plus vive. Il croyoit d'ailleurs ces aſſociations utiles en général pour réunir entr'eux les hommes qui ont ſecoué le joug des préjugés populaires, & qui, s'ils manquent d'un point de réunion, ſont expoſés à ſe trouver ſans force contre les troupes plus ou moins nombreuſes que l'erreur raſſemble ſous cent drapeaux différens.

Il s'étoit attaché particulièrement à cette ſociété, dont l'origine eſt inconnue, ou du moins obſcurcie par des fables, qui, répandue dans l'Europe depuis pluſieurs ſiècles, tantôt ignorée & tantôt l'objet d'une curioſité inquiète, a eſſuyé ſouvent des perſécutions ſans avoir jamais mérité de reproches; qui, en cherchant à cacher le véritable eſprit de ſon inſtitution ſous un langage bizarre, & ſous une foule de cérémonies burleſques, a cependant toujours compté des ſages parmi ſes membres; qui, enfin, ne ſe faiſant connoître au-dehors que par des actions de bienfaiſance, eût mérité peut-être que la calomnie reſpectât ſes myſtères. S'il arrive un jour qu'ils ſoient dévoilés, on n'y trouvera ſans doute que les précautions néceſſaires, dans les ſiècles d'ignorance, à des hommes réunis par le beſoin d'exercer librement leur raiſon. Eh! qui ponrroit encore ſoupçonner l'innocence de ces myſtères, lorſqu'on voit parmi les

noms qu'unissoit cette confraternité, celui de ce jeune prince, le seul qui depuis les temps historiques ait sacrifié sa vie pour l'humanité, tandis que tant d'autres ne l'ont immolée qu'à l'ambition ou à la gloire *?

M. le comte de Milly vivoit dans le monde, & il y étoit aimé; doux, complaisant, facile, ayant même autant de galanterie qu'on peut en avoir sans être frivole, c'étoit seulement dans la société des savans qu'il laissoit apercevoir quelques traces d'une susceptibilité trés-délicate; mais il avoit assez d'empire sur lui même pour revenir sans peine, & soumettre à la raison les foiblesses d'un amour-propre d'autant plus sensible, mais aussi d'autant plus excusable, que, dans le peu de temps qu'il avoit consacré aux sciences, il n'avoit pu acquérir ces titres éclatans qui élèvent au-dessus de l'opinion une ame avide de renommée. Aussi dans la seule discussion qu'il ait eue avec ses confrères, lorsqu'il en vit plusieurs combattre ce qu'il avoit avancé sur la revivification des chaux métalliques par l'électricité, il parut d'abord très-sensible à cette contradiction, mais il ne fit aucun effort pour soutenir son opinion, ne répondit pas aux objections, & laissa tranquillement à d'autres phisiciens le soin de le défendre.

Né avec un tempérament robuste, & s'étant assujetti au régime pithagoricien dans toute sa rigueur, M. le comte de Milly paroissoit devoir se promettre une longue carrière; cependant nous l'avons perdu le 17 Septembre 1784, à l'âge de 56 ans seulement. Il avoit appris ou découvert plusieurs remèdes particuliers; & comme il ne se permettoit pas de les donner à d'autres sans les avoir éprouvés sur lui-même; on a prétendu que ces essais avoit altéré sa constitution. L'enthousiasme qu'il montroit pour ces remèdes, dans les premiers momens, a donné lieu à cette opinion; mais il savoit bientôt les juger de sang-froid, & cette

* Le prince Léopold de Brunswick.

première chaleur n'étoit qu'une preuve de plus de ſa bonne foi & de ſon zèle pour la conſervation des hommes.

Si ceux qui l'ont peu connu étoient tentés de lui faire quelque reproche ſur cet enthouſiaſme, l'eſtime dont il jouiſſoit parmi nous ſuffiroit pour en laver ſa mémoire. On ſait que, depuis ſon inſtitution, l'Académie n'a ceſſé d'oppoſer un zèle infatigable à toutes ces merveilles ſi ſagement couvertes par leurs premiers inventeurs, des voiles du myſtère, & qu'elle a regardé conſtamment le ſoin de s'élever contre elles & d'en détromper le public, comme un de ſes premiers devoirs, comme un moyen de ſervir à la fois les ſciences & l'humanité.

MÉMOIRES

DE

MATHÉMATIQUE

ET

DE PHYSIQUE.

MÉMOIRES

MÉMOIRES DE MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences.

Année M. DCCLXXXIV.

MÉMOIRE Sur les Inégalités séculaires des Planètes & des Satellites.

Par M. DE LA PLACE.

I.

Les Planètes sont assujetties, en vertu de leur action mutuelle, à des inégalités qui troublent l'ellipticité de leurs orbites. Les unes sont périodiques & dépendent de

la poſition de ces corps, ſoit entr'eux, ſoit à l'égard de leurs aphélies; elles ſont peu conſidérables relativement à l'équation du centre, & ſe rétabliſſent d'elles-mêmes, après un petit nombre d'années; les autres altèrent les élémens des orbites par des nuances preſque inſenſibles à chaque révolution des Planètes; mais ces altérations, en s'accumulant ſans ceſſe, finiſſent par changer entièrement la nature & la poſition des orbites: comme la ſuite des ſiècles les rend très-remarquables, on les a nommées *inégalités ſéculaires.*

On peut conſidérer les inégalités périodiques, comme autant d'oſcillations très-petites que fait chaque Planète autour d'un point en mouvement ſur l'ellipſe qu'elle décriroit par l'action ſeule du Soleil; & ſi l'on imagine que les élémens de cette ellipſe ſubiſſent en même-temps des variations très-lentes, & dont les périodes embraſſent un grand nombre de ſiècles, on aura une juſte idée des inégalités ſéculaires.

Parmi ces inégalités, la plus intereſſante eſt celle qui peut altérer les moyens mouvemens des Planètes. La plupart des Aſtronomes ont admis une équation ſéculaire proportionnelle aux carrés des temps, dans les moyens mouvemens de Jupiter & de Saturne. Les Géomètres qui ſe ſont occupés avec le plus de ſuccès de la théorie de ces Planètes, M.rs Euler & de la Grange avoient cru en trouver la cauſe dans l'action mutuelle de ces deux corps; mais leurs réſultats différoient tellement entr'eux, qu'il y avoit lieu d'y ſoupçonner quelque erreur; c'eſt ce qui me détermina à reprendre cette matière, & à la traiter avec tout le ſoin que mérite ſon importance. En portant la préciſion juſqu'aux troiſièmes puiſſances incluſivement des excentricités & des inclinaiſons des orbites, je trouvai que la théorie ne donne aucunes inégalités ſéculaires dans les moyens mouvemens & dans les moyennes diſtances des Planètes au Soleil; d'où je conclus que ces inégalités ſont nulles ou du moins inſenſibles, depuis l'époque des obſervations les plus anciennes juſqu'à nos jours.

Ce réſultat ſuffit aux beſoins de l'Aſtronomie dont les

plus anciennes obſervations qui nous ſoient parvenues avec quelque vraiſemblance, ne remontent pas au-de-là de cinq mille ans. M. de la Grange l'a étendu depuis à un temps illimité, en faiſant voir par une analyſe ingénieuſe & ſimple, que les moyennes diſtances des Planètes au Soleil ſont immuables, & leurs moyens mouvemens uniformes, ce qui eſt également vrai pour les Satellites, puiſqu'ils forment autour de leurs Planètes principales, des ſyſtèmes ſemblables à celui des Planètes autour du Soleil. Ainſi les Planètes & les Satellites conſervent toujours les mèmes diſtances moyennes aux foyers des forces principales qui les animent, du moins lorſque l'on n'a égard qu'à leur action mutuelle, & lorſque l'on ſuppoſe leurs moyens mouvemens incommenſurables entr'eux, comme cela exiſte pour les Planètes de notre ſyſtème.

Il eſt cependant impoſſible de ne pas reconnoître des variations très-ſenſibles dans les révolutions de Jupiter & de Saturne. Si l'on compare entr'elles, les obſervations de ces deux Planètes, faites depuis le renouvellement de l'Aſtronomie; on trouve conſtamment le mouvement de Jupiter plus rapide, & celui de Saturne plus lent, que par la comparaiſon des obſervations modernes avec les anciennes. Halley, dans ſes Tables de Jupiter, emploie une équation ſéculaire, additive au moyen mouvement, proportionnelle au carré du temps, & de $3^d\ 49'$, en deux mille ans. Cela ſuppoſe qu'en comparant les obſervations modernes entr'elles, il a trouvé le mouvement annuel de Jupiter, plus grand de $6'',9$, que par leur comparaiſon avec les anciennes obſervations. Ce grand Aſtronome emploie pareillement dans ſes Tables de Saturne, une équation ſéculaire, ſouſtractive du moyen mouvement, & de $9^d\ 16'$, en deux mille ans; ce qui indique que la comparaiſon des obſervations modernes entr'elles, lui a donné le mouvement annuel de Saturne, moindre de $16'',7$, que celui qui réſulte de leur comparaiſon avec les anciennes. En effet, les oppoſitions de Saturne de 1594, 1595,

1596 & 1597, comparées à celles de 1713, 1714, 1715, 1716 & 1717, donnent un mouvement annuel plus petit de 16", que les oppositions de 1714 & de 1715, comparées à celle de l'an 228 avant notre Ere.

Dans l'impossibilité d'expliquer ces variations par l'action seule des Planètes, je soupçonnai d'abord que l'action des Comètes en étoit la cause ; mais en les considérant ensuite avec attention, leur marche me parut s'accorder si bien avec le résultat de l'action des Planètes, que j'abandonnai cette hypothèse. Une propriété générale de l'action des Planètes entr'elles, est que si l'on n'a égard qu'aux quantités qui ont de très-longues périodes, la somme des masses de chaque Planète, divisées respectivement par les grands axes de leurs orbites, reste toujours à très-peu-près constante; d'où il suit que les carrés des moyens mouvemens étant réciproques aux cubes de ces axes, si le mouvement de Saturne se rallentit par l'action de Jupiter, celui de Jupiter doit s'accélérer par l'action de Saturne, ce qui est conforme à ce que l'on observe. De plus, en supposant avec M. de la Grange, que la masse du Soleil étant l'unité, celle de Jupiter est $\frac{1}{1067,195}$, & celle de Saturne est $\frac{1}{3358,40}$; on trouve que le retardement de Saturne doit être à l'accélération de Jupiter, à très-peu-près, comme 7 est à 3; ainsi l'équation séculaire de Saturne étant supposée de $9^d\ 16'$, celle de Jupiter doit être de $3^d\ 58'$, ce qui ne diffère que de 9 minutes du résultat de Halley. Il est donc fort probable que les variations observées dans les mouvemens de Jupiter & de Saturne, sont un effet de leur action mutuelle ; & puisqu'il est constant que cette action ne peut y produire aucunes inégalités, soit constamment croissantes, soit périodiques, mais d'une période très-longue & indépendante de la situation de ces Planètes, & qu'elle n'y cause que des inégalités dépendantes de leur configuration entre elles ;

il eſt naturel de penſer qu'il exiſte dans leur théorie, une inégalité conſidérable de ce genre, dont la période eſt fort longue, & d'où réſultent ces variations.

En examinant les circonſtances du mouvement de Jupiter & de Saturne, on aperçoit aiſément que leurs moyens mouvemens approchent beaucoup d'être commenſurables, & que cinq fois le moyen mouvement de Saturne eſt à très-peu-près égal à deux fois celui de Jupiter; d'où j'ai conclu que les termes qui, dans les équations différentielles du mouvement de ces Planètes, ont pour argument, cinq fois la longitude moyenne de Saturne, moins deux fois celle de Jupiter, pouvoient devenir ſenſibles par les intégrations; quoique multipliés par les cubes & les produits de trois dimenſions des excentricités & des inclinaiſons des orbites. J'ai regardé conſéquemment ces inégalités, comme une cauſe très-vraiſemblable des variations obſervées dans les mouvemens de Jupiter & de Saturne. La probabilité de cette cauſe & l'importance de cet objet, m'ont déterminé à entreprendre le calcul long & pénible, néceſſaire pour m'en aſſurer. Le réſultat de ce calcul a pleinement confirmé ma conjecture, en me faiſant voir, 1.° qu'il exiſte dans la théorie de Saturne, une grande équation d'environ 47′, dont la période eſt à peu-près de huit cents ſoixante-dix-ſept ans, & dépend de cinq fois le moyen mouvement de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter; 2.° que dans la théorie de Jupiter, il exiſte une équation d'un ſigne contraire, d'environ 20′, & dont la période eſt la même.

Si l'on nomme $n\,t$ le moyen mouvement ſyderal de Jupiter, depuis 1700; $n'\,t$ celui de Saturne: je trouve qu'en n'ayant égard qu'aux inégalités précédentes, la longitude comptée de l'équinoxe de 1700, eſt pour Jupiter

$$n\,t + \epsilon + 20'.\text{ſin.}\,(5\,n'\,t - 2\,n\,t + 49^d\,8'\,40''),$$

& que pour Saturne elle eſt

$$n'\,t + \epsilon' - 46'\,50''.\text{ſin.}\,(5\,n'\,t - 2\,n\,t + 49^d\,8'\,40'').$$

ϵ & ϵ' étant deux conſtantes qui dépendent de la longitude des deux Planètes au commencement de 1700.

J'ai déterminé ces valeurs d'après les élémens des Tables de Halley, & en adoptant les déterminations précédentes des maſſes de Jupiter & de Saturne; j'ai ſeulement augmenté le mouvement annuel de Saturne donné par ces Tables, de 16",7, & j'ai diminué celui de Jupiter de 6",9, pour ramener ces mouvemens à ceux que Halley auroit trouvés par la comparaiſon des obſervations modernes avec les anciennes. Les coéfficiens numériques de ces valeurs ceſſent d'avoir lieu après un temps conſidérable, à cauſe de la variabilité des élémens des orbites; mais ils peuvent ſervir ſans erreur ſenſible depuis Tycho juſqu'à nous, ce qui ſuffit pour la comparaiſon des obſervations modernes: il eſt facile d'ailleurs de les étendre à un temps quelconque. On peut obſerver que le coéfficient relatif au mouvement de Jupiter, a un ſigne contraire à celui du coéfficient de Saturne, & qu'il eſt à ce dernier, à très-peu-près, dans le rapport de 3 à 7.

Si l'on compare les formules précédentes aux obſervations, on trouve entre les unes & les autres un accord très-ſatisfaiſant, & qui fournit une nouvelle preuve de l'admirable théorie de la peſanteur univerſelle. Ainſi, par exemple, l'oppoſition de Saturne de l'an 228 avant notre Ere, comparée à celles de 1714 & de 1715, doit donner, à peu-près, le moyen mouvement de Saturne, parce que l'inégalité précédente eſt peu ſenſible dans le grand intervalle qui ſépare ces oppoſitions; mais en comparant l'oppoſition de 1595 avec celle de 1715, le mouvement annuel de Saturne doit, ſuivant nos formules, paroître plus petit que le véritable, de 16",8; les obſervations donnent 16"; l'imperfection des obſervations du ſeizième ſiècle ne permet pas un plus parfait accord. Le mouvement annuel de Saturne doit donc paroître maintenant ſe ralentir de 16 à 17"; & comme, par les formules précédentes, l'accélération apparente de Jupiter eſt au ralentiſſement apparent de Saturne, dans le rapport de 3 à 7;

ſe mouvement annuel de Jupiter doit paroître s'accélérer d'environ 7″, ce qui eſt entièrement conforme aux déterminations de Halley. Ces deux Phénomènes ont été à leur *maximum* vers 1580; depuis cette époque, les moyens mouvemens apparens ſe ſont rapprochés ſans ceſſe, des véritables moyens mouvemens.

M. Lambert a publié dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1773, un travail intéreſſant ſur les inégalités de Jupiter & de Saturne. Il a cherché à déterminer empyriquement la loi des erreurs des Tables de Hallei, & il a trouvé qu'il falloit corriger les moyens mouvemens des Tables de Saturne, en leur ajoutant, à partir de 1640, une équation ſéculaire proportionnelle au carré des temps, & de 6′,5 pour le premier ſiècle; & comme Hallei emploie pour cette Planète, une équation ſéculaire ſouſtractive du moyen mouvement, & de 1′,4 pour le premier ſiècle; il eſt clair que la correction de M. Lambert revient à ajouter depuis 1640, au moyen mouvement de Saturne, ſuppoſé uniforme, une équation ſéculaire de 5′,1 pour le premier ſiècle. Cet illuſtre Géomètre applique pareillement aux mouvemens des Tables de Jupiter, une équation ſéculaire ſouſtractive, & de 3′,2 pour le premier ſiècle, à partir de 1657. Ces corrections ont été publiées dans le ſecond volume du recueil des Tables aſtronomiques de l'Académie de Berlin: elles ont une marche contraire à celle des équations ſéculaires de Halley, & d'ailleurs elles ſont incompatibles avec les obſervations anciennes; mais les Savans Éditeurs de ces Tables, obſervent « que ſelon toute apparence, l'équation empyrique de M. Lambert n'augmente pas toujours dans « le rapport des carrés des temps; car il ſemble qu'elle « varie, que ces variations ſont périodiques & qu'il faudra « une longue ſuite d'années pour en découvrir la loi; par « conſéquent cette équation ne ſervira pour les temps à venir, « que juſqu'à ce qu'on puiſſe déterminer par les obſervations « qu'on fera dans la ſuite, quelle eſt ſa propriété ».

Si l'on tranſporte à l'époque de 1640, la formule

précédente relative à Saturne, & que l'on en réduise le sinus dans une suite ordonnée par rapport aux puissances du temps écoulé depuis cette époque: on trouve que le terme proportionnel au carré du temps est positif & de 5',0 pour le premier siècle, ce qui s'accorde quant au signe, avec le résultat de M. Lambert, & ce qui n'en diffère que de 0',1 pour la quantité. La formule relative à Jupiter, transportée à l'époque de 1657, & réduite en série, donne pour le terme proportionnel au carré du temps, une quantité négative & de 2',7 pour le premier siècle, ce qui s'accorde quant au signe, avec le résultat de M. Lambert, & ce qui n'en diffère que de 0',5 pour la quantité. Il n'est donc pas douteux que la vraie loi de l'équation empyrique de cet Auteur, ne soit renfermée dans nos formules, & il est assez remarquable qu'il ait approché aussi près des résultats de la théorie, par la comparaison seule de cent douze ans d'observations. Au reste la réduction des sinus en série, en rejetant les puissances du temps supérieures au carré, ne peut être employée que dans un intervalle de soixante ans.

Les expressions de la longitude de Jupiter & de Saturne, renferment encore des termes très-sensibles, qui coincideroient avec les termes dûs au mouvement elliptique, si l'on avoit exactement $5\,n' = 2\,n$.

Ces termes sont pour Jupiter

$$2' \, 39''.\text{sin.}\,(3\,n\,t - 5\,n'\,t - 41^d\,56') + 58''.\text{sin.}\,(5\,n'\,t - n\,t - 34^d\,31'\,33''),$$

& pour Saturne,

$$- 13'\,16''.\text{sin.}\,(2\,n\,t - 4\,n'\,t - 2^d\,27'\,4'') - 2'\,40''.\text{sin.}\,(6\,n'\,t - 2\,n\,t - 60^d\,30'\,16'').$$

On peut les considérer comme le résultat de variations dans les excentricités des orbites & dans la position des absides, & dont la période est de huit cens soixante-dix-sept ans. Ils expliquent pourquoi dans le dernier siècle & dans celui-ci, l'accroissement de l'équation du centre de Jupiter

Jupiter, la diminution de celle de Saturne, & les mouvemens de leurs aphélies ont paru plus grands qu'ils n'ont dû l'être en vertu des ſeules inégalités ſéculaires.

Pour avoir la longitude vraie de Jupiter & de Saturne, il faut ajouter aux termes précédens, ceux qui appartiennent au mouvement elliptique, & ceux que produiſent les perturbations, en ayant égard aux premières puiſſances des excentricités des orbites. Les Géomètres ont déjà conſidéré ces derniers termes; mais les différences que préſentent leurs réſultats, en rend la vérification indiſpenſable. J'ai rempli cet objet dans une nouvelle théorie de ces deux Planètes, qui paroîtra dans le volume ſuivant de ces Mémoires. Il réſulte de cette théorie, que toutes les oppoſitions anciennes & modernes de Jupiter & de Saturne, peuvent être repréſentées avec la préciſion dont elles ſont ſuſceptibles, au moyen des inégalités précédentes auxquelles il faut par conſéquent attribuer les dérangemens ſinguliers obſervés dans le mouvement de Saturne, & dont on ignoroit les loix & la cauſe. Il auroit fallu pluſieurs ſiècles d'obſervations ſuivies, pour déterminer empyriquement ces inégalités, à cauſe de la longueur de leur période; ainſi ſur ce point, la théorie de la peſanteur a devancé l'obſervation.

Je reviens préſentement à la Loi générale de l'uniformité des moyens mouvemens céleſtes. Ceux des trois premiers Satellites de Jupiter offrent un rapport remarquable, & qui peut donner lieu de craindre que cette loi ne ſoit pas obſervée à leur égard. La diſcuſſion de ce rapport, de la cauſe qui le produit, & de ſon influence ſur les mouvemens des Satellites, m'a paru mériter l'attention des Géomètres & des Aſtronomes.

Les obſervations nous aprennent que le moyen mouvement du premier ſatellite de Jupiter, eſt environ deux fois plus grand que celui du ſecond, qui lui-même eſt à-peu-près le double de celui du troiſième ſatellite; & la théorie de la peſanteur univerſelle fait voir que ces rapports ſont la ſource des principales inégalités de ces Aſtres. Il ſuit

de-là que la différence des moyens mouvemens du premier & du second Satellite, est égale à deux fois la différence des moyens mouvemens du second & du troisième; mais ce rapport est incomparablement plus exact que les précédens, & les moyens mouvemens des Tables en approchent tellement, qu'il faut un très-long intervalle pour que la petite quantité dont elles s'en éloignent, puisse devenir sensible. De-là naissent plusieurs phénomènes constans dans la configuration des trois premiers Satellites; tel est, entr'autres, l'impossibilité de les voir s'éclipser à la fois, d'ici à un grand nombre de siècles, & si l'on part des moyens mouvemens & des époques que M. Wargentin a employées dans ses Tables, on trouve que cela ne peut arriver qu'après 1,317,900 ans *(Mémoires d'Upsal, année 1743, page 41)*. Une différence de six tierces dans le mouvement annuel du second Satellite, suffiroit pour rendre ce phénomène à jamais impossible, & M. Wargentin ne répond qu'à une ou deux secondes près, des mouvemens annuels dont il a fait usage.

Maintenant on peut établir comme une règle générale, que si le résultat d'une longue suite d'observations précises, approche d'un rapport simple, de manière que la différence soit inappréciable par les observations, & puisse être attribuée aux erreurs dont elles sont susceptibles; ce rapport est probablement celui de la Nature. Ainsi les observations n'ayant fait apercevoir aucune différence entre les moyens mouvemens de révolution de la Lune sur elle-même & autour de la Terre, on est fondé à supposer que ces deux mouvemens sont rigoureusement les mêmes. En appliquant cette règle aux mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, nous pouvons en conclure avec une grande probabilité, que la différence des moyens mouvemens du premier & du second, est exactement égale au double de la différence des moyens mouvemens du second & du troisième. Cette égalité n'est pas l'effet du hasard, & il est contre toute vraisemblance de supposer que ces trois corps

ont été placés primitivement aux diſtances qu'elle exige ; il eſt donc naturel de penſer que leur attraction mutuelle en eſt la véritable cauſe. C'eſt ainſi que l'action de la Terre ſur la Lune, établit entre les moyens mouvemens de rotation & de révolution de ce Satellite, une égalité rigoureuſe ; quoiqu'à l'origine ces deux mouvemens aient pu différer entr'eux. Je me propoſe dans ce Mémoire, de diſcuter ce point important du ſyſtème du monde, & d'examiner ſi le rapport que préſentent les moyens mouvemens des trois premiers ſatellites de Jupiter, doit ſe maintenir ſans ceſſe en vertu des Loix de la peſanteur univerſelle. Cette recherche eſt très-intéreſſante pour la théorie du ſecond Satellite ; les principales inégalités qu'il éprouve, dépendent des actions du premier & du troiſième ; mais le rapport précédent donne à ces inégalités la même période, & les fond en une ſeule qui, dans les Tables, forme la grande équation de ce Satellite ; ſi ce rapport n'étoit pas rigoureux, ces deux inégalités ſe ſépareroient dans la ſuite des ſiècles, & les Tables du ſecond Satellite ceſſeroient de repréſenter ſon mouvement. Voici maintenant ce qui réſulte de mon analyſe.

J'obſerve d'abord que les termes proportionnels aux premières puiſſances des maſſes perturbatrices, ne pouvant pas donner l'explication du rapport dont je viens de parler, il faut la chercher dans les termes qui dépendent des carrés & des produits de ces maſſes ; je diſcute en conſéquence les termes de cet ordre qui peuvent produire ce rapport. En nommant t le temps, $n\,t$, $n'\,t$, $n''\,t$, les moyens mouvemens du premier, du ſecond & du troiſième Satellite ; en déſignant par s, la quantité $n - 3\,n' + 2\,n''$, & par V, la longitude moyenne du premier Satellite, comptée d'un point fixe ſur l'orbite de Jupiter, moins trois fois celle du ſecond, plus deux fois celle du troiſième ; je trouve que les termes multipliés par les produits deux à deux, des maſſes de ces Satellites, introduiſent dans les valeurs de s & de V, des quantités proportionnelles au temps. En les

faiſant enſuite diſparoître par la méthode que j'ai donnée ailleurs pour cet objet, je parviens à deux équations différentielles du premier ordre entre s, V & t. Leurs intégrales comparées aux obſervations, donnent une explication complète du phénomène dont il s'agit, & préſentent en même-temps pluſieurs conſéquences intéreſſantes.

La première eſt que s & V ſont des quantités périodiques, & qu'ainſi en faiſant abſtraction des quantités de cette nature, on a rigoureuſement $n + 2\,n'' = 3\,n'$. On eſt donc aſſuré par-là que la différence des moyens mouvemens du premier & du ſecond Sattellite, eſt rigoureuſement égale à deux fois la différence des moyens mouvemens du ſecond & du troiſième. C'eſt une condition à laquelle les moyens mouvemens des Tables doivent ſatisfaire, & comme ceux dont M. Wargentin a fait uſage, la rempliſſent à très-peu-près, on doit en conclure qu'ils ſont fort approchés, & qu'ils n'ont beſoin que de très-légères corrections.

La ſeconde conſéquence eſt que la condition précédente n'exige point qu'à l'origine, les trois Satellites aient été exactement placés aux diſtances reſpectives qui, par les loix de Képler, donnent l'équation $n + 2\,n'' = 3\,n'$; il ſuffit qu'ils en aient été peu éloignés, & alors leur attraction mutuelle établit entre leurs moyens mouvemens, cette égalité rigoureuſe.

Une troiſième conſéquence eſt que l'on ne doit point craindre que dans la ſuite des ſiècles, les Tables du ſecond Satellite ceſſent d'être exactes, du moins relativement à leur équation principale.

Enfin, la quatrième conſéquence que je tire de mon analyſe, eſt que ſi l'on fait abſtraction des quantités périodiques, l'angle V eſt de ſix ſignes; c'eſt-à-dire, que la longitude moyenne du premier Satellite, moins trois fois celle du ſecond, plus deux fois celle du troiſième, eſt égale à 180^d; c'eſt une nouvelle condition que les Tables doivent remplir exactement. Celles de M. Wargentin donnent au commencement de 1760, $V = 180^d + 30'$, ce qui

s'éloigne peu de 180^d; ſuivant les Tables de M. Bailli, la valeur moyenne de *V* ne s'en éloignoit que de 12' à la même époque; ces écarts ſont une imperfection des Tables, & doivent être comptés parmi les cauſes des erreurs dont elles ſont encore ſuſceptibles.

L'angle *V* eſt ſoumis à une inégalité périodique analogue aux oſcillations d'un pendule; elle affecte inégalement les mouvemens des trois Satellites, ſuivant des rapports dépendans de leurs maſſes & de leurs diſtances au centre de Jupiter; la durée de ſa période dépend des mêmes quantités. La maſſe du ſecond Satellite eſt aſſez bien déterminée par les inégalités qu'elle produit dans le mouvement du premier; mais les maſſes du premier & du troiſième Satellite ſont encore inconnues : il exiſte ſeulement entr'elles un rapport que donnent les inégalités du ſecond Satellite, & c'eſt par ſon moyen que j'ai trouvé que le temps de la libration de *V* eſt compris entre quatre ans un huitième & onze ans un tiers. L'inſtant où cette libration eſt nulle & ſon étendue ſont des arbitraires que l'obſervation peut ſeule déterminer. Si l'on ne conſidère que l'action des trois premiers ſatellites de Jupiter, leur mouvement dépend de neuf équations différentielles du ſecond ordre, dont les intégrales finies renferment dix-huit conſtantes arbitraires. Les excentricités & les inclinaiſons des orbites, les poſitions des nœuds & des aphélies déterminent douze de ces conſtantes; les moyens mouvemens & leurs époques formeroient les ſix autres, ſans les deux conditions auxquelles ces ſix arbitraires ſont aſſujetties, & qui les réduiſent à quatre : c'eſt pour y ſuppléer que l'expreſſion de *V* renferme deux arbitraires.

Puiſque les Tables repréſentent aſſez bien les obſervations, ſans avoir égard à l'inégalité précédente, elle doit être peu conſidérable; mais l'incertitude qui règne encore ſur la plupart des élémens de la théorie des ſatellites de Jupiter, rend ſa détermination très-difficile. C'eſt un point que je laiſſe à diſcuter aux Aſtronomes; il me ſuffit ici de leur indiquer cette inégalité, comme un objet digne de

leur attention, & d'établir que les moyens mouvemens & les époques des Tables doivent remplir exactement les deux conditions suivantes :

1.° Le moyen mouvement du premier Satellite, plus deux fois celui du troisième, est égal à trois fois celui du second.

2.° La longitude moyenne du premier Satellite, moins trois fois celle du second, plus deux fois celle du troisième, est constamment égale à 180d.

Ces conditions subsisteroient encore, en supposant dans les moyens mouvemens des Satellites, des accélérations semblables à celle que les observations paroissent indiquer dans le moyen mouvement de la Lune. L'action mutuelle des trois premiers Satellites les maintiendroit sans cesse, en sorte que le système de ces corps, en descendant insensiblement vers Jupiter, en vertu de ces accélérations, conserveroit toujours les rapports nécessaires à l'existence des conditions précédentes. Ainsi l'action de la Terre sur la Lune maintient l'égalité rigoureuse des deux mouvemens de rotation & de révolution de ce Satellite, malgré l'accélération continuelle du second de ces deux mouvemens; parce que le premier devient en même raison plus rapide. De-là résulte cette conséquence, savoir, que si pour mieux représenter les observations, on admet une équation séculaire dans le moyen mouvement de l'un des trois premiers Satellites de Jupiter, ainsi que M. Bailli l'a fait dans ses Tables du premier Satellite; il faut en supposer de semblables dans les moyens mouvemens des deux autres, & les ordonner de manière que l'équation du premier, plus deux fois celle du troisième, soit égale à trois fois l'équation du second Satellite.

On voit, par ce que nous venons de dire, que l'action mutuelle des satellites de Jupiter ne produit dans leurs mouvemens, que des inégalités périodiques; & nous pouvons généralement en conclure que si l'on n'a égard qu'aux loix de la gravitation universelle, les moyennes distances des corps célestes aux foyers de leurs forces principales, sont immuables. Il n'en est pas ainsi des autres élémens de

leurs orbites : on ſait que leurs excentricités, leurs inclinaiſons, les poſitions de leurs nœuds & de leurs aphélies varient ſans ceſſe ; & il exiſte des méthodes fort ſimples pour déterminer ces variations, en ſuppoſant les orbites peu excentriques & peu inclinées les unes aux autres. Mais les excentricités & les inclinaiſons ſont-elles renfermées conſtamment dans d'étroites limites ? C'eſt un point important du Syſtème du Monde qui reſte encore à éclaircir, & dont la diſcuſſion eſt la ſeule choſe que laiſſe maintenant à deſirer, la théorie des inégalités ſéculaires. J'ai prouvé dans la ſeconde partie de nos Mémoires pour l'année 1772, que ſi l'on ne conſidère que l'action de deux Planètes, les excentricités & les inclinaiſons de leurs orbites ſont toujours très-petites ; & M. de la Grange a fait voir daus les Mémoires de Berlin, pour l'année 1782, que cela eſt également vrai pour les orbites des Planètes de notre Syſtème, en partant des ſuppoſitions les plus vraiſemblables ſur leurs maſſes. Cependant l'incertitude où l'on eſt encore à l'égard de pluſieurs de ces maſſes, peut laiſſer quelques doutes ſur ce réſultat, & il eſt néceſſaire de s'aſſurer par une méthode indépendante de toute hypothèſe, qu'en vertu de l'action mutuelle des Planètes, les excentricités & les inclinaiſons de leurs orbites ſont toujours peu conſidérables. Je me propoſe encore de remplir cet objet dans ce Mémoire, en établiſſant d'une manière générale, que les inégalités ſéculaires des excentricités & des inclinaiſons des orbites des Planètes, ne renferment ni arcs-de-cercle, ni exponentielles ; d'où il ſuit qu'en vertu de l'action de ces corps, leurs orbites s'aplatiſſent plus ou moins, mais en ne s'écartant que très-peu de la forme circulaire, & en conſervant toujours les mêmes grands axes ; les poſitions reſpectives de leurs plans & de leurs aphélies varient ſans ceſſe, elles s'inclinent plus ou moins les unes aux autres, mais elles ſont toujours renfermées dans une zône d'un petit nombre de degrés.

I I.

Équations générales du mouvement d'un ſyſtème de Corps qui s'attirent mutuellement.

CONSIDÉRONS le mouvement d'un ſyſtème de corps m, m^{I}, m^{II}, &c. autour d'un corps M dont nous prendrons la maſſe pour unité de maſſe. Soient x, y, z, les trois coordonnées rectangles de m, & r, ſa diſtance à M, ou ſon rayon vecteur, l'origine des coordonnées étant au centre de M. Marquons d'un trait, de deux traits, &c, les mêmes lettres relatives à m^{I}, m^{II}, &c. & nommons λ, la fonction

$$\frac{m.m^{\text{I}}}{\sqrt{[(x^{\text{I}}-x)^2+(y^{\text{I}}-y)^2+(z^{\text{I}}-z)^2]}}$$

$$+\frac{m.m^{\text{II}}}{\sqrt{[(x^{\text{II}}-x)^2+(y^{\text{II}}-y)^2+(z^{\text{II}}-z)^2]}}+\frac{m^{\text{I}}.m^{\text{II}}}{\sqrt{[(x^{\text{II}}-x^{\text{I}})^2+(y^{\text{II}}-y^{\text{I}})^2+(z^{\text{II}}-z^{\text{I}})^2]}}$$

$$+\ \&c.$$

cette fonction étant la ſomme des produits des maſſes m, m^{I} m^{II}, &c. priſes deux à deux, diviſés par les diſtances mutuelles de ces maſſes; cela poſé :

Si l'on tranſporte en ſens contraire, au corps m, la force dont M eſt animé par l'action du ſyſtème ; on trouvera facilement que dans ſon mouvement relatif autour de M, il ſera animé parallèlement aux axes des x, des y, & des z, par les trois forces ſuivantes

$$-\frac{(1+m).x}{r^3}-\frac{m^{\text{I}}.x^{\text{I}}}{r^{\text{I}\,3}}-\frac{m^{\text{II}}.x^{\text{II}}}{r^{\text{II}\,3}}-\&c.+\frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right);$$

$$-\frac{(1+m).y}{r^3}-\frac{m^{\text{I}}.y^{\text{I}}}{r^{\text{I}\,3}}-\frac{m^{\text{II}}.y^{\text{II}}}{r^{\text{II}\,3}}-\&c.+\frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right);$$

$$-\frac{(1+m).z}{r^3}-\frac{m^{\text{I}}.z^{\text{I}}}{r^{\text{I}\,3}}-\frac{m^{\text{II}}.z^{\text{II}}}{r^{\text{II}\,3}}-\&c.+\frac{1}{m}.\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right).$$

Ces trois forces tendent à augmenter les coordonnées x,

x, y, z; en désignant donc par ∂t, l'élément du temps, supposé constant, on aura par les principes connus de Dynamique, les trois équations différentielles

$$0 = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2} + \frac{(1 + m).x}{r^3} + \frac{m^{\prime}.x^{\prime}}{r^{\prime 3}} + \&c. - \frac{1}{m} . \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right); (1)$$

$$0 = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2} + \frac{(1 + m).y}{r^3} + \frac{m^{\prime}.y^{\prime}}{r^{\prime 3}} + \&c. - \frac{1}{m} . \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right); (2)$$

$$0 = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2} + \frac{(1 + m).z}{r^3} + \frac{m^{\prime}.z^{\prime}}{r^{\prime 3}} + \&c. - \frac{1}{m} . \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right); (3)$$

En changeant successivement dans ces équations, m, x, y, z, r, dans $m^{\prime}, x^{\prime}, y^{\prime}, z^{\prime}, r^{\prime}$; $m^{\prime\prime}, x^{\prime\prime}, y^{\prime\prime}, z^{\prime\prime}, r^{\prime\prime}$, &c, & réciproquement; on aura les équations différentielles relatives à $m^{\prime}$, $m^{\prime\prime}$, &c.

I I I.

Si l'on multiplie l'équation (1) par

$$2\, m\, \partial x - \frac{2\, m.(m \partial x + m^{\prime} \partial x^{\prime} + \&c.)}{1 + m + m^{\prime} + \&c.},$$

l'équation (2) par

$$2\, m\, \partial y - \frac{2\, m.(m \partial y + m^{\prime} \partial y^{\prime} + \&c.)}{1 + m + m^{\prime} + \&c.},$$

& l'équation (3) par

$$2\, m\, \partial z - \frac{2\, m.(m \partial z + m^{\prime} \partial z^{\prime} + \&c.)}{1 + m + m^{\prime} + \&c.};$$

si l'on multiplie pareillement la première des équations différentielles relatives à $m^{\prime}$, par

$$2\, m^{\prime}\, \partial x^{\prime} - \frac{2\, m^{\prime}.(m \partial x + m^{\prime} \partial x^{\prime} + \&c.)}{1 + m + m^{\prime} + \&c.},$$

la seconde par

$$2\, m^{\prime}\, \partial y^{\prime} - \frac{2\, m^{\prime}.(m \partial y + m^{\prime} \partial y^{\prime} + \&c.)}{1 + m + m^{\prime} + \&c.},$$

& la troisième par

$$2\,m'\,\partial z' - \frac{2\,m'.(m\partial z + m'\partial z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.},$$

& ainsi du reste ; si l'on ajoute ensuite toutes ces équations, & si l'on observe que

$$0 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x'}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x''}\right) + \&c;$$

$$0 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y'}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y''}\right) + \&c;$$

$$0 = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z'}\right) + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z''}\right) + \&c;$$

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)};$$

$$r' = \sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)};$$

&c.

on formera l'équation suivante,

$$\begin{aligned}0 = 2\,m.\frac{(\partial x.\partial\partial x + \partial y.\partial\partial y + \partial z.\partial\partial z)}{\partial t^2} + 2\,m'.\frac{(\partial x'.\partial\partial x' + \partial y'.\partial\partial y' + \partial z'.\partial\partial z')}{\partial t^2} + \&c.\\
- 2.\frac{(m\partial x + m'\partial x' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial\partial x + m'\partial\partial x' + \&c.)}{\partial t^2}\\
- 2.\frac{(m\partial y + m'\partial y' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial\partial y + m'\partial\partial y' + \&c.)}{\partial t^2}\\
- 2.\frac{(m\partial z + m'\partial z' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.}.\frac{(m\partial\partial z + m'\partial\partial z' + \&c.)}{\partial t^2}\\
+ 2.\left(\frac{m\partial r}{r^2} + \frac{m'\partial r'}{r'^2} + \&c.\right) - 2\,\partial\lambda.\end{aligned}$$

Cette équation donne, en l'intégrant,

$$\left.\begin{aligned}0 = f + m.\frac{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}{\partial t^2} + m'.\frac{(\partial x'^2 + \partial y'^2 + \partial z'^2)}{\partial t^2} + \&c.\\
- \frac{(m\partial x + m'\partial x'\ \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2} - \frac{(m\partial y + m'\partial y' + \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2}\\
- \frac{(m\partial z + m'\partial z' + \&c.)^2}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2} - 2.\left(\frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} + \&c.\right) - 2\lambda\end{aligned}\right\};\ (4)$$

f étant une constante arbitraire.

On peut encore obtenir trois intégrales des équations différentielles du mouvement du ſyſtème, de la maniere ſuivante.

Si l'on multiplie l'équation (1) par

$$-my + \frac{m.(my + m^1y^1 + \&c.)}{1 + m + m^1 + \&c.},$$

& l'équation (2) par

$$mx - \frac{m.(mx + m^1x^1 + \&c.)}{1 + m + m^1 + \&c.};$$

ſi l'on multiplie pareillement, la première des équations relatives à m^1, par

$$-m^1y^1 + \frac{m^1.(my + m^1y^1 + \&c.)}{1 + m + m^1 + \&c.},$$

& la ſeconde par

$$m^1x^1 - \frac{m^1.(mx + m^1x^1 + \&c.)}{1 + m + m^1 + \&c.};$$

& ainſi du reſte; ſi l'on ajoute enſuite toutes ces équations, en obſervant que

$$0 = x\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) - y\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) + x^1\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y^1}\right) - y^1\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\right) + \&c.$$

$$0 = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^1}\right) + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y^1}\right) + \&c.$$

on aura

$$0 = m.\frac{(x\partial\partial y - y\partial\partial x)}{\partial t^2} + m^1.\frac{(x^1\partial\partial y^1 - y^1\partial\partial x^1)}{\partial t^2} + \&c.$$

$$-\frac{(mx + m^1x^1 + \&c.)}{1 + m + m^1 + \&c.}.\frac{(m\partial\partial y + m^1\partial\partial y^1 + \&c.)}{\partial t^2}$$

$$+\frac{(my + m^1y^1 + \&c.)}{1 + m + m^1 + \&c.}.\frac{(m\partial\partial x + m^1\partial\partial x^1 + \&c.)}{\partial t^2};$$

équation dont l'intégrale eſt

$$\left.\begin{aligned} c = m.\frac{(x\partial y - y\partial x)}{\partial t} + m^{\text{I}}.\frac{(x^{\text{I}}\partial y^{\text{I}} - y^{\text{I}}\partial x^{\text{I}})}{\partial t} + \&c. \\ - \frac{(mx + m^{\text{I}}x^{\text{I}} + \&c.)}{1 + m + m^{\text{I}} + \&c.}.\frac{(m\partial y + m^{\text{I}}\partial y^{\text{I}} + \&c.)}{\partial t} \\ + \frac{(my + m^{\text{I}}y^{\text{I}} + \&c.)}{1 + m + m^{\text{I}} + \&c.}.\frac{(m\partial x + m^{\text{I}}\partial x^{\text{I}} + \&c.)}{\partial t} \end{aligned}\right\}; \quad (5)$$

c étant une conſtante arbitraire.

On parviendra de la même maniere aux deux intégrales ſuivantes,

$$\left.\begin{aligned} c^{\text{I}} = m.\frac{(x\partial z - z\partial x)}{\partial t} + m^{\text{I}}.\frac{(x^{\text{I}}\partial z^{\text{I}} - z^{\text{I}}\partial x^{\text{I}})}{\partial t} + \&c. \\ - \frac{(mx + m^{\text{I}}x^{\text{I}} + \&c.)}{1 + m + m^{\text{I}} + \&c.}.\frac{(m\partial z + m^{\text{I}}\partial z^{\text{I}} + \&c.)}{\partial t} \\ + \frac{(mz + m^{\text{I}}z^{\text{I}} + \&c.)}{1 + m + m^{\text{I}} + \&c.}.\frac{(m\partial x + m^{\text{I}}\partial x^{\text{I}} + \&c.)}{\partial t} \end{aligned}\right\}; \quad (6)$$

$$\left.\begin{aligned} c^{\text{II}} = m.\frac{(y\partial z - z\partial y)}{\partial t} + m^{\text{I}}.\frac{(y^{\text{I}}\partial z^{\text{I}} - z^{\text{I}}\partial y^{\text{I}})}{\partial t} + \&c. \\ - \frac{(my + m^{\text{I}}y^{\text{I}} + \&c.)}{1 + m + m^{\text{I}} + \&c.}.\frac{(m\partial z + m^{\text{I}}\partial z^{\text{I}} + \&c.)}{\partial t} \\ + \frac{(mz + m^{\text{I}}z^{\text{I}} + \&c.)}{1 + m + m^{\text{I}} + \&c.}.\frac{(m\partial y + m^{\text{I}}\partial y^{\text{I}} + \&c.)}{\partial t} \end{aligned}\right\}; \quad (7)$$

c^{I} & c^{II} étant deux arbitraires. Ces quatre intégrales ſont les ſeules que l'on peut obtenir dans l'état actuel de l'analyſe.

I V.

Si l'on ſuppoſe les maſſes m, m^{I}, &c. extrêmement petites; chacune d'elles décrira à très-peu-près à chaque révolution, une ellipſe autour de M. En vertu des inégalités ſéculaires, les élémens de ces ellipſes varieront par des nuances imperceptibles; mais la ſuite des ſiècles rendra ces variations

très-sensibles. Les intégrales précédentes établissent entre elles, des rapports constans que nous allons déterminer.

Soit a, le demi-grand axe de l'ellipse que m décriroit autour de M, si l'on ne considéroit que l'action de ces deux corps; on aura, comme l'on sait

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1 + m)}{r} - \frac{1 + m}{a}.$$

Cette équation n'aura plus lieu, si l'on a égard à l'action des autres corps m', m'', &c; cependant, si l'on observe que l'orbite de m peut toujours être considérée à chaque révolution, comme une ellipse, aux quantités périodiques près, qui troublent le mouvement de ce corps; on verra que cette équation est encore à très-peu-près exacte après un temps quelconque; mais le demi-grand axe a pourra n'être plus le même qu'à l'origine.

Il suit de-là qu'en ayant égard à l'action de tous les corps du système, on a

$$\frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1 + m)}{r} - \frac{1 + m}{a} + \psi.$$

ψ étant une fonction périodique de l'ordre des masses perturbatrices.

Si l'on nomme pareillement a', a'', &c, les demi-grands axes des orbites que m', m'', &c, décriroient à chaque révolution, sans les perturbations qu'ils éprouvent, on aura

$$\frac{\partial x'^2 + \partial y'^2 + \partial z'^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1 + m')}{r'} - \frac{1 + m'}{a'} + \psi';$$

$$\frac{\partial x''^2 + \partial y''^2 + \partial z''^2}{\partial t^2} = \frac{2.(1 + m'')}{r''} - \frac{1 + m''}{a''} + \psi'';$$

&c.

ψ', ψ'', &c, étant des quantités périodiques de l'ordre m,

En ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (4) de l'*article précédent*, elle deviendra

$$f = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \&c.$$

$$- \frac{m^2.(m' + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} . \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$- \frac{m'^2.(m + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} . \left(\frac{2}{r'} - \frac{1}{a'}\right)$$

$$- \&c.$$

$$- \frac{(2\,m\,m'.\partial x.\partial x' + 2\,m\,m''.\partial x.\partial x'' + 2\,m'.m''.\partial x'.\partial x'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2}$$

$$- \frac{(2\,m\,m'.\partial y.\partial y' + 2\,m\,m''.\partial y.\partial y'' + 2\,m'\,m''.\partial y'.\partial y'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2}$$

$$- \frac{(2\,m\,m'.\partial z.\partial z' + 2\,m\,m''.\partial z.\partial z'' + 2\,m'\,m''.\partial z'.\partial z'' + \&c.)}{(1 + m + m' + \&c.).\partial t^2}$$

$$- 2\lambda - \frac{m.(1 + m' + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} . \psi - \frac{m'.(1 + m + m'' + \&c.)}{1 + m + m' + \&c.} \times$$

$$\psi' - \&c.$$

Les quantités

$$\frac{m\,m'\,\partial x\,\partial x'}{\partial t^2},\ \frac{m\,m''.\partial x\,\partial x''}{\partial t^2},\ \frac{m\,m'.\partial y.\partial y'}{\partial t^2},\ \&c.$$

ſont périodiques, dans la ſuppoſition du mouvement elliptique, & les termes que les perturbations y introduiroient, ſeroient de l'ordre m^3; en négligeant donc les quantités de cet ordre, & celles de l'ordre m^2, qui ne ſont que périodiques ou conſtantes, l'équation précédente prendra cette forme très-ſimple,

$$f = \frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \&c; \quad (8)$$

ainſi, en ſuppoſant que la ſuite des ſiècles amène des changemens remarquables dans les demi-grands axes *a*,

a', &c. des orbites; ils doivent toujours ſatisfaire à l'équation précédente dans laquelle la conſtante f eſt invariable.

On voit par-là que pour avoir entre les élémens des orbites ſuppoſées elliptiques, les relations que donnent les intégrales précédentes des équations différentielles du mouvement du ſyſtème, il ſuffit de ſubſtituer dans ces intégrales, les valeurs des coordonnées relatives au mouvement elliptique; en négligeant enſuite les quantités conſtantes ou périodiques de l'ordre m^2, on aura entre les élémens des ellipſes, autant d'équations qu'il y a d'intégrales.

Déterminons d'après ce principe, les relations entre les élémens qui réſultent des integrales (5), (6) & (7) de l'*article précédent*. Si l'on nomme $e.a$ l'excentricité de l'orbite de m, & ſi l'on néglige m vis-à-vis de l'unité; l'aire que ſon rayon vecteur trace autour de M, durant l'inſtant ∂t, ſera par la théorie du mouvement elliptique, $\frac{1}{2}\partial t.\sqrt{[a.(1 - e^2)]}$. Cette aire projetée ſur le plan des x & des y, eſt diminuée dans le rapport du coſinus de l'inclinaiſon de l'orbite de m ſur ce plan, au rayon. Soit θ, la tangente de cette inclinaiſon; l'aire projetée ſera $\frac{1}{2}\partial t.\sqrt{\left[\frac{a.(1-e^2)}{1+\theta^2}\right]}$; ce ſera dans l'hypothèſe elliptique, la valeur de $\frac{1}{2}.(x\partial y - y\partial x)$.

Si l'on nomme pareillement, $e'.a'$, $e''.a''$, &c, les excentricités des orbites de m', m'', &c; θ, θ', θ'', &c, les tangentes des inclinaiſons de leurs orbites;

$$\tfrac{1}{2}\partial t.\sqrt{\left[\frac{a'(1-e'^2)}{1+\theta'^2}\right]},\ \tfrac{1}{2}\partial t.\sqrt{\left[\frac{a''.(1-e''^2)}{1+\theta''^2}\right]},\ \&c.$$

ſeront dans l'hypothèſe elliptique, les valeurs de

$$\tfrac{1}{2}.(x'\partial y' - y'\partial x'),\ \tfrac{1}{2}.(x''\partial y'' - y''\partial x''),\ \&c.$$

En ſubſtituant ces valeurs dans l'équation (5) de l'*article*

précédent, & en négligeant les quantités constantes ou périodiques de l'ordre m^2, on aura

$$\left.\begin{array}{l} c = m . \sqrt{\left[\frac{a.(1 - e^2)}{1 + \theta^2}\right]} + m' . \sqrt{\left[\frac{a'.(1 - e'^2)}{1 + \theta'^2}\right]} \\ \quad + m'' . \sqrt{\left[\frac{a''.(1 - e''^2)}{1 + \theta''^2}\right]} + \&c. \end{array}\right\} ; \quad (9)$$

en supposant donc qu'après un temps considérable, les excentricités & les inclinaisons des orbites subissent des changemens remarquables, elles doivent toujours satisfaire à l'équation précédente dans laquelle la constante c est invariable.

Les équations (6) & (7) de l'*article précédent* fournissent encore deux relations entre les élémens des orbites; mais il est plus facile de les tirer immédiatement de l'équation (9), en y substituant successivement, au lieu de θ, θ', &c, les tangentes des inclinaisons des orbites sur le plan des x & des z, & sur celui des y & des z. Nommons I, l'angle que forme avec l'axe des x, l'intersection du plan de l'orbite de m, & du plan des x & des y. Il est aisé de voir par la trigonométrie sphérique, que la tangente de l'inclinaison de cette orbite sur le plan des x & des z, sera $\sqrt{\left(\frac{1 + \theta^2 . \text{sin.} I^2}{\theta^2 . \text{cos.} I^2}\right)}$, & que la tangente de l'inclinaison de la même orbite sur le plan des y & des z, sera $\sqrt{\left(\frac{1 + \theta^2 . \text{cos.} I^2}{\theta^2 . \text{sin.} I^2}\right)}$; soit donc

$$\theta . \text{sin.} I = p; \quad \theta . \text{cos.} I = q;$$

ces tangentes seront $\frac{1}{q} . \sqrt{(1 + p^2)}$, $\frac{1}{p} . \sqrt{(1 + q^2)}$.

En marquant d'un trait, de deux traits, &c. les lettres I, p, q, relatives à m'. m''. &c, on aura les tangentes des inclinaisons des orbites de ces corps sur le plan des x & des z, & sur celui des y & des z. En substituant ensuite

ensuite ces tangentes, au lieu de θ, θ', &c, dans l'équation (9), on aura les deux équations suivantes,

$$\left.\begin{array}{l} c' = mq.\sqrt{\left[\frac{a.(1-e^2)}{1+\theta^2}\right]} + m'q'.\sqrt{\left[\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\theta'^2}\right]} \\ \quad + m''.q''.\sqrt{\left[\frac{a''.(1-e''^2)}{1+\theta''^2}\right]} + \&c. \end{array}\right\}; (10)$$

$$\left.\begin{array}{l} c'' = mp.\sqrt{\left[\frac{a.(1-e^2)}{1+\theta^2}\right]} + m'p'.\sqrt{\left[\frac{a'.(1-e'^2)}{1+\theta'^2}\right]} \\ \quad + m''.p''.\sqrt{\left[\frac{a''.(1-e''^2)}{1+\theta''^2}\right]} + \&c. \end{array}\right\}; (11)$$

dans lesquelles les constantes c' & c'', sont invariables.

V.

Sur les moyens mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter.

CONSIDÉRONS présentement les mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter. Nous observerons d'abord que le mouvement du quatrième, n'offrant aucun rapport de commensurabilité avec ceux des trois autres, on peut négliger ici son action. On peut, par la même raison, négliger l'action du Soleil; enfin, on peut faire abstraction de la figure de Jupiter, dont l'influence sur les variations des grands axes est nulle. Soient donc m, m', m'', les masses du premier, du second & du troisième satellite de Jupiter dont nous prendrons la masse M pour unité de masse. Supposons qu'après un temps considérable, les demi-grands axes a, a', a'', &c, se changent dans

$$a + \delta a,\ a' + \delta a',\ a'' + \delta a'';$$

si l'on prend pour le plan des x & des y, celui de l'orbite de Jupiter, & que l'on néglige les carrés des excentricités

& des inclinaiſons des orbites, & ceux de δa, $\delta a'$, $\delta a''$; les équations (8) & (9) de l'*article précédent*, donneront, en les différenciant par rapport à la caractériſtique δ,

$$o = \frac{m.\delta a}{a^2} + \frac{m'.\delta a'}{a'^2} + \frac{m''.\delta a''}{a''^2};$$

$$o = \frac{m.\delta a}{\sqrt{(a)}} + \frac{m'.\delta a'}{\sqrt{(a')}} + \frac{m''.\delta a''}{\sqrt{(a'')}};$$

d'où l'on tire

$$\delta a' = \frac{-m.\delta a}{m'} . \frac{a'^2}{a^2} . \left(\frac{a^{\frac{3}{2}} - a''^{\frac{3}{2}}}{a'^{\frac{3}{2}} - a''^{\frac{3}{2}}}\right);$$

$$\delta a'' = \frac{m.\delta a}{m''} . \frac{a''^2}{a^2} . \left(\frac{a^{\frac{3}{2}} - a'^{\frac{3}{2}}}{a'^{\frac{3}{2}} - a''^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Soient nt, $n't$, $n''t$, les moyens mouvemens des Satellites m, m', m''; on aura, comme l'on ſait,

$$n^2 = \frac{1}{a^3};\ n'^2 = \frac{1}{a'^3};\ n''^2 = \frac{1}{a''^3};$$

partant

$$\delta n = -\frac{3}{2} . n . \frac{\delta a}{a}$$

$$\delta n' = -\frac{m}{m'} . \delta n . \frac{n'^{\frac{4}{3}} . (n - n'')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')}$$

$$\delta n'' = \frac{m}{m''} . \delta n . \frac{n''^{\frac{4}{3}} . (n - n')}{n^{\frac{4}{3}} . (n' - n'')};$$

ainſi pour avoir les variations ſéculaires des moyens mouvemens des trois Satellites, il ne s'agit que de déterminer δa, ou ce qui revient au même, le terme pro-

portionnel au temps, qui entre dans l'expreſſion du demi-grand axe a, du premier Satellite.

VI.

Si l'on ajoute enſemble les équations (1), (2) & (3) de l'*article II*, après avoir multiplié la premiere par ∂x, la ſeconde par ∂y, & la troiſième par ∂z; & que pour abréger, on ſuppoſe,

$$R = \frac{m'.(xx' + yy' + zz')}{r'^3} + \frac{m''.(xx'' + yy'' + zz'')}{r''^3} - \frac{x}{m};$$

enfin, ſi l'on déſigne par la caractériſtique d, les différences priſes en ne faiſant varier que les coordonnées relatives au Satellite m; on aura

$$o = \frac{\partial x.\partial\partial x + \partial y.\partial\partial y + \partial z.\partial\partial z}{\partial t^2} + (1+m).\frac{\partial r}{r^2} + dR;$$

d'où l'on tire en intégrant

$$o = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2.(1+m)}{r} + \frac{1+m}{a} + 2\int dR.$$

Si la différentielle $2\,dR$ renferme un terme conſtant $k\partial t$, l'intégrale $2\int dR$ renfermera le terme kt proportionnel au temps; on aura donc après le temps t, en négligeant les quantités périodiques de l'ordre m,

$$o = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2.(1+m)}{r} + \frac{1+m}{a} + k.t;$$

mais ſi l'on nomme $a + \delta a$, ce que devient le demi-grand axe a, après ce temps, on a

$$o = \frac{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}{\partial t^2} - \frac{2.(1+m)}{r} + \frac{1+m}{a+\delta a};$$

partant

$$\frac{1+m}{a+\delta a} = \frac{1+m}{a} + kt,$$

ce qui donne, en négligeant le carré de δa, & m vis-à-vis de l'unité,

$$\delta a = - a^2 k t:$$

la queſtion ſe réduit ainſi à déterminer k.

Pour y parvenir, nous obſerverons que ſi l'on n'a égard qu'aux quantités de l'ordre des maſſes perturbatrices, la différentielle $d R$ ne renferme aucun terme conſtant; *(Voyez ſur cela les Mémoires de Berlin pour l'année 1776, page 210).* Il faut conſéquemment, pour y trouver des termes ſemblables, avoir égard aux produits de ces maſſes. Si l'on nomme v, v', v'', les angles formés par l'axe des x, & par les projections des rayons recteurs r, r', r'', ſur le plan de l'orbite de Jupiter; ſi l'on nomme de plus, $n t + \varepsilon$, $n' t + \varepsilon'$, $n'' t + \varepsilon''$, les longitudes moyennes des trois Satellites, rapportées au même plan, & comptées de l'axe des x; l'angle

$$(2 n'' - 3 n' + n) . t + 2\varepsilon'' - 3\varepsilon' + \varepsilon,$$

ſera à très-peu-près conſtant ſuivant les obſervations, en vertu du rapport qu'elles indiquent entre les moyens mouvemens des trois premiers Satellites, comme on l'a vu dans l'*article premier.* Soit V cet angle; on doit donc chercher les termes conſtans de $d R$, parmi ceux qui ſont multipliés par les ſinus de V, & de ſes multiples; & il eſt clair que l'angle V étant compoſé des mouvemens des trois Satellites, il ne peut ſe rencontrer que parmi les termes de $d R$, affectés du produit $m' . m''$.

Nous négligerons les excentricités & les inclinaiſons des orbites; nous aurons ainſi

$$x = r . \text{coſ.}\, v; \quad y = r . \text{ſin.}\, v; \quad z = 0;$$

$$x' = r' . \text{coſ.}\, v'; \quad y' = r' . \text{ſin.}\, v'; \quad z' = 0;$$

$$x'' = r'' . \text{coſ.}\, v''; \quad y'' = r'' . \text{ſin.}\, v''; \quad z'' = 0;$$

& par conséquent

$$R = \frac{m'.r.\text{cof.}(v' - v)}{r'^2} + \frac{m''.r.\text{cof.}(v'' - v)}{r''^2}$$

$$- \frac{m'}{\sqrt{[r^2 - 2rr'.\text{cof.}(v' - v) + r'^2]}} - \frac{m''}{\sqrt{[r^2 - 2rr'.\text{cof.}(v' - v) + r''^2]}}.$$

Supposons qu'en réduisant R dans une suite ordonnée par rapport aux cosinus de $v' - v$, $v'' - v$, & de leurs multiples, on ait

$$R = m'.[A^{(0)} + A^{(1)}.\text{cof.}(v' - v) + A^{(2)} \times \text{cof.}\, 2\,(v' - v) + \&c.]$$
$$+ m''.[B^{(0)} + B^{(1)}.\text{cof.}(v' - v) + B^{(2)} \times \text{cof.}\, 2\,(v'' - v) + \&c.];$$

on aura dR, en différenciant R, uniquement par rapport à r & v, ce qui donne

$$dR = m'\,\partial v.\{A^{(1)}.\text{fin.}(v' - v) + 2\,A^{(2)}.\text{fin.}\,2\,(v' - v) + \&c.\}$$
$$+ m'\,\partial r.\{(\frac{\partial A^{(0)}}{\partial r}) + (\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r}).\text{cof.}(v' - v) + (\frac{\partial A^{(2)}}{\partial r}).\text{cof.}\,2.(v' - v) + \&c.\}$$
$$+ m''\,\partial v.\{B^{(1)}.\text{fin.}(v'' - v) + 2\,B^{(2)}.\text{fin.}\,2\,(v'' - v) + \&c.\}$$
$$+ m''\,\partial r.\{(\frac{\partial B^{(0)}}{\partial r}) + (\frac{\partial B^{(1)}}{\partial r}).\text{fin.}(v'' - v) + (\frac{\partial B^{(2)}}{\partial r}).\text{fin.}\,2\,(v'' - v) + \&c.\}.$$

Il faut maintenant substituer dans cette expression de dR, au lieu de r, r', r'', v, v', v'', leurs valeurs approchées jusqu'aux premières puissances inclusivement de m, m', m'', en distinguant avec soin, les termes constans, de ceux qui ne sont que périodiques.

VII.

POUR cela, nous allons rappeler ici quelques résultats de la théorie des perturbations des satellites de Jupiter; nous les tirerons de l'excellente pièce de M. de la Grange, qui a remporté le Prix de l'Académie pour l'année 1766, & qui est imprimée dans le tome IX du recueil des Prix de l'Académie.

Si l'on désigne par l'unité, le demi-diamètre de Jupiter; on aura, en n'ayant égard qu'à l'action des trois premiers Satellites,

$$r = 5{,}67 + m^{\prime} . \left\{ \begin{array}{l} 4{,}19 . \cos. (n^{\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) - 1014{,}93 \times \\ \cos. 2 . (n^{\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) - 3{,}87 . \cos. \\ 3 . (n^{\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) - 1{,}02 . \cos. 4 . (n^{\prime} t - n t \\ + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) - \&c. \end{array} \right\}$$

$$+ m^{\prime\prime} . \left\{ \begin{array}{l} 0{,}75 . \cos. (n^{\prime\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) - 1{,}06 \times \\ \cos. 2 . (n^{\prime\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) - 0{,}13 . \cos. \\ 3 . (n^{\prime\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) - 0{,}02 . \cos. 4 . (n^{\prime\prime} t - n t \\ + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) - \&c. \end{array} \right\}$$

$$r^{\prime} = 9{,}00 + m . \left\{ \begin{array}{l} 518{,}78 . \cos. (n^{\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) + 5{,}73 \times \\ \cos. 2 . (n^{\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) + 1{,}36 . \cos. \\ 3 . (n^{\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) + 0{,}49 . \cos. 4 . (n^{\prime} t - n t \\ + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) + \&c. \end{array} \right\}$$

$$+ m^{\prime\prime} . \left\{ \begin{array}{l} 7{,}16 . \cos. (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) - 824{,}07 \times \\ \cos. 2 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) - 6{,}29 . \cos. \\ 3 . (n^{\prime\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) - 1{,}66 . \cos. 4 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t \\ + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) - \&c. \end{array} \right\}$$

$$r^{\prime\prime} = 14{,}38 + m . \left\{ \begin{array}{l} 5{,}88 . \cos. (n^{\prime\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) + 0{,}19 \times \\ \cos. 2 . (n^{\prime\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) + 0{,}03 . \cos. \\ 3 . (n^{\prime\prime} t - n t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) + 0{,}00 . \cos. 4 . (n^{\prime\prime} t - n t \\ + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) + \&c. \end{array} \right\}$$

$$+ m^{\prime} . \left\{ \begin{array}{l} 452{,}98 . \cos. (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) + 9{,}13 \times \\ \cos. 2 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) + 2{,}16 . \cos. \\ 3 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) + 0{,}59 . \cos. 4 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t \\ + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) + \&c. \end{array} \right\}$$

$$v = nt + \varepsilon + m^{\prime} . \left\{ \begin{array}{l} 9300^{\prime} . \sin. (n^{\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) - 1227214^{\prime} \times \\ \sin. 2 . (n^{\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) - 3526^{\prime} . \sin. \\ 3 . (n^{\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) - 705^{\prime} . \sin. 4 . (n^{\prime} t - nt \\ + {}^{\prime} - \varepsilon) - \&c. \end{array} \right\}$$

$$+ m^{\prime\prime} . \left\{ \begin{array}{l} 1158^{\prime} . \sin. (n^{\prime\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) - 1007^{\prime} \times \\ \sin. 2 . (n^{\prime\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) - 101^{\prime} . \sin. \\ 3 . (n^{\prime\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) - 18^{\prime} . \sin. 4 . (n^{\prime\prime} t - nt \\ + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) - \&c. \end{array} \right\}$$

$$v^{\prime} = n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime} + m . \left\{ \begin{array}{l} 387482^{\prime} . \sin. (n^{\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) + 2727^{\prime} \times \\ \sin. 2 . (n^{\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) + 509^{\prime} . \sin. \\ 3 . (n^{\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) + 12^{\prime} . \sin. 4 . (n^{\prime} t - nt \\ + \varepsilon^{\prime} - \varepsilon) + \&c. \end{array} \right\}$$

$$+ m^{\prime\prime} . \left\{ \begin{array}{l} 10067^{\prime} . \sin. (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) - 626246^{\prime} \times \\ \sin. 2 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) - 3717^{\prime} . \sin. \\ 3 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) - 825^{\prime} . \sin. 4 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t \\ + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) - \&c. \end{array} \right\}$$

$$v^{\prime\prime} = n^{\prime\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} + m . \left\{ \begin{array}{l} - 1306^{\prime} . \sin. (n^{\prime\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) + 38^{\prime} . \sin. 2 \times \\ (n^{\prime\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) + 8^{\prime} \sin. 3 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t \\ + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) + 1^{\prime} . \sin. 4 . (n^{\prime\prime} t - nt + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon) \\ + \&c. \end{array} \right\}$$

$$+ m^{\prime} . \left\{ \begin{array}{l} 207375^{\prime} . \sin. (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) + 2760^{\prime} \times \\ \sin. 2 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) + 559^{\prime} . \sin. \\ 3 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) + 142^{\prime} . \sin. 4 . (n^{\prime\prime} t - nt \\ + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon^{\prime}) + \&c. \end{array} \right\}$$

(*Voyez la pièce citée*, pages 63 & ſuivantes); cela poſé.

Conſidérons d'abord le terme $m^{\prime}\, \partial v.\, A^{(1)}.\, \mathit{ſin.}\, (v^{\prime} - v)$, de l'expreſſion de dR. Si l'on y ſubſtitue au lieu de v, ſa valeur précédente; il eſt aiſé de voir qu'il n'en peut réſulter aucun terme conſtant ou proportionnel à *ſin. V*. Il n'en eſt pas ainſi de la ſubſtitution de la valeur de $v^{\prime}$, & l'on voit facilement que le terme

$$- m^{\prime\prime} . 626246^{\prime} . \mathit{ſin.}\ 2 . (n^{\prime\prime} t - n^{\prime} t + \varepsilon^{\prime\prime} - \varepsilon),$$

de cette valeur, produira dans $m' \partial v . A^{(1)} . \sin. (v' - v)$, le ſuivant

$$- m' m'' . 626246' . A^{(1)} . n \partial t . \text{coſ.} (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon) \times \sin. 2 . (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon'),$$

& par conſéquent celui-ci,

$$- \frac{m' m''}{2} . 626246' A^{(1)} . n dt. \sin. V.$$

pour réduire en parties du rayon le coéfficient 626246', il faut le diviſer par 57^d 17' 44''; en déſignant donc par h, le quotient de cette diviſion, le terme précédent deviendra

$$- \frac{m' m''}{2} . h A^{(1)} . n \partial t . \sin. V;$$

& il produira dans $2 d R$, le terme conſtant

$$- m' m'' . h A^{(1)} . n \partial t . \sin. V.$$

$A^{(1)}$ étant une fonction de r & de r', la ſubſtitution de leurs valeurs peut produire encore des termes conſtans dans $m' . \partial v . A^{(1)} \sin. (v' - v)$; or il eſt facile de s'aſſurer que la valeur de r ne produira aucun terme ſemblable, & que la valeur de r' produira le terme

$$- m' . m'' . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) . 824{,}07 . \text{coſ.} 2 (n'' t - n' t + \varepsilon'' - \varepsilon') \times \sin. (n' t - n t + \varepsilon' - \varepsilon);$$

ce qui donne le terme conſtant

$$\frac{m' m''}{2} . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) . 824{,}07 . \sin. V;$$

en déſignant donc par l, le coéfficient numérique 824,07, il en réſultera dans $2 dR$, le terme conſtant

$$m' m'' . n \partial t . \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) . l . \sin. V.$$

On voit ainſi que le terme $m' \partial v . A^{(1)} . \sin. (v' - v)$, de

de l'expression de dR, produit dans $2\,dR$, la quantité constante

$$m^{I}.m^{II}.n\,\partial t.\text{fin.}\,V.\left[l\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r^{I}}\right)-h\,A^{(1)}\right].$$

Si l'on analyse de la même manière, les autres termes de l'expression de dR; on verra que les termes constans qui en résultent, sont insensibles par rapport à la quantité précédente, à cause de la grandeur des coéfficiens numériques h & l, qui multiplient ses deux termes. On peut donc supposer que la partie constante de $2\,dR$, se réduit à cette quantité, & qu'ainsi l'on a

$$k=m^{I}\,m^{II}.n.\text{fin.}\,V.\left[l\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r^{I}}\right)-h\,A^{(1)}\right];$$

d'où l'on tire par l'*article précédent*,

$$\delta a=-m^{I}\,m^{II}.a^{2}\,n\,t.\text{fin.}\,V.\left[l\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r^{I}}\right)-h\,A^{(1)}\right];$$

& par conséquent

$$\delta n=\tfrac{3}{2}.m^{I}\,m^{II}.a.n^{2}\,t.\text{fin.}\,V.\left[l\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r^{I}}\right)-h\,A^{(1)}\right].$$

De-là il est aisé de conclure par l'*article V*,

$$2\,\delta n^{II}-3\,\delta n^{I}+\delta n$$

$$=\tfrac{3}{2}.a\,n^{2}\,t.\text{fin.}\,V.\left[l\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r^{I}}\right)-h\,A^{(1)}\right].\left\{\begin{array}{l} m^{I}\,m^{II} \\ +3\,m\,m^{II}.\dfrac{n^{I\frac{4}{3}}.(n-n^{II})}{n^{\frac{4}{3}}.(n^{I}-n^{II})} \\ +2\,m\,m^{I}.\dfrac{n^{II\frac{4}{3}}.(n-n^{I})}{n^{\frac{4}{3}}.(n^{I}-n^{II})} \end{array}\right\}$$

Soit α, la fonction qui, dans le second membre de cette équation, multiplie $n^{2}\,t.\text{fin.}\,V$; & que l'on désigne par s, la quantité $2\,n^{II}-3\,n^{I}+n$; on aura

$$\delta s=\alpha\,n^{2}\,t.\text{fin.}\,V.$$

VIII.

L'ÉQUATION précédente donne la variation δs, correspondante au temps t; mais elle ne peut servir que pour un intervalle dans lequel $\alpha n^2 t . \sin. V$ est peu considérable; on peut cependant en tirer la valeur de s, pour un temps illimité, au moyen de la méthode que j'ai donnée dans la seconde partie de nos Mémoires pour l'année 1772. Suivant cette méthode, on doit considérer s, comme une fonction de αt, qui réduite dans une série ordonnée par rapport aux puissances de αt, est de cette forme

$$s + \alpha t . \frac{\partial s}{\alpha \partial t} + \frac{\alpha^2 t^2}{1.2} . \frac{\partial^2 s}{\alpha^2 \partial t^2} + \&c.$$

les quantités s, $\frac{\partial s}{\alpha \partial t}$, $\frac{\partial^2 s}{\alpha^2 \partial t^2}$, &c. étant relatives à l'instant que l'on choisit pour époque. Le second terme de cette série exprime la variation δs, lorsque αt est très-petit; en comparant donc cette variation à celle-ci, $\alpha n^2 t . \sin. V$, on aura

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha n^2 . \sin. V,$$

& comme l'instant de l'époque est arbitraire, cette équation différentielle a lieu pour un instant quelconque.

Maintenant, V étant par l'*article VI*, égal à

$$2 n'' t - 3 n' t + n t + 2 \varepsilon'' - 3 \varepsilon' + \varepsilon,$$

on a

$$\partial V = \partial t . (2 n'' - 3 n' + n) = s \partial t;$$

on aura ainsi entre s, V & t, deux équations différentielles du premier ordre, dont les intégrales donneront les valeurs de s & V, pour un temps quelconque.

De ces équations, on tire la ſuivante,

$$\frac{\partial\partial V}{\partial t^2} = \alpha n^2 . \text{ſin. } V;$$

en la multipliant par ∂V, & en l'intégrant, on aura

$$\frac{\pm \partial V}{\sqrt{(\lambda - 2\alpha n^2 . \text{coſ. } V)}} = \partial t; \quad (a)$$

λ étant une conſtante arbitraire. Les différentes valeurs que l'on peut ſuppoſer à cette conſtante, donnent lieu aux trois cas ſuivans.

Premier cas.

Si λ eſt poſitif & plus grand que $\pm 2\alpha n^2$; il eſt viſible que l'angle $\pm V$ croîtra ſans ceſſe, & cela doit arriver, ſi à l'origine du mouvement, $2 n'' - 3 n' + n$, eſt poſitif ou négatif, & d'un ordre ſupérieur à $n \sqrt{(\pm \alpha)}$.

Second cas.

Si α eſt poſitif, & λ moindre que $2\alpha n^2$; le radical

$$\sqrt{(\lambda - 2\alpha n^2 . \text{coſ. } V)}$$

devient imaginaire, dans la ſuppoſition de $V = 0$; l'angle V ſera donc alors périodique, & ne pourra jamais être nul; il ne fera qu'oſciller de part & d'autre de 180^d, en ſorte que ſa valeur moyenne ſera de ſix ſignes.

Troiſième cas.

Si α eſt négatif, & λ moindre que $- 2\alpha n^2$; le radical

$$\sqrt{(\lambda - 2\alpha n^2 . \text{coſ. } V)}$$

devient imaginaire, dans la ſuppoſition de $V = 180^d$; l'angle V ne peut donc jamais dans ce cas atteindre 180^d; il ne fera qu'oſciller de part & d'autre de zéro, en devenant alternativement poſitif & négatif, & ſa valeur moyenne ſera nulle.

Voyons lequel de ces trois cas a lieu dans la Nature.

I X.

En prenant pour unité, le demi-diamètre de Jupiter, les obſervations donnent

$$a = 5,67;\ a' = 9,00;\ a'' = 14,38.$$

De-là j'ai conclu

$$A^{(1)} = -\frac{0,0952}{a'};\ \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) = \frac{0,594}{a'^2};$$

Mais on a par l'*article VII*,

$$h = \frac{626246''}{57^d\ 17'\ 44''};\ l = 824,07;$$

on aura par conſéquent

$$l.\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) - h\ A^{(1)} = \frac{71,731}{a'},$$

ce qui donne

$$\alpha = 67,786.\left\{\begin{array}{l} m'\,m'' + 3\,m\,m''.\dfrac{n'^{\frac{4}{3}}.(n - n'')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')} \\ \qquad + 2\,m\,m'.\dfrac{n''^{\frac{4}{3}}.(n - n')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')} \end{array}\right\}.$$

Nous ſommes ainſi aſſurés que α eſt poſitif; d'où il ſuit que le dernier des trois cas précédens, ne peut pas exiſter. Il faut donc, ou que l'angle $\pm V$ croiſſe ſans ceſſe, ou ſi ſa valeur eſt périodique, qu'il ne puiſſe qu'oſciller de part & d'autre de 180^d.

X.

Si l'angle $\pm V$ croît indéfiniment, λ eſt poſitif & plus grand que $2\,\underline{\alpha}\,n^2$; or, ſi l'on ſuppoſe $V = 180^d \pm \varpi$,

le ſigne de ϖ étant le même que celui de ∂V, dans l'équation différentielle *(a)* de l'*article VIII*, cette équation donnera

$$\partial \varpi = \partial t . \surd (\lambda + 2 \alpha n^2 . \text{coſ.}\, \varpi);$$

on aura donc dans l'intervalle compris depuis $\varpi = 0$, juſqu'à $\varpi = 90^d$, $\varpi > t . \surd (\lambda)$, & par conſéquent $\varpi > n\, t . \surd (2 \alpha)$; ainſi le temps t que ϖ emploîra à parvenir de 0^d à 90^d, ſera moindre que $\frac{90^d}{n \surd (2 \alpha)}$. Si l'on nomme T le temps de la révolution du premier Satellite, on aura $n T = 360^d$; ce qui donne $n = \frac{360^d}{T}$; donc le temps t que ϖ emploîra à parvenir de 0^d à 90^d, ſera moindre que $\frac{T}{4 . \surd (2 \alpha)}$.

La valeur de α dépend des maſſes des trois premiers Satellites de Jupiter; la maſſe m' du ſecond paroît aſſez bien déterminée par l'inégalité du premier Satellite, & ſi l'on prend pour unité, la maſſe de Jupiter, on a

$$m' = 0{,}00002417.$$

Quant aux maſſes m & m'' du premier & du troiſième Satellite, la théorie des inégalités du ſecond eſt inſuffiſante pour les déterminer; mais elle donne entr'elles, la relation ſuivante

$$91810 . m + 148383 . m'' = 16{,}5.$$

(Voyez la pièce citée de M. de la Grange, pages 74 & 78). En ſuppoſant donc $m = \mu\, m'$, on aura

$$m'' = 0{,}000111199 - 0{,}000014955 . \mu.$$

Les temps des révolutions des trois premiers Satellites ſont

$$1^j\ 18^h\ 28'\ 36''; \quad 3^j\ 13^h\ 17'\ 54''; \quad 7^j\ 3^h\ 59'\ 36'';$$

& il eſt clair que les valeurs de n, n', n'', ſont réciproques

à ces temps; d'où il ſuit que ces valeurs ſont entr'elles comme les nombres

$$1\ ;\ 0{,}497978\ ;\ 0{,}246967\ ;$$

on aura ainſi

$$\frac{3\, n'^{\frac{4}{3}} \cdot (n - n'')}{n^{\frac{4}{3}} \cdot (n' - n'')} = 3{,}55242\ ;$$

$$\frac{2\, n''^{\frac{4}{3}} \cdot (n - n')}{n^{\frac{4}{3}} \cdot (n' - n'')} = 0{,}619791\ ;$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 0{,}000000182187 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + 3{,}55263 \cdot \mu \\ - 0{,}477756 \cdot \mu^2 \end{array} \right\}$$

La valeur de μ eſt compriſe entre les deux limites $\mu = 0$ & $\mu = \frac{111199}{14955}$, dont la première répond à $m = 0$, & dont la ſeconde répond à $m'' = 0$; or il eſt aiſé de voir que la plus petite valeur dont α eſt ſuſceptible, répond à $\mu = 0$; ainſi le temps t que l'angle ϖ doit employer dans le cas que nous diſcutons ici, à parvenir de 0^d à 90^d, eſt néceſſairement moindre que

$$\frac{T}{4 \cdot \sqrt{(0{,}000000364374)}}\ ;$$

& comme T réduit en décimales de jours, eſt égal à $1^j{,}76986$, il en réſulte que t eſt moindre que $733^j{,}002$, ou au-deſſous de deux ans.

Maintenant, ſi l'on compare ce réſultat aux obſervations, on verra qu'il leur eſt entièrement contraire; car les Tables des trois premiers Satellites, qui ſatisfont aſſez bien aux obſervations depuis plus d'un ſiècle, donnent à toutes les époques, V peu différent de 180 degrés, & par conſéquent ϖ peu conſidérable. Suivnat celles que M. Bailli a inſérées à la fin de ſon Ouvrage ſur les Satellites de Jupiter, les

quantités dont V ſurpaſſoit 180 degrés, aux époques de 1671 & 1763, étoient de 9′ 31″, & de 12′ 23″; dans toutes les époques intermédiaires, elles étoient compriſes entre ces limites. Il eſt donc certain que depuis la découverte des Satellites de Jupiter, ϖ ne s'eſt jamais élevé à 90 degrés; ainſi la ſuppoſition de l'angle ϖ croiſſant ſans ceſſe, eſt entièrement contraire aux obſervations. Le ſecond des trois cas de l'*article VIII*, eſt donc le ſeul qui puiſſe avoir lieu dans la Nature; c'eſt-à-dire que l'angle V eſt néceſſairement périodique, & ne fait qu'oſciller de part & d'autre de 180 degrés, en ſorte que ſa valeur moyenne eſt de ſix ſignes.

X I.

Reprenons l'équation différentielle de l'*article précédent.*

$$\frac{\partial \varpi}{\sqrt{(\lambda + 2\alpha n^2 . \text{coſ.} \varpi)}} = \partial t.$$

Si l'on nomme g, l'eſpace que la peſanteur terreſtre fait parcourir dans la première ſeconde; ſi l'on imagine enſuite un pendule dont la longueur ſoit $\frac{2g}{\alpha i^2}$, i étant le nombre de ſecondes que renferme le temps de la révolution du premier Satellite; enfin ſi l'on ſuppoſe à l'origine du mouvement, ce pendule éloigné de la verticale, d'un angle dont le coſinus ſoit $\frac{-\lambda}{2\alpha i^2}$; ſes oſcillations repréſenteront les variations de l'angle ϖ.

Puiſque les Tables des Satellites ſatisfont aſſez bien aux obſervations, ſans avoir égard aux variations de cet angle, il doit être peu conſidérable: on peut donc ſuppoſer $\text{coſ.}\, \varpi = 1 - \frac{\varpi^2}{2}$; ainſi en faiſant $\frac{\lambda + 2\alpha n^2}{\alpha n^2} = 6$, on aura

$$\frac{\partial \varpi}{\sqrt{(6^2 - \varpi^2)}} = n \partial t . \sqrt{(\alpha)}.$$

Cette équation donne, en l'intégrant,

$$\varpi = \mathcal{C}.\text{fin.}\{nt\sqrt{(\alpha)} + \gamma\},$$

$\mathcal{C}$ & γ étant deux conſtantes arbitraires que l'obſervation peut ſeule déterminer. L'équation $\frac{\partial V}{\partial t} = \partial s$, donne

$$s = \pm n\mathcal{C}.\sqrt{(\alpha)}.\text{coſ.}\{nt\sqrt{(\alpha)} + \gamma\},$$

d'où l'on voit que s eſt, ainſi que ϖ, une quantité périodique: en faiſant donc abſtraction de ces quantités, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que nt, $n^{\text{I}}t$, $n^{\text{II}}t$, repréſentent les vrais moyens mouvemens des Satellites, on a rigoureuſement $s = 0$, ou

$$n + 2n^{\text{II}} = 3n^{\text{I}}.$$

On voit encore que cette équation n'exige point qu'à l'origine du mouvement, s ou $n + 2n^{\text{II}} - 3n^{\text{I}}$, ait été rigoureuſement nul; il ſuffit qu'il ait été compris dans les limites $-n\mathcal{C}.\sqrt{(\alpha)}$, & $+n\mathcal{C}.\sqrt{(\alpha)}$.

On aura le temps t de la période des variations de s & de ϖ, au moyen de l'équation $nt.\sqrt{(\alpha)} = 360^{\text{d}}$, ce qui donne $t = \frac{360^{\text{d}}}{n.\sqrt{(\alpha)}}$; mais T étant le temps de la révolution du premier Satellite, on a $nT = 360^{\text{d}}$; on aura donc

$$t = \frac{T}{\sqrt{(\alpha)}};$$

les deux limites de t, répondent conſéquemment aux deux limites de α; or la plus petite valeur de α eſt

$$\alpha = 0{,}000000182187,$$

& ſa plus grande valeur eſt

$$\alpha = 0{,}00000138542;$$

ainſi

ainsi les deux limites de t, sont

$$1503^{\text{jours}},5\,;\ \&\ 4146^{\text{jours}},5\,;$$

c'est-à-dire, que le temps de la période des valeurs de s & de θ, est compris entre 4 ans $\frac{1}{8}$, & 11 ans $\frac{1}{3}$.

Les mouvemens des trois Satellites ont des variations analogues à celles de l'angle ϖ; ces variations sont dans le rapport des quantités δn, δn, δn, qui par l'*article V*, sont entr'elles comme les quantités

$$1\,;\ -\frac{m}{m'}\cdot\frac{n'^{\frac{4}{3}}.(n-n'')}{n^{\frac{4}{3}}.(n'-n'')}\,;\ \frac{m}{m''}\cdot\frac{n''^{\frac{4}{3}}.(n-n')}{n^{\frac{4}{3}}.(n'-n'')}.$$

En nommant donc, k sin. $\{nt\sqrt{(\alpha)}+\gamma\}$, l'équation qui en résulte dans le mouvement du premier Satellite; les équations correspondantes du second & du troisième Satellite, seront

$$-1,18414.\frac{m}{m'}.k.\text{sin.}\,\{nt\sqrt{(\alpha)}+\gamma\}\,;$$

$$0,309895.\frac{m}{m''}.k.\text{sin.}\,\{nt\sqrt{(\alpha)}+\gamma\}\,;$$

& l'on aura

$$\mathfrak{C}=(1+3,55242.\frac{m}{m'}+0,619791.\frac{m}{m''}).k.$$

Il est impossible dans l'état actuel de la théorie des Satellites de Jupiter, de prononcer sur la véritable valeur de $\mathfrak{C}$; on voit seulement par l'inspection des erreurs des meilleures Tables, qu'il n'est pas impossible que cette valeur excède 40'; mais c'est un point que je laisse à discuter aux Astronomes qui cherchent à perfectionner cette théorie.

XII.

Il suit de ce qui précède, que si l'on néglige les quantités périodiques, & que l'on n'ait égard qu'aux moyens

mouvemens & à leurs époques; on a les deux équations ſuivantes,

$$\varepsilon - 3\,\varepsilon' + 2\,\varepsilon'' = 0;\; n - 3\,n' + 2\,n'' = 0.$$

Ces équations ſubſiſteroient encore dans le cas où par des cauſes inconnues, telles que la réſiſtance d'un milieu, les moyens mouvemens des Satellites de Jupiter ſeroient aſſujettis à des équations ſéculaires. En vertu de ces cauſes, les expreſſions des grands axes des orbites, & par conſéquent les valeurs de n, n', n'', renfermeroient des termes proportionnels au temps; ſoient $i\,t$, $i'\,t$, $i''\,t$, ces termes; i, i', i'', étant des coéfficiens conſtans, ou du moins que l'on peut traiter comme tels, pendant un très-long intervalle. Si l'on nomme, pour abréger, q la quantité

$$\tfrac{3}{2}\,.\,m'\,m''\,.\,a\,.\left[l\left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial r'}\right) - h\,A^{(1)}\right];$$

on aura par les *art.* *V* & *VI.*

$$\delta n = q\,n^2\,t\,.\,\text{ſin.}\,V + i\,t;$$

$$\delta n' = -\frac{m}{m'}\,.\,\frac{n'^{\frac{4}{3}}\,.\,(n - n'')}{n^{\frac{4}{3}}\,.\,(n' - n'')}\,.\,q\,.\,n^2\,t\,.\,\text{ſin.}\,V + i'\,t,$$

$$\delta n'' = \frac{m}{m''}\,.\,\frac{n''^{\frac{4}{3}}\,.\,(n - n')}{n^{\frac{4}{3}}\,.\,(n' - n'')}\,.\,q\,n^2\,t\,.\,\text{ſin.}\,V + i''\,t;$$

d'où l'on tire par l'*art.* *VIII*, les équations

$$\frac{\partial n}{\partial t} = q\,n^2\,.\,\text{ſin.}\,V + i;$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = -\frac{m}{m'}\,.\,\frac{n'^{\frac{4}{3}}\,.\,(n - n'')}{n^{\frac{4}{3}}\,.\,(n' - n'')}\,.\,q\,n^2\,.\,\text{ſin.}\,V + i';$$

$$\frac{\partial n''}{\partial t} = \frac{m}{m''}\,.\,\frac{n''^{\frac{4}{3}}\,.\,(n - n')}{n^{\frac{4}{3}}\,.\,(n' - n'')}\,.\,q\,n^2\,.\,\text{ſin.}\,V + i''.$$

En ſuppoſant donc, comme dans l'*article VII*,

$$s = n - 3\,n' + 2\,n'';$$

$$\alpha = q\cdot\left[1 + \frac{3\,m}{m'}\cdot\frac{n'^{\frac{4}{3}}\cdot(n - n'')}{n^{\frac{4}{3}}\cdot(n' - n'')} + \frac{2\,m}{m''}\cdot\frac{n''^{\frac{4}{3}}\cdot(n - n')}{n^{\frac{4}{3}}\cdot(n' - n'')}\right];$$

on aura

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \alpha\,n^2.\,\text{ſin.}\,V + i - 3\,i' + 2\,i''.$$

on a enſuite $\frac{\partial V}{\partial t} = s$; partant

$$\frac{\partial\partial V}{\partial t^2} = \alpha\,n^2.\,\text{ſin.}\,V + i - 3\,i' + 2\,i''.$$

Suppoſons $V = 180^d + \varpi$, ϖ étant peu conſidérable; l'équation précédente donnera

$$\frac{\partial\partial\varpi}{\partial t^2} + \alpha\,n^2\,\varpi = i - 3\,i' + 2\,i'';$$

d'où l'on tire en intégrant,

$$\varpi = \beta.\text{ſin.}\,[n\,t\,\sqrt{(\alpha)} + \gamma] + \frac{i - 3\,i' + 2\,i''}{\alpha\,n^2},$$

β & γ étant deux conſtantes arbitraires; & comme on a $s = \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial\varpi}{\partial t}$; on aura

$$n - 3\,n' + 2\,n'' = n\,\beta.\text{coſ.}\,[n\,t\,\sqrt{(\alpha)} + \gamma];$$

ainſi en négligeant les quantités périodiques, on aura

$$n - 3\,n' + 2\,n'' = 0.$$

On voit par-là que les cauſes qui peuvent altérer les moyens mouvemens des trois premiers ſatellites de Jupiter, ne troublent point le rapport précédent entre ces mouvemens; d'où il ſuit que ſi ces corps ſont aſſujettis à des équations ſéculaires, celle du premier plus deux fois celle du troiſième doit être égale à trois fois l'équation ſéculaire du ſecond.

Pour déterminer ces équations, nous obſerverons que l'on a par ce qui précède,

$$q\,n^2.\,\text{ſin.}\,V = \frac{q\,\partial s}{\alpha\,\partial t} - \frac{q}{\alpha}.(i - 3\,i' + 2\,i'');$$

on aura donc en rejetant la quantité périodique $\frac{\partial s}{\partial t}$,

$$\frac{\partial n}{\partial t} = i - \frac{q}{\alpha}.(i - 3\,i' + 2\,i''),$$

$$\frac{\partial n'}{\partial t} = i' + \frac{q\,m}{\alpha\,m'}.(i - 3\,i' + 2\,i'').\frac{n'^{\frac{4}{3}}.(n - n'')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')},$$

$$\frac{\partial n''}{\partial t} = i'' - \frac{q\,m}{\alpha\,m''}.(i - 3\,i' + 2\,i'').\frac{n''^{\frac{4}{3}}.(n - n')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')}.$$

Si l'on intègre deux fois de ſuite, ces valeurs de ∂n, $\partial n'$, $\partial n''$; les termes proportionnels au carré du temps t, ſeront les équations ſéculaires des Satellites; les valeurs de ces équations ſeront par conſéquent

$$\tfrac{1}{2}.t^2.\left[i - \frac{q}{\alpha}.(i - 3\,i' + 2\,i'')\right],$$

$$\tfrac{1}{2}.t^2.\left[i' + \frac{q\,m}{\alpha\,m'}.(i - 3\,i' + 2\,i'').\frac{n'^{\frac{4}{3}}.(n - n'')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')}\right],$$

$$\tfrac{1}{2}.t^2.\left[i'' - \frac{q\,m}{\alpha\,m''}.(i - 3\,i' + 2\,i'').\frac{n''^{\frac{4}{3}}.(n - n')}{n^{\frac{4}{3}}.(n' - n'')}\right].$$

La valeur moyenne de V, eſt $180^d + \frac{i - 3i' + 2i''}{\alpha\,n^2}$;

ainſi en ſuppoſant $i - 3\,i' + 2\,i''$ poſitif, V ſeroit plus grand que 180 degrés, & l'on pourroit expliquer par-là, pourquoi toutes les Tables des ſatellites de Jupiter donnent $V > 180$ degrés: mais on doit obſerver que les quantités i, i', i'', doivent être inſenſibles relativement à $\alpha\,n^2$, puiſqu'autrement elles produiroient dans les moyens mouvemens des Satellites, des équations ſéculaires que

l'intervalle de temps écoulé depuis leur découverte jusqu'à nos jours, auroit rendues très-sensibles. On pourroit à la vérité diminuer ces équations par différentes suppositions sur les valeurs de m, m', m'', i, i', i''; supposons, par exemple, le Satellite m extrêmement petit relativement à m' & à m'', & qu'il se meuve dans un milieu résistant qui ne s'étende pas jusqu'à l'orbite du second Satellite; on aura $q = \alpha$, $i' = 0$, $i'' = 0$; les équations séculaires des trois Satellites seront nulles, & V sera égal à $180^d + \frac{i}{\alpha n^2}$. On pourra donc supposer $\frac{i}{\alpha n^2}$ égal à plusieurs minutes, sans qu'il en résulte aucune équation séculaire sensible dans les mouvemens des Satellites; car si d'un côté, le milieu dans lequel se meut le premier Satellite, tend à accélérer son mouvement, en l'approchant de Jupiter; d'un autre côté, l'action des deux autres Satellites, détruit l'effet de ce milieu, & conserve au premier Satellite son moyen mouvement & sa moyenne distance. Mais ces hypothèses & toutes celles du même genre, sont trop peu vraisemblables pour être admises; on doit donc regarder l'équation

$$\varepsilon - 3\varepsilon' + 2\varepsilon'' = 0,$$

comme une condition à laquelle les époques des Tables doivent nécessairement satisfaire.

XIII.

Sur les Excentricités & les Inclinaisons des orbites des Planètes.

CONSIDÉRONS présentement le second objet que nous nous sommes proposés de traiter dans ce Mémoire, & cherchons à établir d'une manière générale, que les excentricités & les inclinaisons des orbites des Planètes, sont constamment renfermées dans d'étroites limites; pour cela

nous allons rappeler ici les principaux résultats de la théorie connue des inégalités séculaires.

Si l'on prend pour plan fixe, celui de l'Écliptique à une époque donnée, & que l'on compte les longitudes, de l'équinoxe correspondant supposé invariable; si l'on nomme ensuite m, $m^{\prime}$, $m^{\prime\prime}$, &c. les masses des Planètes, celle du Soleil étant prise pour l'unité; a, $a^{\prime}$, $a^{\prime\prime}$, les demi-grands axes de leurs orbites; ea, $e^{\prime}a^{\prime}$, $e^{\prime\prime}a^{\prime\prime}$, &c. leurs excentricités; V, $V^{\prime}$, $V^{\prime\prime}$. &c. les longitudes de leurs aphélies; θ, $\theta^{\prime}$, $\theta^{\prime\prime}$, &c. les tangentes des inclinaisons de leurs orbites sur le plan fixe; enfin I, $I^{\prime}$, $I^{\prime\prime}$, les longitudes de leurs nœuds ascendans; les quantités e.sin. V, e.cos. V; $e^{\prime}$. sin. $V^{\prime}$, $e^{\prime}$.cos. $V^{\prime}$, &c; θ. sin. I, θ. cos. I; $\theta^{\prime}$. sin. $I^{\prime}$, $\theta^{\prime}$. cos. $I^{\prime}$, &c. seront données par des équations différentielles linéaires du premier ordre, dont les coéfficiens sont constans. Les excentricités & les inclinaisons étant fort petites, le système des équations relatives aux excentricités, est indépendant du système des équations relatives aux inclinaisons; en sorte que le premier système est le même que si les orbites étoient dans le même plan, & le second est le même que si les orbites étoient circulaires.

En intégrant le premier système, chacune des quantités e. sin. V, e. cos. V, $e^{\prime}$. sin. $V^{\prime}$, $e^{\prime}$. cos. $V^{\prime}$, &c. est exprimée par la somme d'un nombre fini de sinus & de cosinus d'angles proportionnels au temps t; les nombres par lesquels il faut multiplier ce temps, pour former ces angles, étant les racines d'une équation algébrique, d'un degré égal au nombre des Planètes; nous représenterons cette équation par (k). La même chose a lieu relativement aux équations du second système; mais l'équation dont dépend la formation des angles, n'est pas la même que pour le premier système; nous la représenterons par $(k^{\prime})$. On peut consulter sur cet objet, les Mémoires de cette Académie, pour l'année 1772, *IIe Partie, page 361*; & les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1782, *pages 243* & *262*.

Si toutes les racines des équations (k) & (k') ſont réelles & inégales, les valeurs des quantités précédentes, ne renfermeront ni arcs-de-cercle ni exponentielles, & par conſéquent elles reſteront toujours fort petites; il n'en ſera pas de même ſi quelques-unes de ces racines ſont égales ou imaginaires, car on ſait qu'alors les ſinus & les coſinus ſe changent en arcs-de-cercle ou en exponentielles: mais quelle que ſoit la nature des racines de ces équations, les valeurs de $e.\text{ſin.}\, V$, $e.\text{coſ.}\, V$, $e'.\text{ſin.}\, V'$, $e'.\text{coſ.}\, V'$, &c. ſeront toujours compriſes dans les formes ſuivantes:

$$e.\text{ſin.}\, V = \alpha f^{it} + \beta . f^{i't} + \text{\&c.}$$
$$+ \gamma t^{r} + \lambda . t^{r-1} + \text{\&c.} + h;$$
$$e.\text{coſ.}\, V = \mu . f^{it} + \varepsilon . f^{i't} + \text{\&c.}$$
$$+ \Phi t^{r} + \psi . t^{r-1} + \text{\&c.} + l;$$
$$e'.\text{ſin.}\, V' = \alpha' f^{it} + \beta' . f^{i't} + \text{\&c.}$$
$$+ \gamma' t^{r} + \lambda' . t^{r-1} + \text{\&c.} + h';$$
$$e'.\text{coſ.}\, V' = \mu' . f^{it} + \varepsilon' . f^{i't} + \text{\&c.}$$
$$+ \Phi' . t^{r} + \psi' . t^{r-1} + \text{\&c.} + l';$$

&c.

f étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt l'unité. Les coéfficiens $\alpha, \beta, \mu, \varepsilon$, &c, $\alpha', \beta', \mu', \varepsilon'$, &c. des exponentielles, ſont des quantités réelles ſans exponentielles, mais qui peuvent être fonctions de l'arc t, & de ſinus & de coſinus d'angles proportionnels à cet arc: les quantités $\gamma, \lambda, \Phi, \psi$, &c, h, l, $\gamma', \lambda', \Phi', \psi'$, &c, h', l', &c. ſont réelles, ſans arcs-de-cercle ni exponentielles, & par conſéquent conſtantes ou périodiques.

Suppoſons qu'abſtraction faite du ſigne, on ait $i > i'$, $i' > i''$, &c. e étant égal à $(e.\text{ſin.}\, V)^2 + (e.\text{coſ.}\, V)^2$, on aura

$$e^2 = (\alpha^2 + \mu^2) . f^{2it} + \text{\&c.}$$
$$+ (\gamma^2 + \Phi^2) . t^{2r} + \text{\&c.} + h^2 + l^2.$$

On aura pareillement

$$e'^2 = (\alpha'^2 + \mu'^2).f^{2it} + \&c.$$
$$+ (\gamma'^2 + \Phi'^2).t^{2r} + \&c. + h'^2 + l'^2.$$

& ainſi de ſuite; on aura donc ainſi les valeurs des excentricités des orbites.

Ces valeurs ne peuvent ſervir que pour un temps limité, après lequel les excentricités devenant fort grandes, la ſuppoſition qu'elles ſont peu conſidérables, & d'après laquelle elles ont été trouvées, ceſſe d'être exacte: on ne peut donc étendre à un temps quelconque, les réſultats obtenus dans cette ſuppoſition, qu'autant que l'on eſt aſſuré que les racines de l'équation (k), ſont toutes réelles & inégales; mais il ſeroit très-difficile d'y parvenir par la conſidération directe de cette équation. Voici un moyen fort ſimple de prouver que ni les exponentielles f^{it}, $f^{i't}$, &c, ni l'arc t & ſes puiſſances ne ſe rencontrent point dans les valeurs de $e.\text{ſin.}\,V$, $e.\text{coſ.}\,V$; $e'.\text{ſin.}\,V'$, $e'.\text{coſ.}\,V'$, &c.

XIV.

REPRENONS l'équation (9) de l'*article IV:* ſi l'on ſuppoſe e & θ très-petits, & que l'on néglige les quantités des ordres e^4, $e^2\theta^2$, & θ^4, elle donnera

$$e = m\sqrt{(a)} + m'\sqrt{(a')} + \&c.$$
$$- \tfrac{1}{2}.m.(e^2 + \theta^2).\sqrt{(a)} - \tfrac{1}{2}m'.(e'^2 + \theta'^2).\sqrt{(a')} - \&c.$$

mais les moyennes diſtances des Planètes au Soleil ne ſont point troublées par leur action mutuelle; on aura donc

$$m.(e^2 + \theta^2).\sqrt{(a)} + m'.(e'^2 + \theta'^2).\sqrt{(a')} + \&c. = \text{conſtante.}$$

Nous avons obſervé dans l'*article précédent*, que les valeurs de e, e', e'', ſont données par des équations indépendantes de celles qui donnent les valeurs de θ, θ', θ'', &c. en ſorte qu'elles

qu'elles ſont les mêmes que ſi θ, θ^{I}, θ^{II}, &c. étoient nuls; mais l'équation précédente devient dans cette hypothèſe,

$$\text{Conſt.} = m.e^2.\sqrt{(a)} + m^{\text{I}}.e^{\text{I}^2}.\sqrt{(a^{\text{I}})} + \&c.$$

les valeurs de e, e^{I}, &c. doivent donc ſatisfaire à cette équation, après un temps quelconque.

Si l'on y ſubſtitue les expreſſions générales de ces quantités, que nous avons données dans l'*article précédent;* on aura

$$\left.\begin{array}{l}\text{Conſt.} = [m.\sqrt{(a)}.(\alpha^2 + \mu^2) + m^{\text{I}}.\sqrt{(a^{\text{I}})}.(\alpha^{\text{I}^2} + \mu^{\text{I}^2}) + \&c.].f^{2it} + \&c. \\ \quad + [m.\sqrt{(a)}.(\gamma^2 + \varphi^2) + m^{\text{I}}.\sqrt{(a^{\text{I}})}.(\gamma^{\text{I}^2} + \varphi^{\text{I}^2}) + \&c.].t^{2r} + \&c. \\ \quad + m.\sqrt{(a)}.(h^2 + l^2) + m^{\text{I}}.\sqrt{(a^{\text{I}})}.(h^{\text{I}^2} + l^{\text{I}^2}) + \&c.\end{array}\right\}; \quad (b)$$

cette équation devant avoir lieu quel que ſoit t, il eſt néceſſaire que les coéfficiens des exponentielles & des puiſſances ſemblables de t, diſparoiſſent d'eux-mêmes; en égalant donc à zéro, le coéfficient de f^{2it}, on aura

$$0 = m.\sqrt{(a)}.(\alpha^2 + \mu^2) + m^{\text{I}}.\sqrt{(a^{\text{I}})}.(\alpha^{\text{I}^2} + \mu^{\text{I}^2}) + \&c.$$

mais $m.\sqrt{(a)}$, $m^{\text{I}}.\sqrt{(a^{\text{I}})}$, &c. ſont des quantités poſitives, & α, μ, α^{I}, μ^{I}, &c. ſont des quantités réelles; l'équation précédente ne peut conſéquemment ſubſiſter, qu'en ſuppoſant $\alpha = 0$, $\mu = 0$, $\alpha^{\text{I}} = 0$, $\mu^{\text{I}} = 0$, &c. d'où il ſuit que les exponentielles ne ſe rencontrent point dans les valeurs de e, e^{I}, &c.

L'équation *(b)* donne encore, en égalant à zéro, le coéfficient de t^{2r},

$$0 = m.\sqrt{(a)}.(\gamma^2 + \varphi^2) + m^{\text{I}}.\sqrt{(a^{\text{I}})}.(\gamma^{\text{I}^2} + \varphi^{\text{I}^2}) + \&c.$$

d'où l'on tire

$$\gamma = 0, \ \varphi = 0, \ \gamma^{\text{I}} = 0, \ \varphi^{\text{I}} = 0; \ \&c.$$

Ainſi les valeurs de e, e^{I}, &c. ne renferment point d'arcs-

de-cercle ; elles ſe réduiſent par conſéquent aux quantités périodiques,

$$\sqrt{(h^2 + l^2)},\ \sqrt{(h^{1^2} + l^{1^2})},\ \&c.$$

& ces quantités ont entr'elles, en vertu de l'équation *(b)*, la relation ſuivante

$$\text{Conſt.} = m.\sqrt{(a)}.(h^2 + l^2) + m^1.\sqrt{(a^1)}.(h^{1^2} + l^{1^2}) + \&c.$$

de manière que dans le développement du ſecond membre de cette équation, en ſinus & en coſinus, les coéfficiens de chaque ſinus & de chaque coſinus doivent diſparoître d'eux-mêmes.

Si l'on applique les mêmes raiſonnemens aux expreſſions de θ, θ^1, θ^{11}, &c. on s'aſſurera qu'elles ne renferment ni exponentielles ni arcs-de-cercle, & qu'elles ſe réduiſent à des quantités périodiques. En ſuppoſant comme dans *l'art. IV*,

$$\theta.\text{ſin.}\ I = p;\ \theta.\text{coſ.}\ I = q;$$
$$\theta^1.\text{ſin.}\ I^1 = p^1;\ \theta^1.\text{coſ.}\ I^1 = q^1;\ \&c.$$

on trouvera que les quantités p, q, p^1, q^1, &c. ont entre elles la relation,

$$\text{Conſt.} = m.\sqrt{(a)}.(p^2 + q^2) + m^1.\sqrt{(a^1)}.(p^{1^2} + q^{1^2}) + \&c.$$

les équations (10) & (11) de l'*art. IV*, donnent encore dans la ſuppoſition de p, q, p^1, q^1, &c. très-petits, les relations ſuivantes entre ces quantités,

$$\text{Conſt.} = m\,q.\sqrt{(a)} + m^1.q^1.\sqrt{(a^1)} + \&c.$$
$$\text{Conſt.} = m\,p.\sqrt{(a)} + m^1.p^1.\sqrt{(a^1)} + \&c.$$

De-là nous pouvons généralement conclure que les expreſſions des excentricités & des inclinaiſons des orbites des Planètes, ne renferment ni arcs-de-cercle, ni exponentielles; & qu'ainſi le ſyſtème des Planètes eſt renfermé dans des limites invariables, du moins lorſque l'on n'a égard qu'à leur action mutuelle.

OBSERVATIONS
SUR DES MORTS SUBITES
Occasionnées par la rupture du ventricule gauche du Cœur.

Par M. PORTAL.

ON ne pourroit croire, si les observations ne l'avoient appris, que le cœur, cet organe musculeux, dont les parois sont si épaisses, pût se rompre, & occasionner ainsi la mort la plus prompte : Harvée en a rapporté un exemple, dans son immortel Ouvrage sur la circulation du sang ; & les Anatomistes en ont depuis recueilli d'autres dont ils ont fait mention dans leurs Écrits.

Il suffit de lire les Ouvrages de M.[rs] Morgagni, Senac & Lieutaud, pour se convaincre que les oreillettes & les ventricules du cœur ont donné lieu, par leur rupture, à un épanchement de sang dans le péricarde. Ce qui doit le plus surprendre, c'est qu'il est prouvé par les observations de ces grands Médecins, que ce ne sont pas les oreillettes, dont les parois sont très-minces, qui s'ouvrent toujours, mais que c'est dans les ventricules, dont les parois sont prodigieusement épaisses & fortes, que ces sortes de ruptures sont les plus fréquentes; encore peut-on conclure qu'elles sont plus communes dans le ventricule gauche que dans le ventricule droit, quoique les parois de celui-ci soient très-souples si on les compare avec celles du ventricule gauche. Ce point de doctrine est du moins confirmé par mes observations & par celles des Anatomistes qui les ont recueillies, & que j'ai eu soin de consulter; ce qui est bien différent des simples dilatations qui sont plus communes dans les oreillettes que dans les

ventricules, de même qu'il eſt plus ordinaire de voir les oreillettes dilatées au-delà de leur calibre, que les artères, leſquelles s'ouvrent au contraire plus ſouvent que les veines.

Les Anatomiſtes ont rendu compte de toutes ces différences; mais comme ils n'ont pas également fixé leur opinion ſur les ruptures du ventricule gauche, & ſur les cauſes qui les produiſent, j'ai cru devoir communiquer à l'Académie mes obſervations & mes remarques ſur cette matière; ſi elles ne ſont pas entièrement nouvelles, elles concourront du moins à confirmer celles que divers Auteurs ont rapportées, entr'autres M.rs Morgagni, Senac, Haller & Lieutaud.

Ce fut en 1768, que j'eus occaſion de faire la première ouverture de ce genre, madame de Chabanes, qui demeuroit dans la rue des Jeûneurs, avoit joui juſqu'à l'âge de ſoixante ans, d'une aſſez bonne ſanté; elle commença alors de reſſentir de la difficulté de reſpirer; cette incommodité augmenta de plus en plus, elle étoit extrême, lorſqu'elle montoit un eſcalier ou dans ſa voiture; ſon pouls devenoit très-irrégulier, même intermittent, & ce n'étoit qu'après un certain temps qu'elle ſe remettoit dans ſon état naturel; ce qu'il y a de ſingulier, c'eſt que cette Dame étoit moins fatiguée par les voitures rudes, que par celles qui étoient le mieux ſuſpendues: elle vécut avec cette incommodité juſqu'à l'âge d'environ ſoixante-cinq ans. Elle avoit obſervé que la ſaignée étoit ſon meilleur remède, auſſi ſe faiſoit-elle ſaigner ordinairement deux ou trois fois l'année, & quelquefois davantage. Les plus légères inquiétudes lui occaſionnoient des palpitations; elle ſe mit un jour dans une violente colère pour une petite contrariété; les palpitations furent plus fortes que jamais, elle ne put plus reſpirer qu'avec une peine extrême, ſon viſage pâlit, ſes extrémités devinrent auſſi froides que de la glace, & elle périt.

J'aſſiſtai à l'ouverture du cadavre, avec M.rs de Vernage

& Malouin, qui avoient été ſes Médecins; voici ce que l'on trouva.

Il y avoit dans le bas-ventre un médiocre épanchement d'une ſéroſité rougeâtre; le foie étoit engorgé & très-dur, la véſicule du fiel étoit remplie par quatre pierres; elle s'étoit rétrécie & avoit la forme d'un canal, d'un diamètre preſque égal dans toute ſa longueur: il n'y avoit dans le bas-ventre aucune autre altération remarquable.

Ce fut dans la poitrine qu'on vit les cauſes de la mort; le péricarde étoit prodigieuſement diſtendu, & plein de ſang qui s'écoula en grande partie lorſqu'on l'ouvrit; les oreillettes du cœur étoient d'une grandeur énorme, le ventricule droit étoit au moins deux fois plus ample que le gauche, & leurs parois que cette diſtenſion avoit ſemblé devoir rendre plus minces, étoient au contraire plus épaiſſes, mais mollaſſes, elles étoient percées de pluſieurs déchirures; le ventricule gauche même, malgré la grande épaiſſeur de ſes parois, l'étoit en trois endroits; l'une de ces ouvertures étoit à la partie antérieure du cœur, proche la baſe, à côté du cordon tendineux qui lie l'aorte au cœur; les deux autres étoient dans le corps du même ventricule gauche, preſque parallèles à l'autre, & à un travers de doigt de diſtance; le ventricule droit étoit percé près la pointe, vers le bord ſupérieur de la cloiſon du cœur,

Les valvules ſigmoïdes de l'aorte, étoient endurcies & hériſſées de concrétions oſſeuſes; un amas de même nature, placé derrière elles, ne leur permettoit de donner au ſang qu'une iſſue très-étroite, & ce paſſage étoit encore gêné par des oſſifications dont l'aorte étoit incruſtée.

L'artère pulmonaire étoit oſſifiée en divers endroits proche de ſon orifice dans le ventricule droit; le corps annulaire ligamenteux qui l'attache avec ce ventricule, & qui ſoutient les valvules, étoit très-dur, inégal, & ſi gonflé que l'ouverture étoit ſingulièrement rétrécie; les valvules avoient la conſiſtance d'un cartilage, & les corpuſcules de Vidusvidius, ou ſi l'on veut, d'Arantius, qui les termi-

noient, étoient auſſi gros qu'un petit pois, au moins ſept ou huit fois plus qu'ils ne le ſont naturellement.

Vidusvidius a connu ces tubercules avant Arantius, auquel M. Morgagni fait honneur de la découverte : on peut voir, ſi l'on veut, à ce ſujet, notre hiſtoire de l'Anatomie.

Ce ſont ſans doute ces obſtacles qui ont empêché le cœur de ſe vider dans la ſiſtole ; la réſiſtance que le ſang a oppoſée aux contractions de ſes ventricules, a déterminé peu-à-peu leur dilatation, la circulation du ſang dans les vaiſſeaux coronaires a été ralentie, le ſang qu'ils contenoient s'eſt extravaſé entre les fibres du cœur qui s'en ſont abreuvées, leur tiſſu a été relâché, gonflé, & elles ſe ſont déchirées par leurs propres contractions.

On a trouvé dans quelques ſujets morts ſubitement par la rupture du cœur, & dont M. Morgagni nous a tranſmis l'hiſtoire, des altérations dans le cœur, à peu-près ſemblables à celles dont nous venons de parler; mais je ne connois aucun exemple de rupture des deux ventricules dans la même perſonne. Je n'ai pas non plus connoiſſance qu'on ait trouvé les tubercules des valvules auſſi gonflés qu'ils l'étoient dans celle qui a été l'objet de cette obſervation : ſans doute que le ramolliſſement extrême des parois du cœur, aura facilité leurs déchirures, dont la dernière cauſe aura été l'effort que le ſang aura fait ſur elles, ne pouvant ſortir librement.

Madame la Comteſſe de Nevron étoit d'un embonpoint extrême ; elle éprouvoit depuis long-temps de la difficulté de reſpirer lorſqu'elle ſe livroit à quelques exercices un peu fatigans. Elle vint de Nanci à Paris ſans s'arrêter ; le ſoir de ſon arrivée, elle éprouva une grande difficulté de reſpirer, avec des douleurs de coliques aſſez vives. Un Médecin qui fut appelé trouva ſon pouls extrêmement plein & d'une inégalité ſingulière ; cet état lui parut indiquer un vomiſſement prochain : il s'étoit propoſé de la purger le lendemain matin avec un ou deux grains d'émétique, ſi la Nature ne produiſoit d'elle-même auparavant quelqu'heureux changement.

Cet état ſe termina d'une manière plus tragique: Mme la Comteſſe de Nevron ſentit vers le milieu de la nuit que ſa reſpiration devenoit plus difficile; elle appelle du ſecours, on l'entend, on vole vers elle, & on la trouve expirante; ſon viſage étoit pâle, ſes mains & ſes pieds étoient froids; elle étoit ſans pouls, & l'on ne put entendre quelques foibles ſons qu'elle proféroit: on ne la vit que pour être témoin de ſa mort, qui fut très-précipitée.

Son corps conſerva long-temps la chaleur, ſur-tout la partie de la poitrine qui correſpond au cœur, ce qui fut cauſe qu'on en retarda l'ouverture au-delà du temps qu'on a coutume d'attendre pour une pareille opération. Ce corps étoit tellement ſurchargé de graiſſe, qu'il étoit d'un volume énorme; il y en avoit ſous la peau plus de quatre travers de doigt, les muſcles en étoient comme pénétrés; leur texture avoit cependant la ſolidité ordinaire; l'épiploon contenoit une quantité de graiſſe ſi prodigieuſe, qu'il occupoit la plus grande partie de la cavité abdominale; il y en avoit auſſi beaucoup entre les lames du méſentère, autour des reins; le foie étoit un peu plus volumineux, & renitent qu'il ne l'eſt ordinairement, & il y avoit cinq calculs biliaires dans la véſicule du fiel.

Il y avoit une ſi grande quantité de graiſſe entre les lames du médiaſtin, qu'elles étoient conſidérablement écartées, ce qui rétréciſſoit la capacité de la poitrine, & donnoit lieu à la compreſſion. Le cœur, qui étoit couvert d'une couche de graiſſe de plus de deux travers de doigt d'épaiſſeur, baignoit dans le ſang, dont le péricarde étoit plein; ce ſang s'étoit épanché dans le ſac membraneux par une ouverture qu'on découvrit à la baſe du cœur, près de l'artère-aorte; le rebord ligamenteux qui fixe cette artère avec le cœur, en étoit détaché dans la partie antérieure de ſa circonférence, au point qu'il en réſultoit un trou dans lequel je pus facilement introduire le petit doigt; du reſte, la ſubſtance du cœur étoit ſolide & compacte, comme elle l'eſt ordinairement. Les ventricules, même celui qui s'étoit

déchiré, n'étoient pas plus grands que de coutume, & il n'y avoit aucune marque d'érosion en aucun endroit de sa texture; les vaisseaux qui portent ou qui reçoivent le sang de ce viscère, n'étoient point altérés, de sorte qu'on ne pouvoit attribuer cet accident à aucun vice qui leur fût propre, ni à aucune affection contre nature des fibres musculeuses du cœur.

Malgré la grande quantité de sang épanché dans le péricarde, il y en avoit encore beaucoup dans les vaisseaux, soit dans les artères, soit dans les veines; & n'est-ce pas à un excès de ce liquide, ou à l'énorme quantité de graisse, qu'on doit attribuer la cause de cette rupture du cœur?

L'endroit où cette crevasse s'est faite, mérite d'être considéré; ce n'est pas à la pointe du cœur, qui est la partie la plus mince, & où ces sortes de ruptures se font le plus souvent, au rapport de M.[rs] Morgagni & Senac, mais à la base, dans l'endroit où le cœur paroît le plus fort par sa structure tendineuse.

Le ventricule du cœur, dans lequel cette ouverture contre nature, s'est faite, n'étoit pas plus dilaté qu'il ne l'est ordinairement, & ses parois n'étoient point ramollies, comme M.[rs] Senac & Morgagni l'ont trouvé dans des cœurs couverts de graisse, & qui s'étoient rompus, ce qui fait même une exception à ce qu'ils ont avancé; car ces célèbres Anatomistes ont cherché à attribuer à quelque altération dans la texture du cœur, la cause disposante de sa rupture. Ils croyoient que la graisse ramassée sur le cœur, en ramollissoit considérablement les fibres, ce qui faisoit que le sang, en le distendant pendant la diastole, terminoit par le rompre; ils ont aussi attribué quelquefois la première cause de cette rupture à un ulcère qui avoit rongé le cœur, lequel, tellement aminci, n'avoit enfin pu résister à l'impulsion du sang, ou même que l'ulcère avoit terminé par faire une ouverture complète au cœur, ce qui avoit donné lieu à une irruption du sang dans le péricarde.

Toutes

Toutes ces causes ont eu lieu, & leur existence a été confirmée par les observations que les Médecins que nous avons cités, ont rapportées & savamment discutées; mais dans le cœur dont il s'agit, il n'y avoit ni ramollissement, ni aucune trace d'ulcère, il paroît au contraire qu'il jouissoit de toute sa force, & que c'est moins par un défaut de solidité dans ses parois, que par un surcroît de résistance qu'elles n'ont pu vaincre, qu'elles ont crevé, ce qui aura eu lieu lors de la contraction, ou pendant la systole du cœur.

On ne peut raisonnablement admettre que la rupture du cœur se fasse pendant la diastole, comme M.rs Senac & Morgagni le croyoient, sans admettre, comme ils l'ont fait, une extension plus ou moins grande des fibres du ventricule, avant la rupture qui en augmente plus ou moins la capacité; mais comme dans ce cas, & dans quelques autres que je pourrois citer, le ventricule où l'on a trouvé la déchirure n'étoit pas plus ample, on doit conclure que ce n'est pas par une forte extension qu'elle s'est faite.

Si cette opinion étoit fondée, le cœur s'ouvriroit toujours à la poitrine des ventricules, où la paroi est aussi mince entre quelques trousseaux du réseau musculeux, que la plus fine membrane; or, ces observations démontrent le contraire.

Tous les trousseaux musculeux se rapprochent fortement pendant la contraction de cet organe; les vides qu'ils laissent pendant la dilatation du cœur, disparoissent, & ils forment une paroi infiniment plus solide que celle qu'on voit dans le cadavre; aussi arrive-t-il rarement que ce soit dans cet endroit que le cœur se déchire, ainsi qu'on peut le voir en lisant mes Observations & celles qui ont été recueillies par les Anatomistes. Les ruptures qui surviennent aux autres muscles, peuvent donner un surcroît de preuves à mon opinion; on en a vu plusieurs se rompre à la suite de violentes convulsions, ou de leurs excessives contractions; M. de Haller en cite des exemples mémorables.

D'ailleurs, quelles seroient les puissances qui pourroient pousser le sang dans les ventricules, avec assez de force

pour en faire crever les parois? ce ne pourroit être que les veines-caves & les oreillettes; mais leur tiſſu étant encore infiniment plus foible que celui des ventricules, on ne peut leur attribuer un pareil effet, à moins qu'on ne ſuppoſat que le tiſſu des ventricules fut extrêmement relâché, ce qui n'avoit point lieu dans la circonſtance préſente.

Une Dame, âgée de ſoixante-cinq ans, maigre, & d'une ſenſibilité extrême, éprouvant depuis long-temps des palpitations de cœur, qu'on croyoit ſpaſmodiques, faiſoit un grand uſage des bains tièdes; on lui conſeilla de les prendre froids, & bientôt on lui dit d'y joindre de la glace, & même d'en mettre ſur la tête, dans une grande veſſie, ce qu'elle exécuta fidèlement. Cependant la ſaiſon étant devenue très-froide, cette Dame crut devoir continuer de pareils bains, mais ils lui furent ſi funeſtes qu'elle y tomba en ſyncope. On la retira promptement de l'eau pour la mettre dans ſon lit, on tâcha de l'échauffer par divers cordiaux: vains ſecours, cette Dame ne put être rappelée à la vie. J'aſſiſtai à l'ouverture du corps, qui fut faite par M. Leduc mon Prévôt; & voici ce qu'elle nous apprit d'intéreſſant: le péricarde étoit tellement dilaté qu'il comprimoit le poumon gauche qui étoit refoulé vers la partie ſupérieure de la poitrine; il étoit plein de ſang, en partie liquide, & en partie grumelé; on découvrit un caillot conſidérable qui adhéroit à la partie poſtérieure & ſupérieure du cœur. Ce caillot ôté, on vit une ouverture d'environ huit lignes de longueur, laquelle aboutiſſoit dans le ventricule gauche qui étoit plein de ſang; l'ouverture de l'aorte étoit très-rétrécie, les valvules étoient auſſi dures qu'un cartilage, renverſées vers le cœur; deux colonnes charnues longitudinales avoient été déchirées, quelques-unes de leurs extrémités tendineuſes étoient adhérentes aux bords de la crevaſſe; ces bords étoient frangés, inégaux, comme ſeroient ceux d'un morceau de drap qu'on auroit déchiré par une forte extenſion. Il n'y

avoit aucune trace d'ulcère ; les parois du cœur avoient aussi leur solidité à peu-près naturelle ; & ce qu'il y a de remarquable , c'est qu'auprès de cette ouverture , contre nature , il y avoit une fossette bouchée par une membrane très - mince , qui n'étoit point percée. L'oreillette gauche, les vaisseaux pulmonaires & le ventricule droit étoient très - dilatés , & les parois de celui - ci étoient extrêmement minces ; il n'y avoit d'ailleurs aucune altération dans les valvules de l'artère pulmonaire , ni dans le reste de l'étendue de ce canal.

Les ossifications qui se sont formées à l'embouchure de l'aorte dans le ventricule gauche, ont été sans doute la première cause de la rupture du cœur. En rétrécissant le canal de l'aorte, elles ont opposé un obstacle à l'issue du sang , l'oreillette gauche n'a pu se vider avec la même facilité ; les veines pulmonaires ont été si fort engorgées, que l'artère pulmonaire n'a pu verser en elles le sang qu'elle avoit reçu du ventricule droit : ainsi de proche en proche il s'est fait un engorgement qui a donné lieu à la dilatation des vaissaaux pulmonaires, à celle des cavités du cœur ; & comme le ventricule droit a ses parois beaucoup plus foibles que le ventricule gauche, il est arrivé qu'elles se sont dilatées davantage que celles-ci, lesquelles au contraire se sont déchirées les premières.

Les bains d'eau à la glace auront occasionné un reflux de sang dans l'intérieur du corps ; le cœur en aura été surchargé, & le ventricule gauche ne pouvant s'en délivrer par ses contractions, se sera enfin ouvert. Nous avons vu d'autres dilatations du ventricule droit, occasionnées par des ossifications des valvules de l'aorte, ou par d'autres obstacles qui s'opposoient à l'issue du sang du ventricule gauche par l'aorte ; ce qui fait voir qu'il faut quelquefois chercher du côté gauche du cœur, les causes des altérations qu'on trouve du côté droit.

Il n'en est pas de même à l'égard des dilatations du ventricule gauche du cœur ; les causes qui les produisent

exiſtent toujours en lui, & celles qui ont leur ſiége dans le ventricule droit, ne peuvent les occaſionner. J'ai vu pluſieurs fois des dilatations du ventricule droit dans des ſujets chez leſquels, non-ſeulement le ventricule gauche n'étoit pas plus ample que de coutume, mais même étoit plus rétréci : j'en ai cherché la cauſe, & j'ai conſtamment trouvé un obſtacle qui s'oppoſoit à la circulation du ſang dans l'artère pulmonaire. Je puis citer, entr'autres, une obſervation de ce genre, que j'ai faite il y a une quinzaine d'années, dans la rue Mazarine : le ſieur Maſſon aimoit paſſionnément à donner du cor de chaſſe; il paſſoit à cet exercice les matinées, & ſouvent une bonne partie des après-dînées. Il éprouva de la difficulté de reſpirer & des crachemens de ſang; on lui preſcrivit divers remèdes, & on lui conſeilla ſur-tout d'abandonner l'uſage du cor de chaſſe. Ces conſeils furent inutiles; à peine fut-il un peu mieux, qu'il reprit le même inſtrument; il ſentit des palpitations de cœur, d'abord légères & paſſagères, mais elles devinrent en peu de temps très-vives & conſtantes. Il éprouvoit une ſuffocation continuelle, & ſe plaignoit ſur-tout d'une douleur vers le ſternum; la reſpiration devint difficile de plus en plus, ſon pouls d'une inégalité extrême, les jambes s'enflèrent: la ſituation la plus commode pour lui, étoit d'être debout ou aſſis ſur un ſiége très-haut. On remarqua que lorſqu'il étoit couché, il ſentoit quelque ſoulagement lorſqu'on lui comprimoit la poitrine légèrement à diverſes repriſes; malgré cela il ne pouvoit reſter long-temps dans cette ſituation; il eut des foibleſſes, ou plutôt des ſyncopes fréquentes; ſes extrémités reſtèrent, les deux derniers jours de ſa vie, froides comme du marbre: ce malheureux périt dans une eſpèce de ſuffocation.

Je me ſuis convaincu, par l'ouverture du corps, que cette mort avoit été occaſionnée par la dilatation du ventricule droit du cœur, qui étoit énorme & plein de ſang concret; le ſang n'a pu ſortir du ventricule droit auſſi facilement & en égale quantité qu'il y entroit par l'oreillette

qui lui correſpond, ce qui a donné lieu peu-à-peu à la dilatation de ſes parois; le ventricule gauche s'eſt trouvé rétréci, ce qui arrive toutes les fois que les dilatations du ventricule droit proviennent de quelque embarras dans l'ouverture ou dans le trajet des vaiſſeaux pulmonaires.

Telles ſont les obſervations que je m'étois propoſé de donner à l'Académie, elles prouvent:

1.° Que les ruptures du ventricule gauche du cœur ſont plus fréquentes qu'on ne croit généralement:

2.° Qu'elles peuvent ſurvenir ſans aucune altération, qui ait préalablement affoibli le tiſſu de ce viſcère:

3.° Qu'elles ſont ſouvent l'effet de la contraction, & non de la dilatation du cœur, produite par l'influx du ſang:

4.° Qu'ordinairement, lorſque le ventricule gauche eſt dilaté, le ventricule droit l'eſt auſſi; tandis au contraire que le ventricule droit eſt ſouvent dilaté ſans que le ventricule gauche le ſoit, lequel même eſt alors ſouvent rétréci.

La plupart de ces conſidérations m'ont paru intéreſſantes, ce qui m'a déterminé de les préſenter dans ce Mémoire; perſuadé d'ailleurs que, s'il eſt utile de connoître les moyens induſtrieux que la Nature emploie pour ſa conſervation, il ne l'eſt pas moins de ſavoir comment elle tend à ſa ruine, tant pour lui oppoſer les remèdes convenables lorſqu'il eſt poſſible, que pour s'en abſtenir lorſqu'ils ſont dangereux, ou même inutiles.

Je joindrai à ce Mémoire quelques obſervations ſur la rupture du ventricule & de l'oreillette gauches du cœur, qui m'ont été communiquées par M. Chauſſier, habile Chirurgien de Dijon; elles m'ont paru intéreſſantes & dignes d'être connues de l'Académie.

Le 14 Novembre 1769, M. Chauſſier fut chargé de faire la viſite juridique du cadavre du nommé Étienne Grappin, Laboureur de Saulon. Ce jeune homme, fort & vigoureux, conduiſoit une voiture chargée de pierres; ayant voulu s'aſſeoir ſur un des chevaux, le pied lui gliſſa,

il tomba, & la roue lui paſſa lentement ſur la clavicule gauche près du ſternum, & continua ſon trajet obliquement ſur le côté gauche de la poitrine : ce malheureux reſta ſur la place, ſans donner aucun ſigne de vie.

Après avoir enlevé les tégumens & les muſcles, M. Chauſſier trouva l'articulation ſternale de la clavicule relâchée, & ſur tout le côté gauche du thorax une ſuite de fractures qui s'étendoit obliquement de la partie antérieure à la partie poſtérieure.

La première côte étoit fracturée près le ſternum; mais cette fracture étoit incomplète, car il y avoit encore à la face externe quelques lames oſſeuſes qui maintenoient la continuité de cette côte ; de ſorte que l'on voyoit aiſément qu'elle avoit ſouffert une preſſion graduée & très-forte. La ſeconde côte étoit fracturée plus obliquement en dehors; & il y avoit au corps de cet os deux fractures diſtantes l'une de l'autre de près de trois pouces, ce qui étoit à peu près la largeur des jantes de la roue. Les autres vraies côtes & la première des fauſſes étoient également fracturées en deux endroits ; la ſeconde des fauſſes l'étoit ſeulement en un.

Les tégumens ne préſentoient aucun veſtige de contuſion; il n'y avoit pas une goutte de ſang infiltrée dans le tiſſu cellulaire ; la plèvre étoit entière, le poumon ſans altération ; mais le péricarde étoit fort diſtendu, plein de ſang coagulé, l'oreillette gauche étoit déchirée à ſa baſe près le ventricule ; & le déchirement étoit ſi conſidérable, que l'on pouvoit facilement porter par cette ouverture deux doigts dans le ventricule gauche.

Il paroît évident à M. Chauſſier que la rupture de l'oreillette gauche a été déterminée par la preſſion exercée ſur la croſſe de l'aorte ; on ne pourra en douter, ſi l'on ſe rappelle la direction & le trajet de la roue ; ſi l'on conſidère la ſituation de la clavicule, le relâchement de ſon articulation ſternale, le poids énorme de la voiture, la lenteur de ſa marche. Tandis que la roue cheminoit lentement ſur la poitrine, la croſſe de l'aorte comprimée

refusoit le passage au sang ; l'oreillette gauche devoit en regorger ; & la force contractive du cœur augmentant par la résistance qu'il éprouvoit, a déterminé la rupture dans l'endroit le plus foible de l'oreillette. C'est ainsi, ajoute ce célèbre Chirurgien, que nous voyons la matrice souffrir une rupture à son fond, par la force de sa propre contraction, toutes les fois qu'il y aura à son col ou au bassin un obstacle assez puissant pour résister à la sortie de l'enfant, &c.

Dans une suite d'expériences que M. Chaussier a faites sur l'irritabilité & la sensibilité des animaux, il a vu les cavités du cœur se dilater, se rompre presque dans l'instant, toutes les fois qu'il arrêtoit la circulation dans les grosses artères.

Si sur un animal vivant on serre par une ligature (ou ce qui est encore plus simple & plus commode) avec une pince le tronc de l'aorte, le ventricule & l'oreillette gauches se déchirent ; mais si on exerce cette pression sur le tronc de l'artère pulmonaire, le ventricule, l'oreillette droite, se distendent, se dilatent considérablement ; les contractions du cœur redoublent, chaque fibre frémit & palpite ; mais M. Chassier n'a point vu les cavités droites souffrir une rupture.

Deux autres observations, fournies par l'ouverture des cadavres, confirmeront que tout ce qui diminue le diamètre de l'aorte, détermine la dilatation & la rupture des cavités gauches du cœur ; elles appartiennent encore à M. Chaussier.

En Janvier 1771, un homme enfermé à la maison de force, périt subitement dans une violente dispute qu'il eut avec un de ses camarades : son cadavre servit aux démonstrations publiques d'Anatomie que M. Chaussier fait chaque année. Les parois du ventricule étoient amincies, étendues, & il y avoit à sa pointe une rupture oblongue d'environ un pouce.

Dans la dissection de la poitrine, ce Chirurgien trouva près la crosse de l'aorte une tumeur de la grosseur du poing, d'une nature presque cartilagineuse, qui enveloppoit le tronc de l'aorte, un peu au-dessous de la naissance des artères souclavières & carotides.

Cette tumeur avoit dans cet endroit tellement rétréci le diamètre de l'aorte, qu'à peine pouvoit-on y passer l'extrémité du petit doigt.

Depuis la répercussion d'une humeur dartreuse, une jeune fille avoit été sujette à une infinité de maux très-différens. Tantôt elle éprouvoit des douleurs vagues dans les membres, tantôt des douleurs de tête très-vives, des vertiges, des éblouissemens, mais toujours une pesanteur à la région du cœur, un état de langueur habituel, une gêne dans la respiration, souvent des oppressions, quelquefois des palpitations très-fatigantes: la suspension des règles fut regardée comme la cause de ces maux; tous les remèdes furent inutiles. Enfin, le 4 Juillet 1774, après trois ans de douleurs, cette fille périt tout-à-coup dans l'effort d'une toux, & en rendant quelques crachats sanglans: elle étoit alors âgée de vingt-un ans.

M. Chaussier fit l'ouverture du cadavre, & il trouva la cavité gauche de la poitrine pleine de sang, le cœur d'un volume extraordinaire; le péricarde tellement adhérent à ce viscère, qu'il ne put l'en détacher; l'oreillette & le ventricule gauches étoient tellement dilatés, qu'on pouvoit aisément y mettre les deux poings; leurs parois tellement amincies, qu'à peine pouvoit-on les distinguer de la substance même du péricarde; mais la dilatation anévrismale ne se bornoit pas aux cavités du cœur: les veines pulmonaires étoient également distendues, & il y avoit une rupture à la veine pulmonaire qui revient du lobe gauche. Cette rupture avoit près de neuf lignes, & étoit près l'entrée de la veine dans le poumon: l'aorte avoit son diamètre naturel; mais les valvules sigmoïdes étoient dures, épaisses, avoient la grosseur d'une petite amande, & renfermoient dans leur tissu une substance blanche & épaisse comme du plâtre, ce qui empêchoit la liberté du passage du sang, & avoit produit par degrés le vice d'organisation que M. Chaussier observa aux cavités gauches du cœur.

OBSERVATIONS

OBSERVATION
SUR LA NATURE ET SUR LE TRAITEMENT D'UNE MALADIE SINGULIÈRE.

Par M. PORTAL.

S'IL n'y a qu'une ſeule manière de ſe bien porter & de vivre, il y en a une multitude d'être malade & de mourir *. Depuis long-temps les Grands Anatomiſtes ſe ſont occupés à les connoître; mais il s'en faut de beaucoup que cette importante partie de la Médecine ſoit portée à ſon dernier degré de perfection.

A proportion qu'on ſe livre à l'étude des cauſes de nos maux, il ſemble qu'on en voit augmenter le nombre; cependant comme on ne parviendra jamais à les traiter avec ſuccès, que lorſqu'on ſera parvenu à les connoître, on comprend combien il importe pour les progrès de la Médecine, que ceux qui l'exercent, rendent publiques les obſervations particulières que la pratique leur fournit.

C'eſt ce qui m'engage de faire connoître l'hiſtoire d'une maladie ſingulière qu'a éprouvée le fils de M. le Prince Giuſtiniani, Romain. Il étoit d'une foible conſtitution, cependant il étoit parvenu juſqu'à l'âge de onze ans ſans éprouver de grandes maladies. C'eſt à cette époque qu'il commença à reſſentir quelques dérangemens dans les fonctions de l'eſtomac; il n'eut d'abord que de légères envies de vomir, quelques heures après le repas; mais bientôt il éprouva, après avoir mangé, de violentes douleurs dans la région de l'eſtomac; ces douleurs étoient ſuivies de

* *Multas rerum Natura mortis vias aperuit, & multis itineribus fata decurrunt. Et hæc conditio miſerrima humani generis, quòd naſcimur uno modo, multis morimur.* Annæi Senecæ controverſ. lib. VII, contr. I.

mouvemens convulſifs : il maigrit & dépérit de jour en jour.

On conſulta les Médecins les plus célèbres de Rome, & pluſieurs autres Médecins étrangers qui avoient de la réputation ; on fit divers remèdes, mais ſans ſuccès ; ce qui détermina les parens du jeune Prince, de le conduire à Paris pour l'y faire traiter.

Je fus appelé pour lui donner mes ſoins : voici quel étoit ſon état.

Environ deux heures après qu'il avoit pris quelque nourriture, il commençoit à éprouver une douleur obſcure dans le bas-ventre vers la région de l'eſtomac ; cette douleur ſe prolongeoit du côté gauche ſous les fauſſes côtes ; ſa reſpiration devenoit gênée de plus en plus ; ſes forces diminuoient, & dans peu il étoit obligé de s'aſſeoir accablé de fatigue. Après quelques inſtans il ſentoit ſa reſpiration devenir plus difficile, ſon viſage rougiſſoit, ſes yeux ſe gonfloient, devenoient ſaillans & très-fixes ; il éprouvoit un violent reſſerrement au goſier, ce qui le forçoit à ſortir la langue hors de la bouche, à diverſes repriſes, plus ou moins vîte, ſuivant le degré d'étouffement qu'il éprouvoit : ſa langue étoit alors d'un rouge violet & d'une épaiſſeur ſingulière ; chaque expiration étoit accompagnée d'un cri plaintif, & qu'on entendoit de très-loin.

Le malade logeoit alors ſur le Jardin du Palais-Royal, d'où l'on entendoit ſes cris, qui attiroient tous les jours ſous ſes fenêtres une multitude de perſonnes.

Dans cet état, il faiſoit des efforts continuels pour ſe relever de ſon ſiége ; mais à peine s'en étoit-il un peu éloigné, qu'il étoit forcé de ſe laiſſer tomber dans ſon fauteuil. Deux perſonnes l'aidoient dans ce cruel exercice pour l'empêcher de ſe bleſſer ; il ſe relevoit & s'abaiſſoit environ vingt fois par minute ; ce qui duroit depuis trois quarts-d'heure, juſqu'à une heure & demie.

M. le Prince Giuſtiniani avoit alors environ vingt ans, & il y en avoit neuf qu'il étoit dans un état à peu-près

pareil, & toujours environ deux heures après qu'il avoit mangé.

Cet état ſe terminoit par deux ou trois violentes expirations; le malade quittoit alors ſon ſiége & pouvoit rejoindre la compagnie; mais on juge bien qu'il étoit d'une foibleſſe extrême, ſoit pour le moral, ſoit pour le phyſique. Il étoit d'une maigreur ſingulière; ſon teint étoit couperoſé, il dormoit beaucoup, & ſa foibleſſe l'obligeoit de reſter long-temps au lit; il ne pouvoit ſoutenir que de très-petites promenades, quoiqu'il aimât mieux ſe mouvoir, que de reſter très-peu de temps debout ſans marcher.

Les fonctions de ſon eſprit étoient très-retardées pour ſon âge, mais on voyoit que cet état de foibleſſe dans l'eſprit tenoit à la foibleſſe du phyſique: les facultés de l'ame peuvent-elles ſe développer quand le corps ſouffre un dépériſſement continuel?

J'ai vu M. le Prince Giuſtiniani dans l'état que je viens d'expoſer, & comme il étoit très-ancien, & que le malade avoit d'ailleurs été traité par des Médecins d'un gtand nom, j'ai héſité d'entreprendre une pareille cure; cependant la ſingularité de cette maladie, & la triſte ſituation du malade, m'ont inſpiré le plus vif intérêt.

Je me ſuis fait rendre un compte exact des divers traitemens qui avoient été faits, & l'on penſe bien que dans l'eſpace de neuf ans, ce malade qui avoit conſulté beaucoup de Médecins, avoit fait un grand nombre de remèdes; il étoit important que je les connuſſe: ſouvent rien ne conduit mieux un Médecin à la découverte d'un bon remède, que la connoiſſance de ceux qui n'ont pas réuſſi, ou même qui ont été contraires.

Quelques Médecins, perſuadés que l'eſtomac du jeune malade manquoit de reſſorts, lui avoient fait prendre divers remèdes chauds. D'autres, qui avoient attribué la cauſe de la maladie à un excès d'irritation & de ſenſibilité dans cet organe, avoient donné des remèdes contraires aux premiers. Enfin il y avoit eu des Médecins qui avoient

cru pouvoir attribuer à des vers dans les voies alimentaires, la cause de la maladie, & qui avoient prescrit les remèdes qu'ils croyoient utiles d'après cette indication. Les erreurs de ces Médecins me conduisirent à de nouvelles recherches.

Je ne pouvois croire qu'un estomac trop relâché pût donner lieu à des vomissemens qui ne s'opèrent que par de fortes contractions de ce viscère. Je ne pouvois non plus admettre pour unique cause de cette étrange maladie, un excès de sensibilité & d'irritabilité d'estomac, quand je savois que le malade gardoit les alimens deux heures, quelquefois davantage, sans éprouver la plus petite douleur. Enfin étoit-il croyable que des vers pussent régulièrement, depuis plusieurs années, exciter les mêmes symptômes, à une heure fixe, après le repas, & que le malade n'en ressentît plus ensuite aucune atteinte?

Je crus devoir attribuer à une autre cause la maladie du jeune Prince, mais la difficulté étoit de la découvrir. Je craignois de me liver à des conjectures; le peu de succès des Médecins qui avoient été déjà consultés, devoient me les faire craindre: je crus pouvoir trouver dans le tact des viscères abdominaux, un moyen plus assuré. En effet, je reconnus que la région épigastrique étoit dure & gonflée, qu'il y avoit aussi de la résistance dans les hypocondres, sur-tout dans le gauche. On sentoit, en portant les doigts autour des fausses côtes gauches, une tumeur qui les débordoit d'un travers de doigt; on la sentoit principalement vers l'extrémité antérieure & inférieure de la dernière fausse côte gauche.

Cette tumeur n'étoit point dure au tact, elle obéissoit au doigt, comme si elle eût été formée par une pâte molle; elle étoit plus apparente pendant l'inspiration, & lorsque le malade avoit pris quelques alimens. Je présumai qu'elle avoit son siége dans la rate, dont le sang ramassé en trop grande quantité, augmentoit la capacité de ses diverses cellules.

J'avois déjà trouvé plusieurs rates gonflées de cette sorte, sans aucune autre altération apparente de sa structure, dans des sujets qui avoient éprouvé pendant long-temps des vomissemens, & qui avoient terminé par mourir dans le marasme. Je savois, d'après M. Lieutaud, que l'estomac étoit ordinairement d'autant plus ample que la rate étoit petite, ou d'autant plus rétréci que la rate étoit volumineuse: je savois, par des expériences faites sur des animaux vivans, que lorsque leur estomac est plein d'alimens, leur rate est rétrécie & presque vide de sang ; & je ne doutois pas que la même chose n'eût lieu dans le corps humain, soit d'après la position de la rate entre les fausses côtes gauche, & la grosse tubérosité de l'estomac, soit d'après les observations de M. Lieutaud, déjà citées. J'avois encore vu plus d'une fois (après le grand Baillou) dans des sujets pléthoriques, sur-tout chez les hommes hémorroïdaires & chez les filles qui vont être dans l'âge de puberté, qu'il y avoit un gonflement dans le côté gauche, qui étoit plus apparent après le repas, souvent suivi de vomissemens. J'avois attribué cette tumeur à l'excès de sang dans la rate, occasionné par la compression de ses vaisseaux veineux: Morgagni a trouvé la rate d'un volume monstrueux, dans des sujets, dont la veine splénique étoit comprimée par des tumeurs, par le pancréas lui-même, devenu squirreux.

Ces observations, qu'un examen réfléchi du malade rappela à ma mémoire, me portèrent à croire que dans le jeune malade, l'estomac, pressé & comprimé par la rate, étoit rétréci ; que les alimens ne pouvoient le gonfler, même le distendre suffisamment, qu'ils ne pouvoient aussi en sortir qu'avec peine, ce qui en rendoit le passage douloureux & difficile dans le duodenum, & produisoit les accidens ci-dessus énoncés. J'étois d'autant plus en droit de le croire, que le Prince étoit soulagé lorsqu'il avoit passé le temps de la première digestion; d'ailleurs, il étoit d'une si grande sensibilité, que je pensai que celle de l'estomac devoit être extrême, & que peut-être même

cette ſenſibilité donnoit lieu à une criſpation des parties internes, capable de rétrécir les veines deſtinées à rapporter le ſang de la rate, d'où provenoit ſon gonflement; je dirigeai mon traitement ſur ces indications.

Je conſeillai au malade de faire un grand uſage des remèdes relâchans, pour parvenir à celui des fondans. Il prit en conſéquence une vingtaine de bains tièdes, de ſuite, chaque jour un de deux heures; il but pendant deux ou trois ſemaines beaucoup d'eau de veau, d'eau de poulet, des émulſions.

On ajouta enſuite à ces boiſſons des ſucs dépurés des plantes chicoracées, à petites doſes; mais comme le malade les vomiſſoit ſouvent, ſoit parce qu'ils fatiguoient l'eſtomac par leur poids, ſoit parce qu'ils ne pouvoient pas facilement paſſer par le pylore, je fus obligé d'en faire ſuſpendre l'uſage, & je me bornai enſuite à preſcrire au malade, dans de l'eau commune, trois ou quatre fois par jour, un demi-gros, & même un gros de terre foliée, de tartre criſtalliſé. Ce fut le fondant qu'il ſupporta le mieux; cependant, comme il fut quelquefois ſuivi du vomiſſement, lors même qu'on l'avoit donné à des doſes très-inférieures à d'autres, qui avoient fort bien paſſé, je penſai qu'il falloit attribuer cette variation dans les vomiſſemens, à celle de l'irritation de l'eſtomac, & que ſi on parvenoit à l'émouſſer, on diminueroit les vomiſſemens. Je crus alors qu'il falloit aſſocier les calmans aux fondans, & je preſcrivis des pilules faites avec cinq grains d'*aſſa fœtida*, quatre grains de camphre & un grain de muſc.

Le malade prenoit trois fois par jour ces pilules, après qu'il avoit pris un demi-gros de terre foliée de tartre dans trois onces d'eau de menthe ſimple. On ajoutoit aux pilules du ſoir un ou deux grains de celle de cynogloſſe.

En énervant ainſi la ſenſibilité de l'eſtomac, la terre foliée du tartre n'étoit point rejetée par le vomiſſement, & jouiſſoit, comme fondant, de toute ſon énergie. De

cette manière, le malade parvint, pour la première fois, à prendre des remèdes ſans les vomir; & comme il importoit de lui donner l'aliment que ſon eſtomac ſupportoit le mieux, je le mis à l'uſage du chocolat, qu'il prenoit deux ou trois fois par jour, ce qui fut continué environ ſix ſemaines. Alors le chocolat paſſant parfaitement bien, & le malade n'éprouvant plus aucune eſpèce d'accident, il fut queſtion de le mettre peu-à-peu à l'uſage des alimens ordinaires.

Je crus devoir changer & augmenter ſa nourriture, par degrés; d'abord, on joignit les œufs au chocolat pour en faire une crême; enſuite je permis au malade quelques légumes herbacés, tels que les épinards & la chicorée: enfin, on paſſa ſucceſſivement à l'uſage des viandes hachées, bouillies & enfin rôties. M. le Prince Giuſtiniani parvint ainſi à prendre des alimens ſolides, dont il n'avoit point fait uſage depuis tant d'années.

Je ne puis dépeindre quelle fut la joie qu'il reſſentit le premier jour qu'il put digérer, ſans accident, les alimens qu'il avoit pris pour ſa ſubſiſtance; il ſe défioit de ſon bonheur: tous les jours les mêmes craintes ſe renouveloient, & ce ne fut qu'après un aſſez long eſpace de temps, que ſes digeſtions ne furent plus troublées par de cruelles inquiétudes.

Je ne puis m'empêcher d'obſerver ici, que les alimens les plus doux lui parurent d'abord très-forts au goût, & que ſon palais ne pouvoit ſupporter l'impreſſion de ceux qui avoient un peu plus de ſaveur. Cette ſenſation s'eſt émouſſée par des degrés bien dignes de remarque; ſemblable en cela à ceux qui voient le jour pour la première fois, après une opération de la cataracte, d'abord la plus foible lumière les bleſſe; peu-à-peu ils en ſouffrent une plus vive; enfin, ils la ſupportent, & elle leur devient néceſſaire comme à tous les autres hommes.

La région épigaſtrique, & les hypocondres, ſur-tout le

gauche, qui étoient engorgés depuis ſi long-temps, devinrent plus ſouples : la rate avoit perdu de ſon volume contre nature, & étoit, pour ainſi dire, rentrée dans ſes bornes: l'eſtomac pouvoit plus aiſément ſe dilater, & garder des alimens, ce qui s'eſt maintenu à peu-près dans le même état.

Cependant, on a remarqué deux ou trois fois, que les régions ſupérieures de l'abdomen commençoient à s'engorger de nouveau, ce qui a obligé de reprendre l'uſage des remèdes que je viens d'indiquer. J'ai conſeillé au malade les eaux de Vichy, à la doſe de deux verres tous les matins, pendant une vingtaine de jours, & lorſque j'ai cru néceſſaire de le purger, ce qui a eu lieu deux ou trois fois, j'ai préféré l'huile de *palma chriſti* aux autres purgatifs qu'il ne pouvoit ſupporter.

C'eſt par ce traitement heureux que M. le Prince Giuſtiniani eſt parvenu à digérer, avec facilité, tous les alimens dont on uſe ordinairement; auſſi s'eſt-il remis à vue-d'œil. Dans l'eſpace de quelques mois il a repris de l'embonpoint & des forces ; ſon eſprit s'eſt ſingulièrement développé ; & il étoit ſi content de l'heureux changement qu'il éprouvoit, qu'il ne vouloit plus abandonner l'uſage des remèdes que je lui avois preſcrits. Cependant je les lui fis diminuer par degrés, & lorſque je me fus bien aſſuré qu'ils lui étoient inutiles, je les lui fis ceſſer, en lui recommandant d'y recourir à l'automne & au printemps, pendant l'eſpace de quelques années; ce qu'il a fait avec ſuccès.

M. le Prince Giuſtiniani jouit aujourd'hui de la meilleure ſanté, & fait le bonheur & l'ornement d'une illuſtre famille.

Depuis cette époque, j'ai eu occaſion de me convaincre que diverſes maladies, qu'on avoit attribuées à l'eſtomac, venoient de la dilatation, contre nature, de la rate ou des veines qui en rapportent le ſang dans le tronc de la veine-porte, ſoit que ces cauſes exiſtaſſent ſéparément ou à la fois.

Cette dilatation variqueuſe de la rate ou de ſes veines, arrive après la ceſſation de quelques hémorragies critiques, ou lorſque la Nature ne peut les opérer. Elle eſt plus commune

commune qu'on ne croit, dans les jeunes personnes, surtout dans celles du sexe.

Chez elles, le tissu spongieux de la rate est si mou qu'elle se gonfle facilement par la seule stagnation du sang: dans les adultes, rarement c'est la rate elle-même qui se dilate par cette cause; mais cet état alors a lieu dans les veines qui sont plus souples, ce qui est ordinairement d'autant plus fâcheux qu'on le méconnoît; & comme plusieurs de ses rameaux veineux entourent en quelque manière le pylore, ils ne peuvent se gonfler sans le rétrécir, ce qui donne lieu aux accidens les plus graves, & dont on ne connoît souvent la cause que par l'ouverture du corps.

Les tuméfactions de la rate sont d'autant plus dangereuses, qu'elles se forment lentement, & qu'il y a de la dureté dans la partie gonflée; alors la stagnation du sang en est plutôt l'effet que la cause, & les remèdes différens qu'on est obligé de prescrire, n'ont jamais un effet aussi prompt, & rarement aussi efficace.

Cette question mérite d'être approfondie; je me propose de la traiter d'une manière plus étendue, dans un autre Mémoire.

OBSERVATIONS DE MERCURE,

Faites à l'École Royale-militaire.

Par M. D'AGELET. *(a)*

LE quart-de-cercle mural de 7 pieds $\frac{1}{2}$ de rayon, fait par M. Bird, en 1775, pour le compte de M. Bergeret, par les ſoins de M. de la Lande, m'ayant été confié en 1778, je n'ai ceſſé d'en faire uſage pour le bien de l'Aſtronomie. Un nouveau catalogue des Étoiles boréales a été le principal objet de mon travail, & j'ai déjà pluſieurs milliers d'obſervations; mais je n'ai pas négligé celles des Planètes, & j'en avois déjà huit cents, lorſqu'au mois de Mars 1782, j'eus l'honneur de préſenter à l'Académie mon Journal d'obſervations. M. de la Lande en a rapporté beaucoup dans le quatrième volume de ſon Aſtronomie, en 1781, & dans le huitième volume de ſes Éphémérides, en 1783; en voici quelques-unes de Mercure, elles ſont rares, c'eſt ce qui me détermine à les publier dès-à-préſent: M. de Lambre, habile Aſtronome, déjà très-connu de l'Académie, a bien voulu en faire les réductions, ainſi que de celles qui ont déjà paru dans les Éphémérides.

La latitude de mon obſervatoire *(b)* eſt $48^d\ 51'\ 5''$, il eſt à 7,"6 de temps à l'occident de l'Obſervatoire royal.

(a) M. d'Agelet étant parti pour faire le tour du Monde, au mois de Juillet 1785, il a laiſſé ſes Regiſtres d'obſervations à M. de la Lande, avec qui il obſervoit depuis 1768, c'eſt-à-dire dès l'âge de quinze ans, & cet Académicien s'eſt chargé de les publier.

(b) Cet obſervatoire a été démoli en 1786, mais on l'a reconſtruit un peu plus près du grand corps de bâtiment de l'École Militaire.

ANNÉES, MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN réduit à l'Obſervatoire.	LONGITUDE OBSERVÉE.	LATITUDE OBSERVÉE.
	H. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.
1779.			
Juin 3	22. 26. 26	1. 20. 40. 9	3. 49. 6 A.
1780.			
Janv. 14	22. 31. 32	9. 1. 14. 59	2. 26. 37 A.
21	22. 27. 10	9. 7. 31. 30	1. 7. 35 A.
Mai 27	22. 26. 6	1. 14. 21. 59	2. 53. 48 A.
28	22. 26. 32	1. 15. 46. 11	2. 47. 8 A.
29	22. 28. 11	1. 17. 13. 15	2. 39. 56 A.
Juin 2	22. 36. 45	1. 23. 27. 54	2. 5. 59 A.
8	22. 56. 0	2. 4. 8. 36	1. 3. 49 A.
9	23. 0. 0	2. 6. 4. 11	0. 52. 43 A.
Juillet 29	1. 51. 20	5. 4. 5. 6	1. 1. 54 A.
30	1. 51. 0	5. 5. 6. 55	1. 13. 7 A.
Sept. 12	22. 49. 53	5. 3. 18. 5	0. 33. 45 B.
Oct. 8	0. 49. 55	8. 3. 11. 42	2. 0. 50 A.
1781.			
Mars 7	1. 3. 46	0. 1. 46. 14	0. 17. 36 B.
10	1. 9. 28	0. 6. 49. 9	0. 55. 48 B.
13	1. 12. 49	0. 11. 13. 3	1. 35. 12 B.
14	1. 13. 19	0. 12. 30. 31	1. 47. 49 B.
15	1. 13. 24	0. 13. 41. 11	2. 0. 31 B.
16	1. 13. 9	0. 14. 45. 49	2. 12. 24 B.
17	1. 12. 28	0. 15. 43. 9	2. 23. 53 B.
18	1. 11. 21	0. 16. 33. 19	2. 34. 30 B.
Juillet 5	1. 50. 35	4. 8. 51. 13	0. 48. 4 B.
Août 25	22. 51. 0	4. 15. 28. 47	0. 40. 50 A.

MÉMOIRE

Sur le premier Drap de Laine superfine du crû de la France.

Par M. DAUBENTON.

Relû le 9 Juin 1784.

JUSQU'À PRÉSENT on n'a pu faire des Draps fins qu'avec la laine achetée chez les Espagnols; mais cette Nation qui a déjà établi assez de Manufactures pour employer toutes ses Soies, ne manquera pas de garder toutes ses Laines, dès que ses Fabriques de draps pourront les consommer en entier: alors il ne se feroit plus de draps fins en France, & nous serions obligés de les tirer de l'Espagne.

M.rs de Trudaine ayant prévu ce grand inconvénient pour le Commerce, me firent l'honneur de me consulter en 1766, afin de savoir s'il seroit possible d'améliorer les laines de France, au point de suppléer aux laines étrangères, dans nos Manufactures de draps fins. Les observations que j'avois faites depuis long-temps sur les races métisses des animaux domestiques, me firent penser que par un bon choix des béliers & des brebis pour leurs alliances, on pourroit rendre leurs laines plus fines ou plus longues. D'après cette considération, M.rs de Trudaine me proposèrent de faire les expériences nécessaires pour cet objet; je m'en chargeai avec d'autant plus d'espérance de succès, que le climat de la France me paroissoit plus favorable aux bêtes à laine, que celui de l'Espagne ou de l'Angleterre, parce qu'il y a moins de chaleurs en France qu'en Espagne, & moins de brouillards qu'en Angleterre.

M.rs de Trudaine obtinrent de M. de l'Averdy, alors Contrôleur général des finances, tout ce qui étoit nécessaire pour mes expériences. Le Gouvernement fit venir

ſucceſſivement des béliers & des brebis de Rouſſillon, de Flandre, d'Angleterre, de Maroc, du Tibet & d'Eſpagne. Je mis toutes ces races de bêtes à laine dans la bergerie que j'ai établie près de la ville de Montbard, dans un canton un peu montueux, & par conſéquent favorable à la production des laines ſuperfines qui étoient mon principal objet. Je ne conſtruiſis point d'étables, je tins tous ces animaux en plein air nuit & jour pendant toute l'année, ſans aucun abri: cette expérience eut un entier ſuccès, dont je rendis compte à l'Académie, en 1769, dans une Aſſemblée publique.

J'alliai les béliers dont la laine étoit la plus fine, avec des brebis à laine jarreuſe, qui avoient autant de poil que de laine, pour juger par ces extrêmes, de l'effet de la laine du bélier ſur celle de la brebis: je fus très-ſurpris de voir ſortir de ce mélange un bélier à laine ſuperfine. Cette grande amélioration me donna d'autant plus d'eſpérance pour le ſuccès de mon entrepriſe, qu'elle avoit été produite par un bélier de Rouſſillon; car je n'avois point alors de béliers d'Eſpagne.

En 1776, il me vint des béliers & des brebis d'Eſpagne; alors j'eus ſept races de bêtes à laine très-diſtinctes, y compris la race de l'Auxois, qui eſt le pays où ma bergerie eſt ſituée. J'ai perpétué juſqu'à préſent toutes ces races ſans mélange, pour ſavoir ce qu'elles deviendroient dans ma bergerie: j'ai auſſi allié ces ſept races entr'elles, pour avoir d'autres races métiſſes, & pour connoître à quel degré elles influeroient les unes ſur les autres, relativement à l'amélioration des laines.

Par ces expériences, ſuivies avec les plus grandes précautions pour qu'il n'y eût point d'équivoque, j'ai amené toutes les races de ma bergerie au degré de fineſſe de la laine d'Eſpagne, ſans tirer de nouveaux béliers de ce pays ni de Rouſſillon. On peut voir les preuves réelles de ces faits, ſur les troupeaux de ma bergerie, & ſur un petit

troupeau que j'ai fait venir à la ménagerie de l'École vétérinaire d'Alfort près de Charenton.

J'ai trouvé de la difficulté à me convaincre moi-même de cette belle amélioration : il y a des degrés de fineſſe dans les laines, qu'il eſt impoſſible de diſtinguer au doigt ni à l'œil ; lorſque j'y fus parvenu, je ne pouvois plus ſavoir ſi j'améliorois ou ſi je détériorois les laines par de nouveaux mélanges de races. Alors j'apportai des échantillons de ces laines à Paris, & après avoir conſulté les meilleurs connoiſſeurs en ce genre, je les trouvai auſſi incertains que moi, & j'en conclus que ni les gens qui vendent la laine d'Eſpagne, ni ceux qui l'achettent, ni les Manufacturiers qui l'emploient, n'en peuvent pas diſtinguer les différens degrés de fineſſe avant d'en avoir fait du drap.

Cependant il falloit néceſſairement que je miſſe de la préciſion dans les réſultats de mes expériences : pour y parvenir, j'imaginai de meſurer le diamètre des filamens de la laine, par un micromètre appliqué au microſcope. Ce moyen me réuſſit parfaitement, il me fit voir clairement les progrès de l'amélioration des laines : ce moyen eſt auſſi le ſeul qui puiſſe éclairer, à l'inſpection de la laine, le Manufacturier, ſur le degré de fineſſe que doit avoir le drap qu'il va fabriquer : mais le microſcope n'étant pas entre les mains de tout le monde, j'ai indiqué aux propriétaires de troupeaux & aux bergers, une manière fort aiſée de reconnoître les différens degrés de la fineſſe des laines : le détail de ces procédés eſt dans les Mémoires de l'Académie de 1777, & dans l'Inſtruction des Bergers, que j'ai publiée en 1782.

Après m'être aſſuré que mes laines étoient parvenues au degré de ſuperfin, il falloit encore les éprouver dans la fabrication du drap, & comparer celui qui en ſeroit fait, avec le drap de laine d'Eſpagne. L'année dernière, j'ai envoyé à M. l'Entrepreneur de la Manufacture royale de draps de Château-du-parc près de Châteauroux en

Berri, huit cents vingt-huit livres de mes laines lavées à dos : avant d'en faire le prix, il en a fait des draps de différentes couleurs; après ces épreuves, il s'est engagé à les payer au plus haut prix des laines d'Espagne transportées en France, & à un moindre terme pour l'échéance, parce qu'il a reconnu dans les laines que j'ai améliorées, plus de force & de nerf, avec la même finesse à l'œil, la même douceur au toucher; parce que non-seulement elles se sont tirées aussi fin à la filature, mais qu'elles ont souffert un tors beaucoup plus considérable sans se casser; & parce que les Ouvriers ont trouvé que la chaîne des draps fabriqués avec ces laines, étoit plus nerveuse & plus forte qu'avec les laines d'Espagne. Quoique les miennes aient été filées & tissues dans le fort de l'hiver dernier, les draps ont pris un foulage très-ferme, & sont devenus plus forts que les draps de laine d'Espagne, faits en France: ils ont plus de rapport avec ceux que les Anglois fabriquent. Le Manufacturier s'est empressé de faire de ces draps forts avec les laines que je lui ai envoyées, parce qu'il croit qu'ils seront plus durables, qu'ils résisteront mieux à la pluie, & qu'ils auront un meilleur débit dans le commerce du Nord. À présent il va travailler à faire avec ces laines, des draps souples & moelleux comme ceux que nous faisons avec les laines d'Espagne.

La fabrique du premier drap de laine superfine, du crû de la France, est un évènement important pour les Manufactures & pour le Commerce. Les moyens que j'ai donnés pour faire croître des laines superfines, d'après de longues expériences, dans plusieurs Mémoires & dans l'Instruction pour les Bergers, sont faciles & peu dispendieux; si nous les mettons en exécution, nous pourrons faire des draps fins avec nos laines. La durée de cette amélioration est déjà prouvée par seize ans d'expériences sur les laines de Roussillon, & par huit ans sur les laines d'Espagne.

Il y a en France plusieurs exemples de l'amélioration des laines à un grand degré de finesse: les propriétaires

de troupeaux, qui ont acquis des béliers dont la laine étoit plus fine que celle des brebis du pays, ont eu la ſatisfaction de voir leurs laines ſe perfectionner & augmenter de prix: des béliers & des brebis d'Eſpagne ſe ſont déjà perpétués pendant nombre d'années dans pluſieurs de nos provinces, ſans avoir dégénéré. Je ſuis très-convaincu par ma propre expérience & par beaucoup d'autres, que tous les pays montueux de la France peuvent produire des laines ſuperfines, & que nous aurons des laines très-longues dans les pâturages abondans de nos plaines.

J'ai vu avec plaiſir les ſages règlemens que l'Adminiſtration provinciale de Berri a faits pour l'établiſſement d'une école de Bergerie & de Parcage, & je me ſuis empreſſé de donner un de mes bergers pour en être le maître; j'enverrai auſſi des béliers de ma bergerie, qui m'ont été demandés pour cette province.

Les bêtes à laine étrangères ne ſont pas néceſſaires pour multiplier en France les laines ſuperfines & les laines longues: des béliers choiſis dans le Rouſſillon & dans la Flandre en produiront bientôt, ſi nous prenons de l'émulation, comme les Anglois, pour faire valoir nos troupeaux, & ſi le Gouvernement la favoriſe. Peut-être le beſoin nous rendroit-il encore plus actifs: ſi l'Étranger refuſoit de nous vendre des laines ſuperfines, nous ferions promptement des efforts pour faire croître ces laines en France, plutôt que de renoncer à la fabrication & au commerce des draps fins.

L'heureux ſuccès des épreuves que j'ai faites avec ſoin ſur les troupeaux & ſur les pâturages, pendant dix-huit ans, m'encourage à les continuer avec la même exactitude dans tout ce qui peut contribuer à l'amélioration des bêtes à laine. Je publierai inceſſamment une Inſtruction ſur la culture & l'emploi des Pâturages.

ADDITION

ADDITION AU MÉMOIRE
SUR LE
PREMIER DRAP DE LAINE SUPERFINE DU CRÛ DE LA FRANCE.

Par M. DAUBENTON.

Lû le 28 Août 1784.

LORSQUE j'ai lû à l'Académie un Mémoire ſur le premier Drap de laine ſuperfine du crû de la France, on n'avoit encore fabriqué que du drap fort avec les laines que j'ai améliorées: la mauvaiſe ſaiſon de l'hiver n'avoit pas permis de les filer aſſez fin, & de les fouler aſſez pour avoir des draps ſouples. On vient de faire de ces draps avec mes laines, à la Manufacture royale du Château-du-Parc; le Manufacturier a jugé qu'ils étoient auſſi doux que ceux qui ſont faits avec la plus belle laine d'Eſpagne, & il a remarqué dans chacune des opérations ſucceſſives de la fabrique, que la laine améliorée avoit un nerf particulier, c'eſt-à-dire, plus fort & plus ſenſible que celui de la laine d'Eſpagne. On avoit déjà obſervé la même qualité de laine, en fabriquant le drap fort dont il s'agit dans le Mémoire précédent.

Ces obſervations donnent lieu de préſumer que les laines qui ſeront améliorées dans l'intérieur de la France, pourront être, non-ſeulement auſſi fines, mais encore plus fortes & plus nerveuſes que les laines ſuperfines d'Eſpagne, & que cette force ſera d'autant moindre avec la même fineſſe, que les troupeaux ſe trouveront dans les provinces de France les plus méridionales: cette préſomption eſt fondée ſur mes propres expériences, & de plus, ſur le produit de la grande importation de bêtes à laine, qui fut faite, dans le quinzième ſiècle, d'Eſpagne en Angleterre.

Les Anglois diſtribuèrent mille béliers & deux mille

brebis de Castille, dans leurs provinces, chez différens particuliers; c'est-là l'époque principale de l'amélioration des laines angloises. Quel a été le produit de cette importation? qu'est devenue la laine superfine de Castille, dans les provinces d'Angleterre? elle a dégénéré de sa qualité de superfine, mais elle a acquis une autre qualité; elle s'est accrue en longueur, sur un sol frais & fertile, dont les pâturages abondans sont entretenus par l'humidité des brouillards.

En considérant l'état actuel des laines de France, nous voyons que les plus fines se trouvent naturellement dans des lieux élevés, tels que le Roussillon, qui est au pied des Pyrénées, la Bourgogne près de la source de la Seine, le Berri près des sources de l'Indre & du Théols: au contraire, les plus longues laines sont dans les plaines des provinces les plus basses, sur-tout dans la Flandre. Ce fut dans ce pays & dans le Brabant, qu'il y eut, au quatorzième siècle, une récolte de laine si abondante & si avantageuse aux habitans, que leur Souverain, Philippe-le-Bon, Duc de Bourgogne, voulut, dit-on, en perpétuer la mémoire, par l'institution de l'ordre de la Toison d'or.

On dit que dans le dernier siècle, on introduisit en Flandre une nouvelle race de bêtes à laine, que les Hollandois avoient tirée des grandes Indes, & établie sur les bords du Texel. Cette race est encore aujourd'hui fort abondante en laine longue; à en juger par les individus que j'ai disséqués, elle m'a paru différer des autres races, par la conformation, car j'y ai trouvé sept vertèbres dans les lombes, tandis que je n'en ai vu que six dans les individus des autres races. Cette conformation annonce que la race des bêtes à laine de Flandre, est susceptible d'une grande amélioration pour la taille de l'animal, & pour la quantité & la longueur de sa laine; il est à croire qu'elle surpasseroit les meilleures races angloises, quoiqu'il y ait déjà quelques-uns de leurs individus, dont la laine a jusqu'à vingt-deux pouces de longueur.

La Nature ſe modifie de mille manières dans les animaux domeſtiques, par les alliances; nous en voyons tous les jours des exemples auſſi inconteſtables qu'évidens. Les Naturaliſtes conviennent que tous les chiens ſont de même race, on en a de bonnes preuves ; cependant le grand danois eſt de très-haute taille, en comparaiſon des chiens les plus petits; le poil du lévrier eſt court, tandis que celui du chien-loup eſt beaucoup plus long; le mâtin a un poil gros & fort, au contraire celui du chien-bouffe eſt fin & ſouple: toutes ces différentes races d'une même eſpèce, viennent principalement des alliances de différens individus. L'eſpèce des moutons doit être ſujette aux mêmes variétés; nous avons déjà beaucoup de races de ces animaux, nous en ferons autant que nous le voudrons, comme il s'en eſt fait & comme il s'en fait tous les jours parmi les bœufs, les chèvres, les cochons, les lapins, les chats, &c. c'eſt une loi générale dans la Nature; tous les caractères des animaux qui ne ſont pas eſſentiels à leur eſpèce, peuvent changer, & former, pour ainſi dire, une infinité de races.

Ces races ſe maintiennent aiſément ſi l'on a ſoin d'allier leurs individus bien caractériſés, ſans aucun mélange d'autres races: nous avons des exemples toujours ſubſiſtans de cette ſucceſſion, dans les races ſoignées des chiens de chaſſe, & même dans des races peu ſoignées, telles que les cochons de Siam, les chiens de bergers, les chats d'Eſpagne, &c. une preuve encore plus convaincante, c'eſt mon expérience ſur les races de moutons de Rouſſillon & d'Eſpagne, que j'ai maintenues pendant pluſieurs années à une grande diſtance des pays dont elles ſont originaires, & dans un climat différent.

L'intérêt que M. de Calonne, Contrôleur général des finances, a pris à mon Mémoire *ſur le premier drap de laine ſuperfine, du crû de la France ;* & ſon empreſſement à le mettre ſous les yeux du Roi, & à le faire imprimer pour le répandre promptement dans le Public, prouvent que

ce Miniſtre projette de favoriſer l'amélioration des laines. Sur ce qu'il m'a fait l'honneur de me dire à ce ſujet; je ſuis perſuadé qu'il diſcutera avec autant de diſcernement que d'attention, les meilleurs moyens de faire cette amélioration, & qu'ils ſeront exécutés avec cette ſageſſe & cette prudence d'adminiſtration, ſi néceſſaires pour faire réuſſir, dans un grand royaume, des pratiques d'agriculture nouvelles & importantes.

M. le Comte de Vergennes eſt auſſi convaincu de la néceſſité preſſante d'améliorer les laines de France, pour le bien du Commerce; ce Miniſtre veut y contribuer lui-même, en faiſant améliorer dans ſes terres, des troupeaux qui ſeront ſoignés par un berger formé dans ma bergerie.

MÉMOIRE
SUR L'EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA GÉNÉRATION DES SURFACES COURBES.

Par M. MONGE.

D'APRÈS les premières notions de l'application de l'Analyse à la Géométrie, l'on sait qu'une équation algébrique quelconque à deux variables, exprime la relation qu'ont entr'elles les coordonnées d'une certaine courbe; que les constantes qui entrent dans cette équation, sont des fonctions des paramètres de la courbe, c'est-à-dire, des droites qui doivent servir à sa construction; & que lorsqu'on assigne à ces constantes des valeurs particulières, la courbe à laquelle appartient l'équation, est absolument déterminée. Mais si l'on donne à ces constantes successivement différentes valeurs, la courbe, sans changer de caractère, change de forme & de position, en sorte que si l'on regarde les paramètres comme susceptibles de toutes les valeurs possibles, l'équation dans laquelle les constantes ont alors des valeurs arbitraires, n'appartient plus à une courbe particulière; elle exprime le caractère dont on vient de parler, c'est-à-dire, une propriété commune à toutes les courbes d'une même famille, & pour lesquelles ces paramètres sont indifférens: il en est de même des équations à trois variables pour les surfaces courbes.

On peut exprimer de deux manières, que des paramètres sont arbitraires, 1.° en les représentant par des caractères d'un genre particulier, comme on représente les quantités constantes par les premières lettres de l'alphabet, & les variables par les dernières; 2.° en différenciant l'équation algébrique successivement autant de fois qu'il y a

de paramètres, & éliminant enſuite ces paramètres à l'aide des équations différentielles : l'équation aux différences ordinaires, à laquelle on arrive par ce moyen, exprime la propriété dont jouiſſent toutes les courbes ou toutes les ſurfaces de la même famille, indépendamment des paramètres qui ont diſparu par la différentiation, & qui par conſéquent ſont indifférens.

Pareillement, ſi l'on conçoit qu'une ſurface courbe ſoit engendrée par le mouvement déterminé d'une certaine courbe, & que cette courbe ſoit donnée, c'eſt-à-dire, que l'on connoiſſe comment deux de ſes coordonnées ſont fonctions de la troiſième, l'équation de cette ſurface ſera parfaitement déterminée; mais elle contiendra les fonctions dont on vient de parler, puiſque par-tout, à la place des deux coordonnées de la courbe génératrice, on aura dû mettre leurs expreſſions par le moyen de la troiſième. Si l'on ſuppoſe donc que ces fonctions viennent à varier de forme, c'eſt-à-dire, que la courbe génératrice change de nature, la ſurface, ſans changer de caractère, variera de forme & de poſition dans l'eſpace; en ſorte que ſi l'on regarde les fonctions comme ſuſceptibles de toutes les formes poſſibles, l'équation ne ſera plus celle d'une ſurface particulière, elle exprimera une propriété commune à toutes les ſurfaces engendrées de la même manière, & pour leſquelles la courbe génératrice eſt indifférente.

On peut de même exprimer de deux manières, qu'une fonction eſt arbitraire, 1.° en la repréſentant par un caractère particulier; 2.° en différenciant l'équation algébrique par rapport à chacune des variables principales, & éliminant enſuite les fonctions par le moyen des équations différentielles : l'équation aux différences partielles, à laquelle on eſt alors conduit, énonce la manière dont la ſurface eſt engendrée, ſans rien ſtatuer ſur la nature de la courbe qui a ſervi à cette génération, & dont il ne reſte aucune trace dans l'équation.

J'ai déjà donné, dans différens Mémoires, les expressions des générations de plusieurs surfaces courbes; par exemple, 1.° l'équation

$$b\frac{dz}{dx} - a\frac{dz}{dy} = \frac{ab}{\beta},$$

dont l'intégrale est

$$ax - \beta z = \varphi(ax - by),$$

exprime que la surface est cylindrique, c'est-à-dire, qu'elle est engendrée par le mouvement d'une base quelconque, & qui est indifférente, le long d'une droite, dont les équations sont

$$ax - by = 0,$$
$$ax - \beta z = 0.$$

2.° L'équation

$$y\frac{dz}{dx} - x\frac{dz}{dy} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

exprime qu'une surface est engendrée par la révolution d'une courbe quelconque autour de l'axe des z, sans rien statuer sur la nature de la courbe génératrice, qui est indifférente.

3.° L'équation

$$\frac{ddz}{dx^2}\,\frac{ddz}{dy^2} = \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)^2,$$

dont l'intégrale est le résultat de l'élimination de V des deux équations suivantes,

$$y - \varphi V = (x - V)\varphi' V,$$
$$z - \psi V = (x - V)\psi' V,$$

ou de ces deux-ci,

$$z = x\varphi V + y\psi V + V,$$
$$x\varphi' V + y\psi' V + 1 = 0,$$

énonce qu'une ſurface eſt développable, c'eſt-à-dire qu'elle eſt engendrée par le mouvement d'une droite qui ne ceſſe pas d'être tangente à une même courbe à double courbure quelconque, courbe qui peut être tout ce qu'on voudra, puiſqu'il n'en eſt pas queſtion.

4.° L'équation qui exprime qu'une ſurface eſt engendrée par le mouvement d'une droite quelconque, ſans rien dire de particulier ſur les trois courbes qui ont dirigé ſon mouvement, eſt

$$m^3 \frac{d^3 z}{dx^3} - 3m^2 \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + 3m \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} - \frac{d^3 z}{dy^3} = 0\,;$$

en faiſant pour abréger,

$$m^2 \frac{ddz}{dx^2} - 2m \frac{ddz}{dx\, dy} + \frac{ddz}{dy^2} = 0,$$

& ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination de l'arbitraire z' des deux équations

$$z = x\varphi z' + z',$$
$$y = x\psi z' + \pi z'.$$

Dans les deux premiers exemples, la ligne génératrice eſt indifférente, & c'eſt la loi de ſon mouvement qui eſt énoncée par l'équation aux différences partielles; dans les deux autres, au contraire, les lignes génératrices ſont conſtamment des droites, ce ſont les courbes qui dirigent leurs mouvemens, qui ſont arbitraires, & l'équation différentielle énonce comment le mouvement eſt dirigé.

Je me propoſe dans ce Mémoire, de trouver l'équation qui exprime qu'une ſurface eſt engendrée d'une manière quelconque, par une courbe conſtante de forme & variable de poſition dans l'eſpace, ſans dire rien de particulier ni ſur la nature de la courbe génératrice, ni ſur celles qui dirigent ſon mouvement; mais avant que d'entrer dans cette généralité, je vais commencer par quelques cas particuliers, plus faciles à ſuivre.

I.

I.

Exprimer qu'une ſurface courbe eſt engendrée par la circonférence d'un cercle dont le rayon eſt conſtant, & dont le plan eſt toujours normal à la courbe parcourue par ſon centre

Tout étant rapporté à trois plans rectangulaires, ſoient x, y, z les trois coordonnées de la ſurface demandée, a le rayon du cercle générateur; & x', y', z', les trois coordonnées du centre. Si les équations de la courbe parcourue par le centre, ſont repréſentées par $y = \varphi z$ & $x = \psi z$, on aura $y' = \varphi z'$ & $x' = \psi z'$. Cela poſé, puiſque le rayon du cercle eſt $= a$, on aura

$$(A) \quad (z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2 = a^2,$$

équation dans laquelle z' doit être déterminé par la conſidération que le plan du cercle eſt normal à la courbe parcourue par le centre. Or cette conſidération comporte que la diſtance du point de la ſurface au point de la courbe, ne varie pas lorſque z' varie; il faut donc que la différentielle de la valeur de a, priſe en ne faiſant varier que z', ſoit nulle; donc on aura pour déterminer z',

$$(B) \quad z - z' + (y - \varphi z')\varphi' z' + (x - \psi z')\psi' z' = 0.$$

Les deux équations *(A)* & *(B)* comprennent la ſolution de la queſtion, en ſorte que ſi la courbe parcourue par le centre, étoit donnée, c'eſt-à-dire, que l'on connût les formes des fonctions φ & ψ, en éliminant z' de ces deux équations, on auroit en x, y, z, celle de la ſurface demandée. Mais ſi l'on veut avoir l'équation de la ſurface, indépendamment de la courbe parcourue par le centre du cercle générateur, il faut regarder les fonctions φ & ψ comme arbitraires, & les faire diſparoître par la différenciation.

Dans le cas préſent, cette opération eſt très-facile, car en vertu de l'équation *(B)*, la différentielle de la première,

prise en ne faisant varier que z', étant nulle, il faut différencier l'équation *(A)* par rapport à x, puis par rapport à y, & regarder z' comme constant dans les deux cas; donc si l'on fait, pour abréger, $dz = pdx + qdy$, $ddz = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2$, & $1 + p^2 + q^2 = k^2$, les deux différentielles de l'équation *(A)*, seront

$$(C) \quad (z - z')p + x - \psi z' = 0,$$
$$(D) \quad (z - z')q + y - \varphi z' = 0,$$

qui donnent immédiatement

$$(E) \ (z - z')p + x = \pi \{(z - z')q + y\},$$

π étant une nouvelle fonction arbitraire. Si l'on substitue dans *(A)* les valeurs de $x - \psi z'$ & de $y - \varphi z'$ que donnent les équations *(C)* & *(D)*, on aura

$$z - z' = \frac{a}{k},$$

& l'équation E devient

$$(F) \ \frac{ap}{k} + x = \pi \left\{\frac{aq}{k} + y\right\},$$

qui est délivrée de l'indéterminée z', & qui ne contient plus qu'une fonction arbitraire.

Si l'on fait évanouir cette fonction à la manière ordinaire, c'est-à-dire, en différenciant par rapport à x, puis par rapport à y, on trouve pour équation aux différences partielles secondes,

$$(G) \ a^2(rt - s^2) + ak[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + k^4 = 0.$$

C'est cette équation qui exprime qu'une surface est engendrée par la circonférence d'un cercle constant de rayon, & dont le plan est toujours normal à la courbe parcourue par le centre, sans statuer rien de particulier sur la nature de cette courbe.

I I.

On pourroit arriver directement à l'équation *(E)* par les considérations géométriques; en effet, la surface dont il s'agit, jouit de cette propriété, que pour tous les points placés sur la circonférence d'un même cercle générateur, les normales passent par un même point qui est le centre de ce cercle, ce qui n'a pas lieu pour des points placés sur des circonférences différentes; donc la surface est telle, que si sur la normale on prend un point distant de la surface d'une quantité égale au rayon, ce point sera constant ou variable: constant si le point de la surface par lequel on mène la normale, se meut sur la circonférence d'un même cercle: & variable si le point de la surface passe d'un cercle à un autre; donc les coordonnées du point de la normale, varient ensemble & sont constantes ensemble; donc elles sont fonctions l'une de l'autre: il ne s'agit donc plus que de trouver les expressions de ces coordonnées.

Or, les coordonnées rectangulaires d'une surface courbe, étant x, y, z; & celles de la normale, rapportées aux mêmes plans, étant x', y', z', les équations des projections de la normale sur les trois plans rectangulaires, sont

$$(z - z')p + x - x' = 0,$$
$$(z - z')q + y - y' = 0,$$
$$(y - y')p - (x - x')q = 0;$$

donc si lon prend sur cette normale une quantité $= a$, l'amplitude de cette quantité sera

dans le sens des x $\frac{ap}{k}$,

dans le sens des y $\frac{aq}{k}$,

dans le sens des z $-\frac{a}{k}$;

& parce que les coordonnées du centre sont égales à celles du point de la surface, augmentées respectivement des

amplitudes que l'on vient de trouver, il s'ensuit que les coordonnées seront

dans le sens des x $\quad x + \frac{ap}{k}$,

dans le sens des y $\quad y + \frac{aq}{k}$,

dans le sens des z $\quad z - \frac{a}{k}$;

posant donc que deux de ces coordonnées sont fonctions l'une de l'autre, on aura trois équations, dont l'une sera l'équation *(F)*, & qui seront chacune indifféremment l'intégrale complète de l'équation *(G)*, qu'elles produiront également par la différenciation.

I I I.

Enfin on pourroit encore obtenir immédiatement l'équation *(G)*; car pour peu que l'on soit accoutumé aux considérations géométriques, on voit évidemment que dans la surface dont il s'agit, le rayon du cercle générateur est un des deux rayons de courbure de la surface, & que ce rayon est constant. Or, l'expression des rayons de courbures d'une surface courbe donnée par M. Euler *(Mémoires de Berlin, 1760)*, est, en nommant R le rayon,

$$R^2(rt - s^2) + Rk[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 - p^2)t] + k^4 = 0;$$

donc pour énoncer la propriété de la surface, il faut faire dans cette équation, $R = a$, ce qui donne l'équation *(G)*.

I V.

La manière ordinaire de faire évanouir une fonction arbitraire, est, comme nous venons de le pratiquer, de différencier successivement l'équation, en regardant x, puis y, comme seule variable, ce qui donne deux nouvelles équations, dans lesquelles entrent la fonction arbitraire, & sa différentielle qui est une autre fonction sur laquelle on ne doit

pareillement rien ſtatuer; d'éliminer ces deux fonctions des deux équations différentielles & de la propoſée, & le réſultat eſt l'équation aux différences partielles qui énonce la même choſe que l'équation intégrale: cette méthode a l'inconvénient d'introduire, par la différenciation, une fonction de plus à éliminer, ce qui augmente le nombre des équations & le travail de l'élimination. Si au lieu de différencier l'équation, & par rapport à x, & par rapport à y, on la différencie une ſeule fois, en regardant comme conſtante la quantité qui eſt ſous la fonction, 1.° la différenciation devient plus facile, parce que la fonction devient elle-même une conſtante arbitraire; 2.° l'on n'a qu'une ſeule fonction à éliminer de la propoſée, par le moyen de la différentielle; mais lorſqu'on regarde comme conſtante la quantité qui eſt ſous la fonction, c'eſt-à-dire, lorſqu'on regarde ſa différentielle comme nulle, les quantités dx & dy ceſſent d'être arbitraires, & l'on établit entr'elles un rapport qu'il faut introduire dans le calcul, & ſubſtituer par-tout dans la différentielle à la place de $\frac{dx}{dy}$.

Par exemple, ſi l'on a une équation en x, y, z, & $\varphi\,\omega$, ω étant donnée en x, y, z, & qu'on différencie cette équation, en regardant ω comme conſtante, ſa différentielle ſera

$$M dx + N dy + P dz = 0,$$

ou à cauſe de

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$M dx + N dy + P(p\,dx + q\,dy) = 0;$$

mais regarder ω comme conſtante, c'eſt ſuppoſer

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\omega}{dy}\right) dy = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{d\omega}{dy} : \frac{d\omega}{dx};$$

donc il faut ſubſtituer cette valeur de $\frac{dx}{dy}$, ce qui donne

$$(M + Pp)\frac{d\omega}{dy} - (N + Pq)\frac{d\omega}{dx} = 0,$$

que l'on trouve également par l'autre méthode, & de laquelle on éliminera la fonction $\varphi\,\omega$, par le moyen de la propoſée.

On voit donc que ſi l'on repréſente par m la valeur de $\frac{dx}{dy}$, qu'on obtient en égalant à zéro la différentielle de la quantité qui eſt ſous la fonction, la differenciation dont il s'agit s'exécute préciſément comme une differenciation ordinaire, avec cela ſeulement de particulier, que par-tout, à la place d'une différentielle ſimple dV, il faut mettre $m\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}$; ainſi, la différentielle de x ſera m, celle de y ſera 1, celle de z ſera $mp + q$; enfin, celle de V^a ſera $aV^{a-1}(m\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy})$, & ainſi des autres.

Il ſuit de-là, que pour faire évanouir une fonction arbitraire d'une équation, il faut 1.° différencier cette équation, en regardant comme conſtante la quantité qui eſt ſous la fonction, & effectuer cette différenciation comme pour les différences ordinaires, avec cette condition, que par-tout, à la place d'une différentielle ſimple quelconque dV, il faut mettre $m\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}$; 2.° éliminer la fonction de la propoſée, par le moyen de la différentielle.

V.

Si, comme dans les recherches de la nature de celles dont il s'agit dans ce Mémoire, la quantité qui eſt ſous la fonction n'eſt pas connue immédiatement, & qu'elle ſoit donnée par une ſeconde équation, dans laquelle elle

ſoit encore ſous des fonctions arbitraires ; la quantité m ſera regardée comme une autre indéterminée, dont on aura la valeur, en différenciant la ſeconde équation, d'une manière analogue, ce qui produira l'équation néceſſaire pour l'éliminer.

Si les équations propoſées contiennent pluſieurs fonctions arbitraires de la même quantité, il faudra différencier chaque équation autant de fois qu'il y a de fonctions, en repréſentant par m' la différentielle de m, par m'' celle de m', . . . & ainſi de ſuite, & éliminer les fonctions, ainſi que les indéterminées m, m', m'', ... &c.

Enfin, ſi les équations, outre les fonctions arbitraires φ, ψ. . . contiennent encore leurs différentielles φ', ψ' . . . on opérera, comme l'on vient de dire, & on éliminera autant de fonctions arbitraires & d'indéterminées que le comportera le nombre des équations qu'on aura obtenues ; puis on différenciera l'équation réſultante, en regardant comme ſeule variable chacune des indéterminées qui reſteront, ce qui produira des équations nouvelles, en nombre ſuffiſant pour les éliminer.

Avant que de faire uſage de ce procédé, je vais l'éclaircir par des applications à quelques cas connus.

V I.

Soit propoſé de faire évanouir les trois fonctions arbitraires, & l'indéterminée z' des deux équations

$$z = x \varphi z' + z',$$
$$y = x \psi z' + \pi z';$$

qui expriment une ſurface engendrée d'une manière quelconque, par le mouvement d'une droite.

La première, différenciée trois fois de ſuite, donne immédiatement

$$(1) \qquad mp + q = m \varphi z';$$

$$(2) \quad m' p + m^2 r + 2 m s + t = m' \varphi z';$$

$$(3) \quad m'' p + 3 m' (m r + s) + m^3 \frac{d^3 z}{d x^3} + 3 m^2 \frac{d^3 z}{d x^2 d y} + 3 m \frac{d^3 z}{d x d y^2} + \frac{d^3 z}{d y^3} = m'' \varphi z';$$

mais la ſeconde, par de ſemblables différenciations, donne auſſi directement

$$(4) \quad 1 = m \;\psi z';$$

$$(5) \quad 0 = m' \psi z';$$

$$(6) \quad 0 = m'' \psi z';$$

introduiſant les valeurs $m' = 0$, $m'' = 0$, que donnent les équations (5) & (6) dans les équations (3) & (4), on a

$$m^2 r + 2 m s + t = 0,$$

$$m^3 \frac{d^3 z}{d x^3} + 3 m^2 \frac{d^3 z}{d x^2 d y} + 3 m \frac{d^3 z}{d x d y^2} + \frac{d^3 z}{d y^3} = 0,$$

qui, par l'élimination de m, produiſent l'équation aux différences partielles des ſurfaces généralement engendrées par le mouvement d'une ligne droite, & dont l'intégrale finie & complète eſt repréſentée par les deux propoſées.

VII.

Soit propoſé de faire évanouir les deux fonctions arbitraires & la quantité V des deux équations

$$z - \psi V = (x - V) \psi' V,$$

$$y - \varphi V = (x - V) \varphi' V,$$

qui expriment qu'une ſurface eſt développable, d'après la conſidération qu'elle eſt engendrée par le mouvement d'une droite qui eſt toujours tangente à une même courbe à double courbure.

La

La première, différenciée deux fois de ſuite, donne

$$(1) \qquad mp + q = m\psi' V;$$

$$(2) \qquad m'p + m^2 r + 2ms + t = m'\psi' V.$$

Mais la ſeconde, différenciée de la même manière, donne

$$(3) \qquad 1 = m\varphi' V;$$

$$(4) \qquad 0 = m'\varphi' V.$$

Subſtituant dans la ſeconde, la valeur $m' = 0$, que donne la quatrième, on a

$$m^2 r + 2ms + t = 0;$$

équation délivrée des quantités V, φV, $\varphi' V$, ψV, $\psi' V$ & m', & de laquelle il eſt impoſſible d'éliminer un plus grand nombre d'indéterminées, par le moyen des ſix équations qu'on a employées. Actuellement pour en éliminer m, je le différencie en regardant m comme ſeule variable, ce qui donne la nouvelle équation

$$mr + s = 0,$$

& par conſéquent $\quad ms + t = 0,$

d'où l'on conclut, en chaſſant m,

$$rt = s^2,$$

équation des ſurfaces développables, que j'ai déjà donnée.

Ces deux équations ſuffiſent pour faire entendre la méthode que j'emploîrai dans les recherches ſuivantes; & il eſt facile d'apercevoir qu'en la retournant, on peut l'appliquer utilement à l'intégration des équations aux différences partielles: nous aurons occaſion d'en donner quelques exemples.

VII.

Exprimer qu'une ſurface courbe eſt engendrée par le mouvement de la circonférence d'un cercle dont le rayon

eſt variable d'une manière quelconque, & dont le plan eſt toujours normal à la courbe parcourue par ſon centre.

Cette queſtion ne diffère de celle de l'*article I*, que parce que le rayon du cercle générateur, au lieu d'être conſtant, eſt une certaine fonction de l'ordonnée du centre; ſi donc on repréſente cette fonction par π, & que l'on mette $\pi z'$, au lieu de a, dans les équations (A) & (B) de l'*article I*, les équations

$$(A)\quad (z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2 = (\pi z')^2,$$

$$(B)\quad z - z' + (y - \varphi z')\varphi' z' + (x - \psi z')\psi' z' = 0,$$

qu'on obtiendra, contiendront l'expreſſion demandée; en ſorte que ſi l'on connoiſſoit la courbe parcourue par le centre, & la grandeur du rayon d'après la poſition du centre, ce qui détermineroit les formes des fonctions φ, ψ & π, on élimineroit z' de ces deux équations, & on auroit en x, y & z, celle de la ſurface engendrée. Mais ſi l'on veut ſimplement exprimer la génération, indépendamment de la courbe parcourue par le centre, & de la loi du rayon du cercle générateur, il faut regarder ces trois fonctions comme arbitraires, & les éliminer par la différenciation.

Pour cela, je différencie la première, en regardant z' comme conſtant, ce qui donne

$$(1)\quad (z - z')(mp + q) + (y - \varphi z') + m(x - \psi z') = 0,$$

dans laquelle la fonction π eſt évanouie. Je la différencie une ſeconde fois, & faiſant, pour abreger,

$$m^2 r + 2ms + t = M, \ \&\ 1 + m^2 + (mp + q)^2 = V,$$

j'obtiens

$$(2)\quad m'\{(z - z')p + x - \psi z'\} + (z - z')M + V = 0,$$

dans laquelle la fonction φ eſt évanouie. Enfin je la diffé-

rencie une troisième fois, & faisant, pour abréger,

$$m^3 \frac{d^3 z}{dx^3} + 3m^2 \frac{d^3 z}{dx^2\, dy} + 3m \frac{d^3 z}{dx\, dy^2} + \frac{d^3 z}{dy^3} = N,$$

je trouve

$$m''\{(z - z')p + x - \psi z'\} + 3m'\{(mp + q)p + m + (z - z')(mr + s)\} + 3(mp + q)M + (z - z')N = 0;$$

de laquelle éliminant $x - \psi z'$, par le moyen de la précédente, je tire

$$(3)\quad \left.\begin{array}{l} (z - z')\{- m'' M + 3m'^2 (mr + s) + m' N\} \\ - m'' V + 3m'^2 \{(mp + q)p + m\} + 3m'(mp + q)M \end{array}\right\} = 0,$$

& parce que chaque différenciation a fait disparoître une arbitraire, cette équation comporte l'équation *(A)*, ainsi que ses différentielles.

Je passe actuellement à l'équation *(B)* qui donne par la première différenciation

$$(4)\quad mp + q + \varphi' z' + m\psi' z' = 0;$$

par la seconde,

$$(5)\quad m'(p + \psi' z') + M = 0;$$

& par la troisième,

$$m''(p + \psi' z') + 3m'(mr + s) + N = 0,$$

de laquelle & de la précédente, éliminant $p + \psi' z'$, on obtient

$$(6)\quad m'' M + 3m'^2 (mr + s) - m' N = 0;$$

ces trois différenciations n'ont fait disparoître que deux nouvelles arbitraires, c'est-à-dire, $\varphi' z'$ & $\psi' z'$; mais l'équation (6) faisant évanouir z' dans l'équation (3) qui devient alors

$$(7)\quad \left.\begin{array}{l} - m'' V + 3m'^2 [(mp + q)p + m] \\ \qquad + 3m'(mp + q)M \end{array}\right\} = 0;$$

il s'enſuit que toute la ſolution de la queſtion eſt contenue dans les équations (6) & (7), deſquelles, éliminant m'', on tire

$$3m'\{M[(mp+q)p+m]-V(mr+s)\}\left.\begin{matrix} \\ +3M^2(mp+q)\end{matrix}\right\}=NV,$$

équation dans laquelle la quantité m' eſt abſolument arbitraire, & ne peut être déterminée par rien. Pour la faire évanouir, je différencie l'équation, en regardant m' comme ſeule variable, ce qui donne

$$M[(mp+q)p+m]-V(mr+s)=0,$$

& par conſéquent

$$3M^2(mp+q)=NV,$$

& en éliminant m de ces deux équations, on aura l'équation aux troiſièmes différences partielles, demandée.

Donc, en ſubſtituant pour M, N & V, les quantités qu'elles repréſentent, l'équation demandée eſt le réſultat de l'élimination de m des deux équations ſuivantes :

$$k^2\left\{m^3\frac{d^3z}{dx^3}+3m^2\frac{d^3z}{dx^2dy}+3m\frac{d^3z}{dxdy^2}+\frac{d^3z}{dy^3}\right\}=$$
$$3(m^2r+2ms+t)\{p(mr+s)+q(ms+t)\}.$$

$$\left.\begin{matrix} m^2\{s(1+p^2)-pqr\}+m[t(1+p^2)\\ -r(1+q^2)]-s(1+q^2)+pqt\end{matrix}\right\}=0.$$

VIII.

On peut encore réſoudre la même queſtion par une autre conſidération : il eſt en effet évident que ſur la ſurface dont il s'agit, la courbe génératrice eſt une ligne de moindre ou plus grande courbure; cette ſurface eſt donc telle que pour une même ligne de plus grande ou de moindre courbure, le rayon de cette courbure eſt conſtant, & qu'il eſt variable quand on paſſe d'une de ces lignes à une autre. Il faut donc exprimer que le rayon de courbure eſt fonction du paramètre par lequel les lignes de cette

courbure diffèrent les unes des autres; ainſi en repréſentant ce paramètre par a, & le rayon de courbure par R, le caractère de la ſurface demandée, eſt exprimé par l'équation $R = Fa$, F étant une fonction arbitraire.

Or j'ai fait voir dans le Mémoire ſur les Déblais & les Remblais, en 1781, que les équations des deux lignes de moindre ou de plus grande courbure d'une ſurface courbe, ſont les racines de l'équation

$$\left.\begin{matrix}\frac{dx^2}{dy^2}\{s(1+p^2)-pqr\}+\frac{dx}{dy}\{t(1+p^2)\\-r(1+q^2)\}-\{s(1+q^2)-pqt\}\end{matrix}\right\}=0,$$

& que les valeurs des deux rayons de courbure, ſont celles de la ſuivante,

$$\left.\begin{matrix}R^2\{rt-s^2\}+Rk\{r(1+q^2)-2pqs\\+t(1+p^2)\}+k^4\end{matrix}\right\}=0.$$

Soit fait, pour abréger,

$$r(1+q^2)-pqs=\alpha,$$
$$t(1+p^2)-pqs=\beta,$$
$$s(1+p^2)-pqr=\gamma,$$
$$s(1+q^2)-pqt=\delta,$$

ces deux équations deviennent

$$(A)\quad \gamma\frac{dx^2}{dz^2}-(\alpha-\beta)\frac{dx}{dy}-\delta=0;$$

$$(B)\quad R^2(\alpha\beta-\gamma\delta)+Rk^3(\alpha+\beta)+k^6=0;$$

dont les racines ſont

$$(C)\quad \frac{dx}{dy}=\frac{\alpha-\beta+\sqrt{[(\alpha-\beta)^2+4\gamma\delta]}}{2\gamma};$$

$$(D)\quad R=k^3\left\{\frac{-\alpha-\beta+\sqrt{[(\alpha-\beta)^2+4\gamma\delta]}}{2(\alpha\beta-\gamma\delta)}\right\};$$

ſur quoi il faut remarquer que pour une certaine ligne de moindre ou de plus grande courbure, & pour le rayon de cette courbure, les ſignes ſont les mêmes, tandis que ces ſignes ſeroient différens, ſi pour la ligne d'une de ces courbures, on conſidéroit le rayon de l'autre.

Cela poſé, ſi l'on intégroit l'équation *(C)*, la conſtante arbitraire que l'on introduiroit pour compléter cette intégrale, ſeroit conſtante pour toute l'étendue d'une même ligne de courbure, & elle changeroit de valeur en paſſant d'une de ces lignes à une autre: cette conſtante arbitraire eſt donc le paramètre a, par lequel diffèrent les lignes conſécutives de moindre ou de plus grande courbure, & dont le rayon de courbure doit être fonction arbitraire. On doit donc avoir $R = Fa$, ou

$$\frac{da}{dx}\,\frac{dR}{dy} = \frac{da}{dy}\,\frac{dR}{dx};$$

& parce que l'équation *(C)* donne

$$\frac{da}{dx} = 2\gamma,$$

&

$$\frac{da}{dy} = -\alpha + \beta - \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]},$$

l'équation de la ſurface demandée ſera

$$(E)\quad 2\gamma\frac{dR}{dy} = \{-\alpha + \beta - \sqrt{[(\alpha-\beta)^2 + 4\gamma\delta]}\}\,\frac{dR}{dx},$$

qui, ſi l'on ſubſtitue pour R ſa valeur, priſe dans l'équation *(D)*, & ſi l'on exécute les différenciations indiquées, donnera le même réſultat que les équations de l'*article précédent.*

IX.

Si l'on conſidère que la quantité $\frac{dx}{dy}$, qui eſt dans l'équation *(A)*, eſt ce que nous avons repréſenté par m,

dans la manière de différencier de l'*article IV*, c'est-à-dire, en regardant a comme constante, & que le rayon de courbure R, qui entre dans *(B)*, est une fonction de cette même quantité a, ces deux équations pourront être mises sous la forme

$$m^2\gamma - (\alpha - \beta)m - \delta = 0,$$

$$(Fa)^2(\alpha\beta - \gamma\delta) + k^3 Fa(\alpha + \beta) + k^6 = 0,$$

& comprendront l'intégrale première de l'équation aux différences partielles du troisième ordre, que nous venons de trouver, puisqu'elles ne sont que du second ordre, & qu'elles contiennent une fonction arbitraire ; mais parce que ces équations ne renferment plus le radical, elles sont plus générales que l'équation aux différences troisièmes ; elles expriment en effet, que pour une même ligne de moindre ou de plus grande courbure, l'une ou l'autre des deux rayons de courbure, indistinctement est constant, tandis que dans la surface dont il s'agit, pour une même ligne de moindre ou de plus grande courbure, c'est le rayon de cette même courbure qui ne varie pas, & non celui de l'autre.

Pour sauver l'ambiguité, c'est dans les équations *(C)* & *(D)* qu'il faut mettre m à la place de $\frac{dx}{dy}$, & Fa pour R, ce qui donne

$$2\gamma m = \alpha - \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]},$$

$$2(\alpha\beta - \gamma\delta)Fa = k^3\{-\alpha - \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]}\},$$

pour intégrale première & complète de l'équation de la surface.

Si l'on donnoit au radical des signes différens dans les deux équations, elles exprimeroient une autre génération de surface, que nous aurons occasion de traiter.

X.

Actuellement, pour intégrer ces équations, j'élimine le radical, ce qui ne rétablit pas l'ambiguité, & donne

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)\, Fa = (\gamma m - \alpha)\, k^3,$$

& combinant cette équation avec les deux premières de l'*article précédent*, j'obtiens les deux équations

$$Fa\,(m\gamma + \beta) = - k^3,$$

& $$Fa\,(m\alpha + \delta) = - m k^3,$$

qui expriment la même chose que les proposées, & qu'il s'agit d'intégrer: pour cela, je remarque que les quantités α, β, γ, δ, sont des différentielles partielles, & que l'on a

$$\alpha = k^3 \frac{d.\frac{p}{k}}{dx};$$

$$\beta = k^3 \frac{d.\frac{q}{k}}{dy};$$

$$\gamma = k^3 \frac{d.\frac{q}{k}}{dx};$$

$$\delta = k^3 \frac{d.\frac{p}{k}}{dy}.$$

Substituant ces valeurs dans les deux précédentes, elles deviennent

$$Fa\left(m \frac{d.\frac{q}{k}}{dx} + \frac{d.\frac{q}{k}}{dy}\right) = - 1;$$

$$Fa\left(m \frac{d.\frac{p}{k}}{dx} + \frac{d.\frac{p}{k}}{dy}\right) = - m,$$

qui

qui ſont des différentielles exactes, priſes en regardant a comme conſtante; on aura donc en intégrant

$$Fa\frac{q}{k} = -\, y + \mathrm{f}\, a,$$

$$Fa\frac{p}{k} = -\, x + fa,$$

dans leſquelles f & f ſont des fonctions arbitraires, introduites pour compléter les intégrales, & ces deux équations ſont l'intégrale ſeconde & complète de l'équation aux troiſièmes différences. Enfin, ſubſtituant pour k ſa valeur $\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$, ces deux équations donnent pour p & q les valeurs ſuivantes,

$$p = \frac{x - fa}{\sqrt{[(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - \mathrm{f}a)^2]}},$$

$$q = \frac{y - \mathrm{f}a}{\sqrt{[(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - \mathrm{f}a)^2]}},$$

& par conſéquent

$$dz = \frac{(x - fa)\,dx + (y - \mathrm{f}a)\,dy}{\sqrt{[(Fa)^2 - (x - fa)^2 - (y - \mathrm{f}a)^2]}},$$

qui eſt une différentielle exacte, priſe en regardant a comme conſtante, & dont l'intégrale eſt

$$(z - a)^2 + (y - \mathrm{f}a)^2 + (x - fa)^2 = (Fa)^2,$$

a devant être éliminé par l'équation ſuivante,

$$z - a + (y - \mathrm{f}a)\,\mathrm{f}'a + (x - fa)f'a = Fa\,F'a,$$

qui exprime que la différentielle de la première, priſe en ne faiſant varier que a, doit être nulle. Ainſi, ces deux équations ſont l'intégrale finie & complète de l'équation aux différences partielles, qui énonce qu'une ſurface eſt engendrée par la circonférence d'un cercle variable de rayon, & dont le plan eſt toujours normal à la courbe, parcourue par ſon centre.

X I.

Des deux équations intégrales que nous venons de trouver, la première est celle d'une ſphère, dont les coordonnées du centre a, fa, $\mathrm{f}a$, & le rayon Fa, ſont fonctions d'un même paramètre ; la ſeconde dit que la différentielle de la première, priſe en ne faiſant varier que ce paramètre, doit être nulle; leur ſyſtème appartient donc à la ſurface qui enveloppe une ſuite de ſpheres variables de rayon & de poſition dans l'eſpace, c'eſt-à-dire, que la ſurface dont il s'agit peut auſſi être regardée comme formée par les interſections ſucceſſives de la ſurface d'une ſphère mobile & variable de rayon, réſultat qu'il étoit facile d'obſerver *a priori*.

Si ces deux équations intégrales ne coïncident pas avec les équations *(A)* & *(B)* de l'*article VII*, quoiqu'elles expriment la même choſe, c'eſt que dans celles-ci l'indéterminée z' eſt l'ordonnée du centre du cercle générateur, tandis que dans les autres l'indéterminée a eſt l'ordonnée du centre de la ſphère mobile & perpétuellement touchée, ce qui eſt différent; mais elles rentrent les unes dans les autres par une ſimple transformation, & elles donnent le même réſultat par la différenciation.

Nous ſommes entrés dans un grand détail ſur cette ſurface, 1.° pour faire une application de la méthode de différencier & d'intégrer, que nous avons donnée; 2.° parce que cette ſurface eſt celle qui, quoique flexible, doit garder ſa forme, ſi on la ſuppoſe remplie par un fluide élaſtique comprimé, comme l'a démontré M. Meuſnier.

X I I.

Exprimer qu'une ſurface eſt engendrée par la circonférence d'un cercle variable de rayon, & qui ſe meut d'une manière quelconque dans l'eſpace.

Soient, comme précédemment, x, y, z, les coordonnées rectangulaires de la ſurface courbe, & x', y', z', celles

du centre du cercle générateur; si les équations de la courbe parcourue par le centre, sont $y = \varphi z$ & $x = \psi z$, on aura $y' = \varphi z'$ & $x' = \psi z'$, en sorte que si l'on représente par $\pi z'$ le rayon variable du cercle, on aura pour première équation

$$(A) \quad (z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2 = (\pi z')^2,$$

dans laquelle z' doit être déterminé par la loi du mouvement du plan.

Soient de plus $y = \text{f} z$ & $x = f z$, les équations de la courbe à laquelle le plan du cercle générateur est toujours normal; & x'', y'', z'', les coordonnées du point où cette courbe est coupée par le plan, on aura $y'' = \text{f} z''$, $x'' = f z''$; & l'équation qui exprime que le plan est normal à cette courbe, sera, comme dans l'*article I*,

$$z - z'' + (y - \text{f} z'')\, \text{f}' z'' + (x - f z'')\, f' z'' = 0;$$

& parce que la quantité z'' est fonction de z', cette équation peut se mettre sous la forme

$$(B) \quad z - z' + (y - \varphi z')\pi z' + (x - \psi z')\varpi z' = 0.$$

Les deux équations *(A)* & *(B)* comprennent l'expression demandée, en sorte que si l'on connoissoit la loi du mouvement du centre, & le rayon du cercle générateur, ce qui détermineroit les formes des cinq fonctions, on élimineroit z' de ces deux équations, & l'on auroit en x, y, z, l'équation de la surface demandée; mais si l'on veut simplement exprimer le caractère de cette espèce de génération, il faut regarder ces cinq fonctions comme arbitraires, & les faire disparoître par des différenciations poussées aux cinquièmes différences, ce qui n'a d'autre difficulté que la longueur du calcul.

XIII.

Exprimer qu'une surface courbe est engendrée par une courbe plane quelconque, qui se meut de manière que

ſon plan ſoit normal aux courbes parcourues par tous ſes points.

On peut encore définir autrement cette ſurface. Concevons qu'un plan ſe meuve comme s'il ſe développoit de deſſus une ſurface développable, & que ſur ce plan ſoit tracée une courbe quelconque fixe dans le plan, elle engendrera, par ſon mouvement, une ſurface de la nature de celles dont il s'agit ici.

Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires de la ſurface, $y = \varphi z$, $x = \psi z$, les équations d'une des courbes auxquelles le plan eſt toujours normal; ſi x', y', z', ſont les coordonnées du point où cette courbe eſt coupée par le plan, on aura $y' = \varphi z'$ & $x' = \psi z'$, & l'équation qui exprimera que le plan eſt normal à la courbe, ſera, comme dans l'*article I.er*

$$(A)\quad z - z' + (y - \varphi z')\varphi' z' + (x - \psi z')\psi' z' = 0,$$

ce qui détermine la valeur de z' en x, y & z.

Actuellement, le caractère de la ſurface eſt que ſi le point que l'on conſidère ſur cette ſurface ſe meut parallèlement à l'élément correſpondant de la courbe normale, c'eſt-à-dire, perpendiculairement au plan, ſa diſtance à la courbe normale

$$\sqrt{[(z - z')^2 + (y - \varphi z')^2 + (x - \psi z')^2]},$$

eſt invariable: or, ce point ſe meut ſuivant cette condition, ſi l'on a $\frac{dx}{dy} = \frac{\psi' z'}{\varphi' z'}$; il faut donc qu'en donnant à $\frac{dx}{dy}$ la valeur $\frac{\psi' z'}{\varphi' z'}$, la différentielle du radical ſoit nulle, ce, qui exécuté à la manière de l'*article IV*, & en vertu de l'équation *(A)*, donne

$$(B)\qquad p\psi' z' + q\varphi' z' = 1.$$

Les deux équations *(A)* & *(B)* renferment la ſolution de la queſtion.

La première, différenciée deux fois de suite, en regardant z' comme constante, donne

$$mp + q + \varphi' z' + m\psi' z' = 0,$$
$$m'(p + \psi' z') + m^2 r + 2ms + t = 0;$$

la seconde, différenciée deux fois de la même manière, donne

$$(mr + s)\psi' z' + (ms + t)\varphi' z' = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} m'(r\psi' z' + s\varphi' z') \\ + \psi' z' \left(m^2 \frac{d^3 z}{dx^3} + 2m \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + \frac{d^3 z}{dx dy^2}\right) \\ + \varphi' z' \left(m^2 \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + 2m \frac{d^3 z}{dx dy^2} + \frac{d^3 z}{dy^3}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Si de l'équation *(B)* & des quatre différentielles, on élimine les trois indéterminées φ', ψ', m', on trouve que l'équation aux troisièmes différences partielles, qui exprime la propriété de la surface, est le résultat de l'élimination de m des deux équations suivantes,

$$\left.\begin{array}{l} (ms + t)\left[m^2 \frac{d^3 z}{dx^3} + 2m \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + \frac{d^3 z}{dx dy^2} + \frac{(rt - s^2)(mq - p)}{k^2}\right] \\ - (mr + s)\left[m^2 \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + 2m \frac{d^3 z}{dx dy^2} + \frac{d^3 z}{dy^3} - \frac{(rt - s^2)(mq - p)m}{k^2}\right] \end{array}\right\} = 0,$$

$$m^2[s(1 + p^2) - pqr] + m[t(1 + p^2) - r(1 + q^2)] - [s(1 + q^2) - pqt] = 0.$$

XIV.

La considération que nous avons employée pour résoudre la question, nous a conduit directement aux différences premières. Pour avoir la même expression en quantités finies, des deux équations aux différences premières,

$$p\psi' z' + q\varphi' z' = 1,$$
$$mp + q + \varphi' z' + m\psi' z' = 0;$$

je tire les valeurs ſuivantes de p & de q,

$$p = \frac{1 + (\varphi' z')^2 + m \varphi' z' \psi' z'}{\psi' z' - m \varphi' z'},$$

$$q = \frac{-m[1 + (\psi' z')^2] - \varphi' z' \psi' z'}{\psi' z' - m \varphi' z'};$$

qui, ſubſtituées dans $dz = p\,dx + q\,dy$, donnent

$$\frac{m \varphi' z'}{\psi' z'} \left[dz + \varphi' z' dy + \psi' z' dx - dy \frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\varphi' z'}\right]$$
$$= dz + \varphi' z' dy + \psi' z' dx - dx \frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\psi' z'},$$

dont l'intégrale, priſe en regardant z' comme conſtante, eſt

$$z + y \varphi' z' + x \psi' z' - y \frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\varphi' z'}$$
$$= \pi\left[z + y \varphi' z' + x \psi' z' - x \frac{1 + (\varphi' z')^2 + (\psi' z')^2}{\psi' z'}\right],$$

dans laquelle π eſt une fonction arbitraire, & z' doit être telle, que la différentielle de cette équation, priſe en regardant z' comme ſeule variable, ſoit nulle; ce qui ſignifie que la ſurface que l'on conſidère eſt perpétuellement enveloppée par une ſurface cylindrique à baſe quelconque, mais conſtante, & qui ſe meut de manière que ſa baſe ſoit toujours normale aux courbes que parcourent tous ſes points; réſultat qu'on pouvoit obſerver *a priori*, & qui auroit donné directement l'expreſſion en quantités finies, que nous venons de trouver.

X V.

On peut encore arriver au même réſultat par une troiſième conſidération. En effet, ſur la ſurface demandée, la courbe génératrice eſt la ligne d'une des courbures, tandis que les courbes parcourues par chacun de ſes points, ſont des lignes de l'autre courbure; or pour chacune de ces dernières lignes, le rayon de leur courbure eſt conſtant, puiſqu'il eſt toujours celui qui convient à un même point

de la génératrice, & il varie lorsque l'on passe d'une de ces lignes à une autre; donc la surface est telle, que pour la même ligne de courbure, le rayon de l'autre courbure est constant: donc cette surface est celle dont il étoit question à la fin de l'*article IX*, & dont l'équation est pareillement comprise dans celle-ci:

$$m^2\gamma - (\alpha - \beta)m - \delta = 0,$$

$$(Fa)^2(\alpha\beta - \gamma\delta) + k^3 Fa(\alpha + \beta) + k^6 = 0,$$

Si l'on veut avoir son équation particulière, il faut extraire les racines de ces deux équations, & donner au radical commun des signes différens; ce qui donne

$$2\gamma m = \alpha - \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]},$$

$$2(\alpha\beta - \gamma\delta)Fa = - k^3\{\alpha + \beta + \sqrt{[(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta]}\};$$

équations qui ne diffèrent de celles de l'*article IX*, que par les signes du radical qui sont contraires; & qui par la différenciation donnent la même équation aux différences troisièmes que nous avons trouvées, *article XIII*.

XVI.

Enfin la partie de cette surface comprise entre deux positions consécutives de la courbe génératrice, étant une petite portion de surface cylindrique coupée perpendiculairement à la direction de ses arêtes rectilignes, il s'ensuit que cette surface peut être exécutée commodément en fuseaux d'étoffe, de telle manière qu'un des fils de la chaîne de l'étoffe parcoure le fuseau dans toute sa longueur. Toutes les autres surfaces courbes peuvent être exécutées de cette manière, mais les courbes sur lesquelles doivent être faites les coutures, sont compliquées, & celle-ci est la seule où les courbes soient simples & directement données par la génération. Les surfaces développables, & celles de révolution ne jouissent de cette

propriété, que parce qu'elles ſont des cas particuliers de celle dont il s'agit.

Paſſons maintenant au cas général.

XVII.

Exprimer qu'une ſurface courbe eſt engendrée par le mouvement d'une courbe quelconque, plane ou à double courbure, conſtante de forme, & variable de poſition d'une manière quelconque dans l'eſpace.

Tout étant rapporté à trois plans fixes dans l'eſpace, & rectangulaires, par les coordonnées x, y, z, ſuppoſons qu'à l'origine du mouvement de la courbe génératrice, ou, ce qui revient au même, que pour un certain inſtant quelconque de ſon mouvement, la poſition de cette courbe par rapport aux trois plans ſoit connue, en ſorte qu'on ait à cette époque les équations des projections de la courbe, & qu'elles ſoient $y = \varphi z$ & $x = \psi z$. Suppoſons enſuite que trois autres plans rectangulaires, confondus dans ce moment avec les trois plans fixes, ſoient entraînés par la courbe dans ſon mouvement, de manière qu'elle ne change jamais de poſition par rapport à eux, & que dans le cours du mouvement, quelque part que l'on prenne la courbe génératrice, ſes projections ſur ces plans mobiles ſoient toujours les mêmes, & que par conſéquent les équations de ces projections en coordonnées perpendiculaires à ces plans mobiles, & rapportées à leur interſection comme origine, ſoient conſtamment les mêmes, indépendamment de la poſition de la courbe; il eſt évident que ſi l'on appelle u, v, w, les coordonnées mobiles qui, à l'origine du mouvement, étoient reſpectivement x, y z, les équations des projections de la courbe ſur les plans mobiles dans un inſtant quelconque, ſeront $v = \varphi w$ & $u = \psi w$; dans leſquelles les quantités u, v, w ſont des fonctions de x, y, z, & d'une indéterminée qui exprime la diſtance à l'origine du mouvement; en ſorte que ſi l'on connoiſſoit la loi du mouvement des plans mobiles, & qu'on

qu'on fût par conséquent en état, pour un instant quelconque du mouvement, de trouver leurs équations rapportées aux plans fixes, on trouveroit les valeurs des quantités u, v, w, & éliminant l'indéterminée des deux dernières équations, on auroit en x, y, z, celle de la surface demandée.

Posons donc que l'on connoisse la courbe que décrit le point d'intersection commune des trois plans mobiles, & que les projections de cette courbe sur les trois plans fixes, aient pour équations $y = \varpi z$ & $x = \pi z$. Considérant ensuite la génératrice dans un instant quelconque de son mouvement, soit z' l'ordonnée parallèle aux z de son origine mobile; les autres coordonnées de cette origine seront

$\pi z'$ dans le sens des x,

& $\varpi z'$ dans le sens des y.

Cela posé, les équations des trois plans mobiles, lorsque leur intersection se trouve au point dont l'ordonnée est z', sont de la forme

$$a\ (z - z') + b\ (y - \varpi z') + c\ (x - \pi z') = 0,$$
$$a'\ (z - z') + b'\ (y - \varpi z') + c'\ (x - \pi z') = 0,$$
$$a''\ (z - z') + b''\ (y - \varpi z') + c''\ (x - \pi z') = 0;$$

dans lesquelles les coéfficiens doivent avoir les valeurs déterminées d'après la loi du mouvement des plans. Or, de ces neuf coéfficiens, il n'y en a que six qui soient nécessaires pour la détermination des plans; nous pouvons donc établir entr'eux trois conditions arbitraires; & choisissant celles qui sont de nature à simplifier les expressions, nous poserons les trois équations suivantes:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1;$$

de plus, les trois plans étant rectangulaires, on aura entre les coéfficiens les trois équations suivantes :

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$
$$a''a + b''b + c''c = 0,$$
$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0;$$

donc de ces neuf quantités il n'y en a que trois qu'il soit nécessaire de déterminer d'après la loi du mouvement de la courbe génératrice.

Posons que les trois coéfficiens déterminés de cette manière, soient a, b', c'', les valeurs des six autres, conclues des six équations précédentes, en faisant, pour abréger,

$$1 + a + b' + c'' = M,$$
$$1 + a - b' - c'' = N,$$
$$1 - a + b' - c'' = P,$$
$$1 - a - b' + c'' = Q.$$

seront

$$2b = \sqrt{(NP)} + \sqrt{(MQ)},$$
$$2a' = \sqrt{(NP)} - \sqrt{(MQ)},$$
$$2a'' = \sqrt{(NQ)} + \sqrt{(MP)},$$
$$2c = \sqrt{(NQ)} - \sqrt{(MP)},$$
$$2c' = \sqrt{(PQ)} + \sqrt{(MN)},$$
$$2b'' = \sqrt{(PQ)} - \sqrt{(MN)};$$

& parce que, d'après la loi du mouvement, étant donnée z', on doit toujours être en état de trouver les trois quantités a, b', c'', il s'ensuit que ces quantités sont des fonctions de z', que nous pourrons représenter par les équations $a = \alpha z'$, $b' = \beta z'$, $c'' = \gamma z'$, α, β, γ étant des caractères de fonctions ; & que les six autres quantités, ainsi que M, N, P, Q, seront d'autres fonctions de z', déduites de celles-ci.

Actuellement, si du point de la surface, dont les co-ordonnées sont x, y, z, on abaisse des perpendiculaires sur les trois plans mobiles, leurs valeurs seront

$$-\{a\,(z - z') + b\,(y - \varpi z') + c\,(x - \pi z')\},$$
$$-\{a'\,(z - z') + b'\,(y - \varpi z') + c'\,(x - \pi z')\},$$
$$-\{a''\,(z - z') + b''\,(y - \varpi z') + c''\,(x - \pi z')\};$$

ces trois quantités sont celles que nous avons représentées au commencement de cet article par u, v, w, c'est-à-dire, par w, φw, ψw. Donc si l'on substitue dans ces quantités les valeurs des coéfficiens que nous avons trouvées précédemment, la solution de la question sera comprise dans les trois équations suivantes :

$$\alpha z'(z - z') + \tfrac{1}{2}[\sqrt{(NP)} + \sqrt{(MQ)}](y - \varpi z')$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\sqrt{(NQ)} - \sqrt{(MP)}]\,(x - \pi z') = - w,$$
$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(NP)} - \sqrt{(MQ)}](z - z') + \beta z'(y - \varpi z')$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\sqrt{(PQ)} + \sqrt{(MN)}]\,(x - \pi z') = \varphi(- w),$$
$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(NQ)} + \sqrt{(MP)}](z - z') + \tfrac{1}{2}[\sqrt{(PQ)}$$
$$- \sqrt{(MN)}](y - \varpi z') + \gamma z'(x - \pi z') = \psi(- w),$$

en sorte que lorsque l'on connoîtra la loi du mouvement de la courbe génératrice, & par conséquent les formes des sept fonctions, α, β, γ, ϖ, π, φ & ψ, en éliminant z' & w de ces trois équations, on aura en x, y, z, celle de la surface demandée. Mais si l'on veut simplement énoncer la génération de cette surface, sans statuer rien de particulier ni sur la courbe génératrice ni sur la loi de son mouvement, il faut regarder ces sept fonctions comme arbitraires, & les éliminer par la différenciation, ce qui conduira à une équation aux différences partielles du septième ordre.

XVIII.

En ſuppoſant qu'une ſurface courbe, conſtante de forme & déterminée, ſe meuve d'une manière quelconque dans l'eſpace, exprimer qu'une autre ſurface l'enveloppe perpétuellement dans toutes ſes poſitions, indépendamment de la loi du mouvement.

Conſervons tout ce qui eſt dans l'*article précédent*, & ſuppoſons de plus, qu'à l'origine du mouvement, l'équation donnée de la ſurface mobile, ſoit repréſentée par

$$\varphi(z, y, x) = 0;$$

que par conſéquent ſon équation rapportée aux trois plans rectangulaires mobiles avec la ſurface, ſoit perpétuellement

$$\varphi(w, v, u) = 0.$$

Il eſt évident que les points de la ſurface cherchée, ſont ceux de la ſurface mobile, dont les coordonnées x, y, z, rapportées aux plans fixes, ne varient pas lorſque la quantité z', qui détermine la poſition de la ſurface mobile, varie; donc on aura l'équation demandée, en éliminant u, v, w, z', des cinq équations ſuivantes:

$$\alpha z'(z - z') + \tfrac{1}{2}[\sqrt{(NP)} + \sqrt{(MQ)}](y - \varpi z')$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\sqrt{(NQ)} - \sqrt{(MP)}](x - \pi z') = -w,$$

$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(NP)} - \sqrt{(MQ)}](z - z') + \beta z'(y - \varpi z')$$
$$+ \tfrac{1}{2}[\sqrt{(PQ)} + \sqrt{(MN)}](x - \pi z') = -v,$$

$$\tfrac{1}{2}[\sqrt{(NQ)} + \sqrt{(MP)}](z - z')\tfrac{1}{2} + [\sqrt{(PQ)}$$
$$-\sqrt{(MN)}](y - \varpi z') + \gamma z'(x - \pi z') = -u,$$

$$\varphi(w, v; u) = 0,$$

$$\frac{d.\varphi(w, v, u)}{d z'} = 0;$$

en ſorte que la forme de la fonction φ étant donnée, ce qui réduit toutes ces équations aux deux dernières, ſi l'on différencie ces deux équations par le procédé donné au commencement de ce Mémoire, & qu'on élimine les cinq fonctions α, β, γ, π, ϖ, conſidérées comme arbitraires, & l'indéterminée z', on aura une équation aux différences partielles du cinquième ordre, qui énoncera les propriétés de la ſurface qui enveloppe la ſurface donnée & mobile, dans toutes ſes poſitions, ſans rien dire de particulier ſur la loi ſuivant laquelle ces poſitions changent.

On voit donc que quelque compliquée que ſoit l'équation d'une ſurface, conſtante de forme & variable de poſition dans l'eſpace, l'équation aux différences partielles de la ſurface qui l'enveloppe perpétuellement, ne peut jamais être que du cinquième ordre. Dans certains cas particuliers, l'ordre de cette équation peut être conſidérablement abaiſſé; on ſait, par exemple, que lorſque la ſurface mobile eſt un plan, l'équation de la ſurface perpétuellement touchée, n'eſt que du ſecond ordre, c'eſt celle des ſurfaces développables; & nous avons vu dans ce Mémoire, que lorſque la ſurface mobile eſt une ſphère, l'équation de la ſurface qui l'enveloppe eſt encore du ſecond ordre.

Nous ne nous étendrons pas davantage ſur cette matière, qui ſe complique trop, eu égard à ſon utilité.

MÉMOIRE*

SUR LE CALCUL INTÉGRAL

DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Par M. MONGE.

TOUT ce que je me propoſe de dire ſur cet objet, étant fondé ſur le procédé que j'ai expoſé dans le Mémoire précédent, pour faire diſparoître, au moyen de la différenciation, les fonctions arbitraires qui ſont compriſes dans une équation intégrale, je vais reprendre ici ce procédé, pour le développer avec plus de clarté, & l'appliquer enſuite à l'intégration des équations aux différences partielles.

Je commencerai d'abord par les équations linéaires du premier ordre; je paſſerai enſuite & par degrés à celles des ordres ſupérieurs, & je terminerai ce Mémoire par quelques conſidérations ſur les équations élevées.

* Ce Mémoire a été fait à l'occaſion d'une propoſition que j'énonçai à l'Académie, & qui fut conteſtée: il étoit achevé lorſqu'on me fit voir que l'idée principale, & qui faiſoit l'objet de la conteſtation, étoit entièrement dans un Mémoire de M. de la Grange, imprimé dans le volume de l'Académie de Berlin, pour l'année 1779, où à la vérité, ce célèbre Géomètre l'applique ſimplement aux équations du premier ordre. Je crois être le premier qui ait dit quelque choſe d'analogue dans un Mémoire préſenté à l'Académie en 1771, imprimé dans le volume des Savans Étrangers, pour l'année 1773, en démontrant, & par des conſidérations géométriques, & par des opérations analytiques, la propoſition ſuivante.

L'intégrale de l'équation aux différences partielles $Mp + Nq = 0$, dans laquelle les coéfficiens M, N, ſont fonctions des trois variables x, y, z, eſt la même, ſoit que l'on regarde dans ces coéfficiens la quantité z comme variable, ſoit qu'on la regarde comme conſtante.

On y verra que cette propoſition, dont j'étois dès-lors fortement occupé, eſt le germe de ce qui fait l'objet du Mémoire actuel, & qu'elle a dû me conduire aux réſultats que je préſente.

I.

Soit proposé de faire disparoître la fonction arbitraire φ de l'équation $V = \varphi U$.

Cette équation exprime évidemment que les deux quantités V & U sont constantes ensemble, & variables ensemble; ou, pour mieux dire, elle exprime seulement que ces deux quantités sont constantes ensemble, car si U venoit à varier, l'équation ne détermineroit pas la variation qui en résulteroit dans V. Il suit de-là, que si l'on fait U égale à une certaine constante quelconque a, on aura V égale à une autre constante b, sans qu'il y ait aucune relation entre a & b, puisque dans l'équation $b = \varphi a$, qui pour lors a lieu, la fonction φ est arbitraire : la proposée exprime donc que les deux équations

$$U = a;$$
$$V = \varphi a = b,$$

ont lieu en même temps, indépendamment de la constante arbitraire a, ou, ce qui revient au même, elle est le résultat de l'élimination de a entre ces deux équations: elle ne comporte pas que chacune de ces équations aient lieu en particulier, mais elle signifie qu'elles ont lieu simultanément, c'est-à-dire, que si l'une est supposée, l'autre s'ensuit nécessairement, & elle ne signifie que cela. Si donc on différencie aux différences ordinaires ces deux équations, ce qui fait en effet disparoître l'indéterminée a, & donne

$$dU = 0,$$
$$dV = 0,$$

ou

$$(A) \qquad \left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy = 0,$$

$$(B) \qquad \left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy = 0,$$

on aura deux équations dans lesquelles on aura introduit une nouvelle indéterminée $\frac{dy}{dx}$, & dont le système représentera la proposée, & exprimera la même chose qu'elle. Ainsi, énoncer la proposée, c'est prononcer que les deux équations *(A)* & *(B)* ont lieu simultanément, ou indépendamment de la valeur arbitraire de $\frac{dy}{dx}$; ce n'est pas dire que l'une ait lieu, ni que l'autre ait lieu, c'est poser qu'elles ont lieu ensemble, c'est dire que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, qu'elles donnent, sont égales entr'elles, sans rien statuer d'ailleurs sur cette valeur, qui peut être tout ce qu'on voudra. Donc, si l'on élimine de ces deux équations la quantité $\frac{dy}{dx}$, le résultat

$$(C) \quad \left(\frac{dU}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dU}{dy}\right)\left(\frac{dV}{dx}\right) = 0,$$

énoncera la même chose que la proposée. C'est ce résultat nécessaire, exprimé en quantités différentielles, & délivré de la fonction arbitraire φ, que l'on nomme l'*équation aux différences partielles de la proposée*, & dont celle-ci se nomme l'*intégrale complète.*

Les deux équations *(A)* & *(B)* ne sont pas nécessaires; tout autre système, qui, par l'élimination d'une indéterminée ω, donneroit pour résultat l'équation *(C)*, seroit également propre à la représenter, pourvu que l'on comprît bien que les deux équations de ce système n'auroient pas lieu séparément, & que l'une fût destinée à éliminer ω de l'autre; mais ce nouveau système, quelle que fût sa forme, exprimeroit précisément la même chose que les deux équations *(A)* & *(B)*, prises simultanément, & indépendamment de la valeur de $\frac{dy}{dx}$.

II.

II.

Il ſuit de-là, que pour faire diſparoître une fonction arbitraire d'une équation intégrale, de quelque manière que cette fonction entre dans l'équation, il faut 1.° égaler à zéro la différentielle ordinaire de la quantité qui eſt ſous la fonction, ce qui produira une première équation; 2.° différencier aux différences ordinaires l'équation, en regardant la fonction comme une conſtante, ce qui donnera une ſeconde équation; 3.° éliminer, entre ces deux équations & la propoſée, la fonction & l'indéterminée $\frac{dy}{dx}$, & l'équation réſultante ſera la différentielle demandée.

Si l'équation contenoit, non-ſeulement la fonction arbitraire φ, mais encore les coéfficiens de ſes différentielles ſucceſſives φ', φ'', φ''' . . .&c, ce que nous venons de dire ne ſeroit pas ſuffiſant; mais dans ce cas, en faiſant diſparoître les fonctions arbitraires, on eſt conduit à des équations aux différences mêlées, entières & partielles, dont nous ne nous propoſons pas de parler dans ce Mémoire.

III.

Pour intégrer une équation aux différences partielles linéaires & du premier ordre, il faut faire l'opération inverſe. Suppoſons que l'on faſſe pour abréger,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

de manière que p & q repréſentent les différences partielles du premier ordre; & ſoit propoſé d'intégrer l'équation générale

$$Mp + Nq + L = 0,$$

dans laquelle $M, N, L,$ ſoient données d'une manière quelconque en x, y, z. Cette équation exprime une ſimple relation entre p & q, & ne peut ſuffire pour les déterminer toutes deux en x, y, z: ſi donc on élimine ou p

ou q, au moyen de l'équation $dz = pdx + qdy$, les équations

$$Mdz + Ldx = q(Mdy - Ndx),$$
$$Ndz + Ldy = p(Mdy - Ndx),$$

qu'on obtiendra, ne devront déterminer ni p ni q, c'eſt-à-dire, qu'elles devront avoir lieu chacune en particulier, indépendamment des valeurs de ces deux quantités; donc, leurs membres ſeront ſimultanément égaux à zéro, donc, on aura en même temps les trois équations

$$Mdz + Ldx = 0,$$
$$Ndz + Ldy = 0,$$
$$Mdy - Ndx = 0,$$

dont deux quelconques comportent la troiſième. Ainſi, énoncer la propoſée, c'eſt prononcer que deux quelconques de ces trois équations ont lieu, indépendamment de la valeur de la quantité $\frac{dy}{dx}$, introduite par l'élimination: ce n'eſt pas dire qu'aucunes d'elles ait lieu, c'eſt dire que deux d'entr'elles ont lieu enſemble.

Ces équations aux différences ordinaires ne ſont point néceſſaires; tout autre ſyſtème de deux équations, qui, par l'élimination d'une indéterminée ω, reproduiroient, comme les précédentes, la propoſée, exprimeroit la même choſe, & en ſeroit une autre traduction exacte.

Actuellement, ſoient

$$V = a,$$
$$U = b,$$

les intégrales complètes de deux de ces trois équations aux différences ordinaires, a & b étant les conſtantes arbitraires introduites par l'intégration; ces deux équations, qui, comme leurs différentielles, doivent avoir lieu ſimultanément,

comme elles, repréſenteront la propoſée : or, elles expriment, non pas que les deux quantités V & U ſont conſtantes chacune en particulier, mais qu'elles ſont conſtantes en même temps ; c'eſt-à-dire, qu'elles varient enſemble, & ſont conſtantes enſemble ; ou autrement, qu'elles ſont fonctions l'une de l'autre, ſans rien ſtatuer d'ailleurs ſur la forme de cette fonction. Donc, ſi l'on indique par φ une fonction arbitraire, l'équation

$$V = \varphi U$$

énoncera la même choſe que la propoſée, & ſera ſon intégrale complète.

I V.

On voit donc d'abord que lorſque les trois équations

$$Mdz + Ldx = 0,$$
$$Ndz + Ldy = 0,$$
$$Mdy - Ndx = 0,$$

ſeront intégrables, on aura immédiatement l'intégrale de la propoſée. Cette intégrale ſeroit poſſible, quand même il n'y auroit qu'une de ces équations que l'on pût intégrer dans l'état où elle eſt, parce qu'au moyen de cette équation intégrée, on chaſſeroit d'une des deux autres la variable, dont la différentielle n'eſt pas employée, ce qui en feroit une équation aux différences ordinaires à deux variables, dont l'intégrale ſeroit poſſible : mais lors même qu'aucune de ces trois équations ne pourra s'intégrer, en multipliant l'une d'entr'elles par un facteur indéterminé, & ajoutant le produit à une des deux autres, on aura une équation à trois variables, qui tiendra lieu d'une des trois premières ; & ſi l'on peut déterminer le facteur, de manière que la condition d'intégrabilité ſoit ſatisfaite, on aura une équation dont l'intégrale rendra poſſible celles des deux autres. Nous allons éclaircir cela par des exemples.

V.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$py - qx = 0,$$

qui est celle des surfaces de révolution autour de l'axe des z: les trois équations aux différences ordinaires se réduisent, dans ce cas, aux deux suivantes,

$$dz = 0,$$
$$y\,dy + x\,dx = 0;$$

leurs intégrales sont

$$z = a,$$
$$x^2 + y^2 = b.$$

Donc, l'intégrale complète de la proposée est

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

ce qu'on savoit déjà.

VI.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$p(y - Bz) - q(x - Az) + Ay - Bx = 0,$$

dans laquelle les quantités A & B sont des constantes; les trois équations aux différences ordinaires sont

$$(y - Bz)\,dz + (Ay - Bx)\,dx = 0,$$
$$-(x - Az)\,dz + (Ay - Bx)\,dy = 0,$$
$$(y - Bz)\,dy + (x - Az)\,dx = 0,$$

dont aucune n'est intégrable immédiatement.

Mais si l'on multiplie la première par A, la seconde par B, & qu'on les ajoute, on aura

$$A\,dx + B\,dy + dz = 0:$$

si l'on multiplie de même la première par x, la seconde par y, & qu'on les ajoute, on aura

$$xdx + ydy + zdz = 0:$$

les intégrales de ces deux dernières équations sont

$$Ax + By + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b.$$

Donc, en faisant $a = \varphi b$, on aura pour intégrale complète de la proposée

$$Ax + By + z = \varphi(x^2 + y^2 + z^2).$$

Cette équation, qui énonce la même chose que les deux précédentes prises simultanément, exprime que la surface à laquelle elle appartient, est le lieu des intersections d'une suite de plans parallèles par une suite de surfaces de sphères concentriques, & dont le centre commun est à l'origine des coordonnées; donc, elle est celle des surfaces de révolution autour d'un axe incliné mené par l'origine.

VII.

EXEMPLE III. S'il s'agit d'intégrer l'équation

$$px + qz + y = 0;$$

des trois équations aux différences ordinaires

$$xdz + ydx = 0,$$
$$zdz + ydy = 0,$$
$$xdy - zdx = 0,$$

que l'on obtient, il n'y a que la seconde qui soit intégrable immédiatement, & son intégrale est

$$z^2 + y^2 = a^2;$$

mais si l'on substitue dans la première la valeur de y, que fournit cette intégrale, on a

$$xdz + dx\sqrt{(a^2 - z^2)} = 0;$$

qui ne renferme plus que deux variables, & dont l'intégrale eſt

$$x^a e^{\text{arc fin.} \frac{z}{a}} = b:$$

faiſant donc $b = \varphi a$, & mettant pour a ſa valeur $\sqrt{(z^2 + y^2)}$, l'intégrale complète de la propoſée ſera

$$x^{\sqrt{(z^2 + y^2)}} e^{\text{arc fin.} \frac{z}{\sqrt{(z^2 + y^2)}}} = \varphi(x^2 + y^2).$$

Si au lieu de ſubſtituer la valeur de y dans la première, on eût mis celle de z dans la troiſième, en opérant de la même manière, on auroit trouvé l'intégrale complète ſous cette autre forme,

$$x^{\sqrt{(z^2 + y^2)}} \varphi(z^2 + y^2) = e^{\text{arc fin.} \frac{y}{\sqrt{(z^2 + y^2)}}}.$$

Ces exemples ſuffiſent pour faire ſentir l'eſprit de la méthode dont il s'agit dans ce Mémoire, & nous aurons occaſion dans la ſuite d'en faire d'autres applications.

De l'Intégration des Équations aux différences partielles linéaires & du ſecond ordre.

Nous ſuppoſerons que l'on faſſe dans la ſuite

$$dp = r dx + s dy,$$
$$dq = s dx + t dy,$$

de manière que les quantités r, s, t repréſentent les trois différences partielles du ſecond ordre.

VIII.

Soit l'équation linéaire générale

$$Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

dans laquelle A, B, C, D ſoient données d'une manière quelconque en x, y, z, p, q. Cette équation exprime une

ſimple relation entre les trois quantités r, s, t, & ne peut ſuffire pour déterminer les valeurs de chacune d'elles en x, y, z, p, q. Si donc, à l'aide des deux équations $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, qui ne diſent rien de nouveau, on élimine deux de ces trois quantités, les trois équations

$$Bdpdy + Cdqdy - Cdpdx + Ddy^2 = -r \{Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2\},$$
$$Adpdy + Cdqdx + Ddxdy = s \{Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2\},$$
$$Adpdx - Adqdy + Bdqdx + Ddx^2 = -t \{Ady^2 - Bdxdy - Cdx^2\},$$

que l'on obtient, ne doivent pas déterminer les valeurs de r, s, t; & parce qu'elles ont lieu, il faut que ce ſoit indépendamment de ces valeurs, c'eſt-à-dire, que chacun des membres de ces équations doit être par lui-même égal à zéro, ou que l'on a en même temps

$$Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0,$$
$$Adpdy + Cdqdx + Ddxdy = 0,$$
$$Bdpdy + C(dqdy - dpdx) + Ddy^2 = 0,$$
$$A(dpdx - dqdy) + Bdqdx + Ddx^2 = 0;$$

de ces quatre équations, il n'y en a que deux de néceſſaires, car deux quelconques étant poſées, les deux autres s'enſuivent.

Ainſi énoncer la propoſée, c'eſt prononcer que deux quelconques de ces quatre équations ont lieu en même temps, indépendamment de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qui leur eſt commune, & qu'on a introduite dans la propoſée pour en obtenir ces deux équations. Donc en raiſonnant ici

comme dans l'*article III*, si les intégrales complètes de deux quelconques de ces équations, sont

$$V = a,$$
$$U = b;$$

a & b étant les constantes arbitraires introduites par l'intégration, l'intégrale première de la proposée, sera

$$V = \varphi U;$$

& si cette équation est encore linéaire, on l'intégrera en quantités finies, par la méthode que nous avons expliquée plus haut.

IX.

Les équations aux différences ordinaires de l'*article précédent*, étant toutes les quatre élevées au second degré, il est évident que dans la première que l'on intégrera, la constante arbitraire sera pareillement élevée au second degré, & que cette constante aura deux valeurs que nous représenterons par

$$V = a,$$
$$V' = a'.$$

Quant à la seconde qu'on se propose d'intégrer, il se présente naturellement deux cas; ou cette équation, en vertu de l'intégrale de la première, s'abaissera au premier degré, ou elle restera du second; ces deux cas donnent des résultats qu'il ne faut pas confondre. Nous allons d'abord traiter le premier, nous analyserons ensuite le second.

X.

Si la seconde équation aux différences ordinaires, devient linéaire, en vertu de l'intégrale de la première, il n'y aura aucune nouvelle ambiguité introduite de sa part; mais parce que l'intégrale de la première en présente une, il s'ensuit que, selon la solution qu'on emploîra, l'intégrale

l'intégrale de la seconde sera $U = b$ ou $U' = b'$; que par conséquent l'intégrale première de la proposée, sera indifféremment

$$V = \varphi U,$$
$$\text{ou } V' = \psi U',$$

& que l'intégrale commune de ces deux dernières équations, sera l'intégrale finie & complète de la proposée.

Ces deux équations sont aussi celles qu'on trouveroit en faisant disparoître de l'intégrale finie, par la différenciation, ou l'une ou l'autre des deux fonctions arbitraires φ & ψ, qui la complètent.

X I.

Toutes les fois que les quantités V & V' seront exprimées en x, y, z, & qu'elles seront délivrées des différences partielles p & q, elles seront aussi les quantités qui entreront sous les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie; & parce que des quatre équations aux différences ordinaires, il n'y a que la première qui ne contienne pas les différences de p & de q, il s'ensuit qu'on ne pourra avoir immédiatement ces deux quantités, que par l'intégration de cette première équation. Lorsque les quantités V & V' contiendront les différences partielles p & q, les deux équations $V = \varphi U$ & $V' = \psi U'$, n'en seront pas moins les intégrales premières de la proposée, mais il est évident que ces quantités changeront de forme pour entrer dans l'intégrale finie.

Avant que d'aller plus loin, éclaircissons ce qui précède par des exemples connus.

X I I.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation du second ordre,

$$Ar + Bs + Ct + D = 0,$$

dans laquelle les quantités A, B, C, D, sont des constantes;

les deux équations principales aux différences ordinaires, seront

$$Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0,$$

$$Adpdy + Cdqdx + Ddxdy = 0.$$

Si, pour abréger, l'on exprime par k & k' les deux valeurs de k que fournit l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0,$$

la première de ces deux équations donnera les deux solutions suivantes:

$$dy - kdx = 0,$$

$$dy - k'dx = 0,$$

dont les intégrales seront

$$y - kx = a,$$

$$y - k'x = a';$$

& l'on voit d'abord que les deux quantités qui seront sous les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie, seront

$$y - kx \ \& \ y - k'x.$$

Actuellement, si l'on emploie la première de ces solutions, & qu'on l'introduise dans l'autre équation aux différences ordinaires, elle deviendra

$$Akdp + Cdq + Dkdx = 0,$$

dont l'intégrale est

$$Akp + Cq + Dkx = b;$$

donc une des intégrales premières de la proposée, est

$$Akp + Cq + Dkx = \varphi'(y - kx).$$

En employant la seconde solution, au lieu de la première, on auroit eu pour autre intégrale

$$Ak'p + Cq + Dk'x = \psi'(y - k'x).$$

Chacune de ces intégrales premières étant linéaire, on peut encore l'intégrer par le procédé de l'*article III*; en

effet, les deux équations aux différences ordinaires, que l'on obtient, sont

$$Akdy - Cdx = 0;$$

$$Akdz + Dkxdx - \varphi'(y - kx)dx = 0;$$

l'intégrale de la première, à cause de $kk' = \frac{C}{A}$, est

$$y - k'x = a';$$

la seconde, en éliminant y, devient

$$Akdz + Dkxdx - \varphi'\{a' + x(k' - k)\}dx = 0,$$

dont l'intégrale est

$$Akz + \tfrac{1}{2}Dkx^2 - \varphi\{a' + x(k' + k)\} = b.$$

Enfin faisant $b = \varphi a'$, & mettant pour a' sa valeur, on trouve pour intégrale complète de la proposée

$$Az + \tfrac{1}{2}Dx^2 = \varphi(y - kx) + \psi(y - k'x).$$

XIII.

Exemple II. Soit proposée l'équation

$$q^2r - 2pqs + p^2t = 0,$$

qui est celle des surfaces engendrées par une droite qui se meut d'une manière quelconque, mais toujours parallèlement au plan des x & y. Les équations aux différences ordinaires sont, pour ce cas,

$$q^2dy^2 + 2pqdxdy + p^2dx^2 = 0,$$

$$q^2dpdy + p^2dydx = 0;$$

la première donne $(qdy + pdx)^2 = 0$, ou $dz^2 = 0$, ou $z = a$; & parce que les deux racines de cette équation sont égales, il s'ensuit que les deux fonctions qui compléteront l'intégrale finie, seront composées de la même quantité z.

Quant à la seconde, puisqu'on a par la première

$$qdy + pdx = 0,$$

elle devient

$$pdq - qdp = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$q = bp;$$

donc l'intégrale première de la propoſée, eſt

$$q = p\varphi z,$$

ce qu'on ſavoit déjà.

En ſuivant le procédé de l'*article III*, pour arriver à l'intégrale finie, les deux équations aux différences ordinaires, ſont

$$dz = 0,$$

$$dx + dy\varphi z = 0;$$

l'intégrale de la première eſt $z = a$, comme ci-deſſus; celle de la ſeconde, puiſque z eſt conſtant, eſt $x + y\varphi z = b'$; donc l'intégrale finie de la propoſée eſt

$$x + y\varphi z = \psi z,$$

ce qu'on ſavoit encore.

X I V.

Ces deux exemples prouvent ſuffiſamment que quand parmi les quatre équations aux différences ordinaires de l'*article VIII*, il s'en trouvera deux immédiatement intégrables, ou que quand on en pourra compoſer deux autres qui ſeront intégrables & qui tiendront lieu de deux des premières, on aura toujours au moins l'intégrale première de la propoſée. Mais pour exprimer analytiquement cette intégrale, il n'eſt pas même néceſſaire que les équations aux différences ordinaires, ſoient toutes deux actuellement intégrables; il ſuffira ſouvent qu'il y en ait une, comme on va le voir dans l'exemple ſuivant qui nous a été propoſé comme devant ſe refuſer à cette méthode.

X V.

EXEMPLE III. Poſons qu'il faille intégrer l'équation

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0,$$

dont l'intégrale finie, trouvée par M. Euler, eſt

$$z = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x + y) - x\varphi'(x + y) \\ + \psi(x - y) - x\psi'(x - y), \end{array} \right.$$

& dont les Géomètres ont coutume de dire qu'elle n'a point d'intégrale première.

Les équations aux différences ordinaires que la méthode donne pour ce cas, ſont

$$dx^2 - dy^2 = 0,$$
$$dpdy - dqdx = \frac{2pdxdy}{x};$$

la première a deux racines inégales, $dx + dy = 0$, & $dx - dy = 0$, dont les intégrales complètes ſont $x + y = a$, & $x - y = a'$: elle indique donc d'abord que les deux fonctions arbitraires qui complètent l'intégrale finie, ſont compoſées des quantités différentes $(x + y)$, & $(x - y)$.

Prenons enſuite une de ces racines, par exemple, $dx - dy = 0$, l'autre équation devient par-là

$$dp - dq = \frac{2pdx}{x},$$

& c'eſt cette équation qu'il faudroit intégrer pour arriver à l'intégrale première de la propoſée.

On a objecté que cette équation étoit impoſſible, parce qu'étant à trois variables, elle ne ſatisfait pas à l'équation de condition, pour l'intégrabilité. Nous répondons que cette équation, conſidérée ſeule, n'a pas lieu, & qu'elle eſt étrangère à la queſtion; elle n'a lieu que conjointement avec l'autre $dx - dy = 0$, & on doit la regarder comme provenant d'une troiſième qui auroit été réduite par le moyen de la première $dx - dy = 0$, & dont l'intégrale ſeroit poſſible. En effet, on peut ajouter à cette équation la quantité $\omega(dx - dy)$, qui eſt nulle, en vertu de l'autre, puis ajouter & retrancher la quantité $k(dx + dy)$, & cette équation devient

$$dp - dq = \left(\frac{p}{x} + k\right)(dx + dy) - k(dx + dy) + \omega(dx - dy),$$

dans laquelle, si une des deux quantités k & ω contient une indéterminée, la substitution de l'équation $dx - dy = 0$ sera faite. L'autre quantité pourra ensuite être déterminée de manière à rendre possible l'intégrale du second membre.

Soient donc $k = \psi''(x - y)$ & $\omega = -2x\psi'''(x - y)$, l'intégrale de cette équation sera alors

$$(A)\quad p - q = \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - y) + \int\left[\frac{p}{x} + \psi''(x - y)\right](dx + dy),$$

& ce sera une des intégrales premières de la proposée, intégrale que les Géomètres ont méconnue.

La quantité qui est sous le signe d'intégration ne pouvant être qu'une fonction de $(x + y)$, il s'ensuit que cette intégrale peut être représentée par le système des deux équations simultanées

$$p - q = \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - y) + \varphi'(x + y),$$
$$\varphi''(x + y) = \frac{p}{x} + \psi''(x - y),$$

dont l'une est destinée à déterminer la forme de la fonction surabondante.

Au lieu d'employer la racine $dx - dy = 0$, on auroit pu se servir de l'autre $dx + dy = 0$, & en opérant d'une manière analogue, on auroit trouvé l'autre intégrale première

$$(B)\quad p + q = \varphi'(x + y) - 2x\varphi''(x + y) + \int\left[\frac{p}{x} + \varphi''(x + y)\right](dx - dy),$$

que l'on peut de même représenter par le système des équations simultanées

$$p + q = \varphi'(x + y) - 2x\varphi''(x + y) + \psi'(x - y),$$
$$\psi''(x - y) = \frac{p}{x} + \varphi''(x + y).$$

XVI.

Les deux intégrales premières *(A)* & *(B)*, que l'on vient de trouver, n'étant pas linéaires, ne peuvent pas être traitées par la méthode dont il s'agit dans ce Mémoire : mais si au lieu de l'une d'elles, on prend les deux équations simultanées qui la représentent, on en tirera pour p & pour q des valeurs qui, substituées dans $dz = p\,dx + q\,dy$, donneront une équation aux différences ordinaires, dont l'intégrale sera, en quantités finies, celle de la proposée. Par exemple, les deux équations simultanées qui représentent l'équation *(A)*, donnent

$$p = x\,[\varphi''(x+y) - \psi''(x-y)],$$
$$q = x\,[\varphi''(x+y) - \psi(x-y)] - \psi'(x-y) + 2x\psi''(x-y) - \varphi'(x+y),$$

& par conséquent

$$dz = x\varphi''(x+y)(dx+dy) - dy\,\varphi'(x+y) - x\psi''(dx-dy) - dy\,\psi'(x-y);$$

qui, en ajoutant & retranchant

$$dx\,\varphi'(x+y) + dx\,\psi'(x-y),$$

devient la différentielle exacte de l'équation

$$z = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x+y) - x\varphi'(x+y) \\ + \psi(x-y) - x\psi'(x-y) \end{array} \right\}$$

intégrale finie & complète de la proposée.

XVII.

Nous disons que les deux équations *(A)* & *(B)* sont les intégrales premières de l'équation aux différences secondes, 1.° parce qu'elles ne contiennent plus de différences partielles du second ordre, & qu'elles renferment chacune une fonction arbitraire, qui rend leur généralité aussi grande que celle de la proposée; 2.° parce que c'est à l'une ou à

l'autre de ces deux équations que l'on arrive, lorſqu'après avoir différencié, aux différences premières, l'intégrale finie, on élimine ou l'une ou l'autre des deux fonctions arbitraires & ſa différentielle. En effet, ſi l'on différencie l'intégrale finie ſucceſſivement, par rapport à x & par rapport à y, on a les deux équations

$$p = - x[\varphi''(x + y) + \psi''(x - y)],$$

&

$$q = - x[\varphi''(x + y) - \psi''(x - y)] + \varphi'(x + y) - \psi'(x - y),$$

qui, priſes ſimultanément, expriment la même choſe que l'intégrale finie. Si l'on en élimine φ'' on trouve

$$p - q = - \varphi'(x + y) + \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - y),$$

qui n'eſt pas la différentielle première que l'on demande. Il ne ſuffit pas, pour employer la première des deux équations ſimultanées, d'en faire uſage pour chaſſer φ'', il faut encore par ſon moyen chaſſer φ'; ainſi, la dernière équation ne tient encore lieu que de l'une des deux précédentes qui l'ont produite, & il faut la combiner avec une d'elles, pour que leur ſyſtème repréſente exactement l'intégrale finie: or, on ne peut éliminer la fonction φ' plus ſimplement qu'en prenant ſa valeur dans celle de p, où elle n'eſt élevée qu'à un ſeul ordre de différentielles, ce qui donne

$$\varphi'(x + y) = - \int\left[\frac{p}{x} + \psi''(x - y)\right](dx + dy);$$

& ſubſtituant dans la dernière équation, on a, comme ci-deſſus,

$$(A) \quad p - q = \psi'(x - y) - 2x\psi''(x - y) + \int\left[\frac{p}{x} + \psi''(x - y)\right](dx + dy),$$

équation qui tient lieu ſeule de l'intégrale finie, en exprimant la même choſe qu'elle, & qui, étant aux différences partielles

partielles premières, & contenant d'ailleurs une fonction arbitraire de moins, en est la différentielle première.

En éliminant de la même manière la fonction ψ, on auroit trouvé l'équation *(B)*, qui est l'autre différentielle première : chacune de ces équations *(A)* & *(B)*, différenciée par rapport à x, puis par rapport à y, produit également, par l'élimination de la fonction arbitraire qui reste, l'équation aux différences secondes,

$$r - t - \frac{2p}{x} = 0.$$

XVIII.

On a reproché que ces expressions étoient abusives, & l'on a dit que les deux équations *(A)* & *(B)* renfermant des intégrations qui ne sont qu'indiquées, ne peuvent être regardées comme des intégrales actuellement obtenues ; mais l'objet de la question étoit de délivrer les proposées des différences partielles du second ordre, & d'arriver à une équation unique qui exprimât la même chose, & qui ne contînt aucune trace des manières différentes dont p & q peuvent varier ; nous l'avons fait. D'ailleurs, il n'y a aucun Géomètre qui ne regarde l'équation

$$z = \begin{cases} \varphi(x+y) - x\varphi'(x+y) \\ +\psi(x-y) - x\psi'(x-y), \end{cases}$$

comme l'intégrale finie de la proposée ; cependant cette équation est une véritable différentielle aux différences ordinaires ; on peut la mettre sous la forme suivante :

$$\frac{z}{x^2} = \left\{ \frac{d\left[\frac{\varphi(x+y)+\psi(x-y)}{x}\right]}{dx} \right\},$$

qui n'est pas simplement équivalente, mais qui est absolument la même, puisqu'il n'y a qu'à exécuter les opérations indiquées dans l'une, pour avoir l'autre. On peut de même écrire les deux intégrales premières *(A)* & *(B)*, sous les formes différentielles ordinaires,

$$dp - dq = \frac{p}{x}(dx + dy) - 2x\psi'''(x - y)(dx - dy),$$

$$dp + dq = \frac{p}{x}(dx - dy) - 2x\varphi'''(x + y)(dx + dy);$$

& chacune de ces équations ſera l'intégrale première de l'équation aux différences ſecondes, de la même manière que la différentielle précédente en eſt l'intégrale ſeconde complète; c'eſt même parce que ces deux intégrales premières ſont exprimées en différentielles ordinaires, ou parce qu'elles comportent une intégration qu'on ne peut qu'indiquer, que l'intégrale finie conſerve ſa forme différentielle.

Nous avons donc donné à nos expreſſions la valeur que leur donnent tous les autres Géomètres; c'eſt donc en parlant comme eux, qu'on doit dire que l'équation propoſée aux différences ſecondes partielles, a, de même que toutes celles dont l'intégrale ſeconde eſt poſſible, ſes deux intégrales premières, par chacune deſquelles on paſſe également, ſoit en allant par l'intégration des différences ſecondes à l'intégrale finie, ſoit en retournant par la différenciation de celle-ci aux différences ſecondes.

XIX.

Nous ferons remarquer cependant, que c'eſt ſeulement ce qu'exprime l'une ou l'autre des équations *(A)* & *(B)*, qui eſt néceſſaire: leurs formes ne ſont pas uniques, & l'on conçoit qu'en exécutant, au moins en partie, les intégrations indiquées, on peut arriver à des réſultats équivalens & de formes différentes.

XX.

La manière dont nous avons trouvé les intégrales premières *(A)* & *(B)*, *article XV*, ſuppoſoit que la forme de l'intégrale finie étoit connue: nous n'avons pas indiqué comment on pouvoit trouver les valeurs de k & de ω, indépendamment de la connoiſſance de cette forme; nous

allons l'expofer ici pour donner un exemple de conduite dans l'emploi de la méthode dont il s'agit.

Les deux équations fimultanées aux différences ordinaires, & qui repréfentent la propofée, font, en employant la première racine,

$$dx - dy = 0$$
$$dp - dq = \frac{2p\,dx}{x};$$

le premier membre de la feconde eft déjà une différentielle complète, il refte à faire en forte que l'intégrale du fecond membre foit poffible. Or nous favons que les fonctions arbitraires qui entreront dans l'intégrale finie, feront compofées des quantités différentes $x + y = a$, & $x - y = a'$; donc fi l'on prend dans ces deux dernières équations les valeurs de x & de dx, ou a, a' & da, pour les fubftituer dans le fecond membre de l'équation à intégrer, elle deviendra, à caufe de $da' = 0$,

$$dp - dq = \frac{2p}{a + a'}da,$$

équation qui feule ne repréfente pas encore la propofée, parce qu'il ne fuffit pas de faire ufage de l'équation $da' = 0$; pour l'employer, il faut de plus introduire une fonction arbitraire de a'; ainfi la propofée n'eft encore repréfentée que par le fyftème des équations fimultanées

$$da' = 0,$$
$$dp - dq = \frac{2p}{a + a'}da.$$

Mais fi l'on fupppfe que la quantité ω contienne une fonction arbitraire de a', l'équation

$$(a) \quad dp - dq = \frac{2p}{a + a'}da + \omega da'$$

feule, pourra repréfenter la propofée, & le fera en effet lorfqu'on aura déterminé ω, de manière à ne rien dire de trop général : or, l'intégrale du fecond membre de cette

équation ne pouvant être qu'une fonction de a & de a', que nous indiquerons par V, l'intégrale de l'équation sera

$$p - q = V,$$

V devant être telle que l'on ait

$$\frac{dV}{da} = \frac{2p}{a + a'};$$

& ces deux équations simultanées tiendront encore lieu de la proposée, lorsqu'on aura déterminé V, de manière qu'elle n'ait que la généralité nécessaire à cet effet.

Ces deux dernières équations donnent

$$(b) \quad p = \frac{a + a'}{2} \cdot \frac{dV}{da},$$

$$(c) \quad q = \frac{a + a'}{2} \cdot \frac{dV}{da} - V.$$

Différenciant la première par rapport à x, la seconde par rapport à y, on a, à cause de $da + da' = 2dx$,

$$r = \frac{dV}{da} + \frac{a + a'}{2} \cdot \frac{ddV}{dxda},$$

$$t = -\frac{dV}{dy} + \frac{a + a'}{2} \cdot \frac{ddV}{dyda}.$$

Substituant ces valeurs dans la proposée $r - t - \frac{2p}{x} = 0$, on a

$$\frac{a + a'}{2} \left(\frac{ddV}{dxda} - \frac{ddV}{dyda}\right) + \frac{dV}{dy} - \frac{dV}{da} = 0,$$

équation à laquelle V doit satisfaire, pour que les équations (b) & (c), prises simultanément, énoncent la même chose que la proposée.

Si l'on transforme les différences partielles de V, prises par rapport à x & y, en différences prises par rapport à a & a', cette équation de condition devient

$$(a + a') \frac{ddV}{dada'} - \frac{dV}{da} = 0,$$

dont l'intégrale première eſt,

$$\frac{dV}{da'} = (a + a')\psi''' a' = 2x\psi'''(x - y);$$

or, c'eſt cette quantité $\frac{dV}{da'}$ que nous avons repréſentée par ω dans l'équation *(a)*; donc en ſubſtituant cette valeur, l'équation *(a)* deviendra

$$dp - dq = \frac{p}{x}(dx + dy) + 2x\psi'''(x - y),$$

qui coïncide avec une de celles de l'*article XVIII*, & dont l'intégrale, qui eſt l'équation *(A)*, eſt une des intégrales premières de la propoſée, & énonce ſeule la même choſe qu'elle.

Ou bien intégrant encore l'équation,

$$\frac{dV}{da'} = (a + a')\psi''' a',$$

on a

$$V = (a + a')\psi'' a' - \psi' a' + \varphi' a,$$

dans laquelle φ eſt une fonction arbitraire, & qui donne, en différenciant par rapport à a,

$$\frac{dV}{da} = \psi'' a' + \varphi'' a.$$

Actuellement que les quantités V & $\frac{dV}{da}$ ſont déterminées, ſi on ſubſtitue leurs valeurs dans *(b)* & *(c)*, on aura

$$p = \frac{a + a'}{2}(\varphi'' a + \psi'' a'),$$

$$q = \frac{a + a'}{2}(\varphi'' a + \psi'' a') - (a + a')\psi'' a' + \psi' a' - \varphi' a,$$

qui, en mettant pour a & a' leurs valeurs, deviennent

$$p = x[\varphi''(x + y) + \psi''(x - y)],$$

$$q = x[\varphi''(x + y) - \psi''(x - y)] + \psi'(x - y) - \varphi'(x + y);$$

équations qui ſont les mêmes que celles de l'*article XVI*, & qu'on intégrera en quantités finies de la même manière.

X X I.

Nous n'avons tant inſiſté ſur cet exemple, que pour mettre en état de tirer les concluſions ſuivantes.

1.° Lorſque des deux équations aux différences ordinaires

$$A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0,$$

$$A\,dp\,dy + C\,dq\,dx + D\,dx\,dy = 0,$$

que nous avons données, *article VIII*, & auxquelles on eſt conduit par la méthode de ce Mémoire, on peut en déduire une autre en dx, dy, dz, intégrable, de manière que les deux ſolutions de cette intégrale ſoient

$$V = a,\ V' = a';$$

il n'eſt pas néceſſaire que l'autre équation ſoit auſſi intégrable, ni même qu'elle le devienne en vertu de la précédente, pour que l'on puiſſe exprimer l'intégrale première de la propoſée : cela eſt néceſſaire ſeulement pour que cette intégrale première ſoit exprimée par une équation unique, & par conſéquent de la forme $U = \varphi V$, $U' = \psi V'$, V & V' étant en x, y, z. Mais, lors même que la ſeconde équation aux différences ordinaires ne ſera pas intégrable, l'intégrale première pourra ſouvent être repréſentée, comme dans l'exemple précédent, par le ſyſtème de deux équations ſimultanées qu'on pourra encore eſpérer d'intégrer en qnantités finies, mais par d'autres méthodes, parce qu'elles ne ſeront pas linéaires par rapport à p & à q.

2.° On ne pourra avoir en x, y, z, les quantités dont doivent être compoſées les deux fonctions arbitraires de l'intégrale finie, que quand des deux équations aux différences ordinaires il ſera poſſible d'en déduire une autre en dx, dy, dz, qui ſoit intégrable. Si l'on ne peut former d'équations intégrables qu'en dx, dy, dz, dp, dq, il faudra

en avoir deux pour que les deux intégrales premières puiſſent être exprimées chacune par une équation unique de la forme

$$U = \varphi V,$$

dans laquelle U & V ſoient toutes deux compoſées de x, y, z, p, q; mais, dans ce cas même, il ne ſera pas néceſſaire d'en avoir deux pour que les intégrales premières ſoient expreſſibles analytiquement, & ſouvent lorſqu'une ſeule des équations aux différences ordinaires ſera intégrable, il ſera poſſible de repréſenter chacune des intégrales premières par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, dont l'une ſera deſtinée, dans certains cas, à éliminer une indéterminée, & dans d'autres, à déterminer la forme d'une fonction ſurabondante. Nous aurons, un peu plus loin, l'occaſion d'éclaircir cela par un exemple.

Nous ne nous permettrons plus qu'une ſeule remarque, qu'il eſt néceſſaire de faire pour ne pas tomber dans de grandes erreurs.

XXII.

Lorſque des deux équations aux différences ordinaires intégrables, & qui ſont d'abord toutes deux du ſecond degré, l'une ne s'abaiſſe pas au premier degré en vertu de l'intégrale de l'autre; leurs intégrales ont chacune deux ſolutions,

$$\left.\begin{matrix} V = a \\ V' = a' \end{matrix}\right\} \text{ pour la première,}$$

$$\left.\begin{matrix} U = b \\ U' = b' \end{matrix}\right\} \text{ pour la ſeconde,}$$

qui donneroient quatre combinaiſons, deux à deux, & par conſéquent quatre équations qu'on pourroit d'abord regarder comme les intégrales premières de la propoſée. De ces quatre équations, il n'y en a que deux qui appartiennent à la propoſée, & qui la repréſentent chacune complétement; les deux autres ſont, pour ainſi dire, étrangères à la queſtion,

& l'on n'a de moyen pour diſtinguer les combinaiſons qui conviennent à l'objet, que de différencier & de reconnoître par-là celles qui ſatisfont à la propoſée. Nous en avons déjà donné un exemple dans le Mémoire précédent, ſur l'expreſſion analytique de la génération des ſurfaces courbes, où nous avons fait voir, *articles IX & XV*, que deux ſurfaces courbes, dont les générations ſont très-différentes, & qui n'ont ni les mêmes équations aux différences partielles, ni les mêmes équations en quantités finies, ſont cependant toutes deux repréſentées par le même ſyſtème de deux équations ſimultanées aux différences ordinaires du ſecond degré. Cela arrive toutes les fois que la propriété de la ſurface eſt qu'il y ait une certaine relation entre deux quantités qui ſont les racines inégales d'une même équation algébrique : ſi, dans cette relation, c'eſt toujours la même racine qui eſt employée, on a une première ſurface; mais ſi les différentes racines ſont mêlées, on a d'autres ſurfaces très-diſtinctes, & dont les équations ne ſont pas les mêmes. Nous allons en apporter un autre exemple.

XXIII.

EXEMPLE II. Soit propoſé d'intégrer l'équation

$$(D)\quad (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0;$$

qui eſt celle de la ſurface dont l'aire eſt un *minimum*, & que M. le Chevalier de Borda a publiée dans les Mémoires de l'Académie. Cette équation exprime cette propriété, remarquée par M. Meuſnier, que les deux rayons de courbure ſont par-tout égaux entr'eux & dirigés en ſens contraire. En effet, ſi l'on fait pour abréger

$$\begin{aligned} r(1 + q^2) - pqs &= \alpha, \\ t(1 + p^2) - pqs &= \beta, \\ s(1 + p^2) - pqr &= \gamma, \\ s(1 + q^2) - pqt &= \delta, \\ 1 + p^2 + q^2 &= k; \end{aligned}$$

l'expreſſion

l'expression des deux rayons de courbure d'une surface courbe, donnée par M. Euler, est,

$$R = k^3 \left\{ \frac{-\alpha - \beta + [\sqrt{(\alpha - \beta)^2 + 4\gamma\delta}]}{2(\alpha\beta - \gamma\delta)} \right\};$$

or, pour exprimer que les deux rayons de courbure sont égaux entr'eux & de signes contraires, il faut faire

$$\alpha + \beta = 0,$$

ou

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

qui est la proposée. Mais pour exprimer que les deux rayons de courbure sont égaux & de mêmes signes, il faut égaler à zéro le radical, ce qui donne

$$(E) \quad [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 - 4(rt - s^2)(1 + p^2 + q^2) = 0;$$

équation qui est très-différente de la précédente, & qui cependant sera représentée par le même système d'équations aux différences ordinaires simultanées, comme nous allons le voir.

XXIV.

Si l'on applique à la proposée *(D)*, ce que nous avons dit, *article VIII*, les équations aux différences ordinaires simultanées qui la représenteront, seront

$$(1 + q^2)dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + p^2)dx^2 = 0,$$
$$(1 + q^2)dp\,dy + (1 + p^2)dq\,dx = 0;$$

& par conséquent

$$(1 + q^2)dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1 + p^2)dq^2 = 0.$$

De ces trois équations, deux quelconques comportent la troisième ; la dernière s'intègre facilement par le moyen que nous avons donné pour les équations élevées, dans

les Mémoires de l'Académie, *année 1783*, & ſon intégrale eſt

$$(1 + q^2)a^2 - 2apq + 1 + p^2 = 0,$$

a étant la conſtante arbitraire; ce qui donne les deux ſolutions ſuivantes,

$$(F) \qquad a = \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(G) \qquad a' = \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}.$$

Cela poſé, ſelon que ce ſera l'une ou l'autre de ces deux ſolutions, que l'on combinera avec une des ſolutions de l'autre équation, ce ſera l'une ou l'autre des deux ſurfaces dont nous venons de parler, que l'on exprimera. Par exemple, ſi l'on prend la première équation aux différences ordinaires, qui a de même ſes deux racines,

$$(H) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(J) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

& que l'on combine enſemble celles où les ſignes du radical ſont les mêmes, on aura les deux équations ſimultanées *(F)*, *(H)*, ou *(G)*, *(J)*, qui appartiendront à la ſurface dont l'aire eſt un *minimum;* elles ſeront de la même généralité que la propoſée *(D)*, & elles exprimeront enſemble exactement la même choſe qu'elle. Mais ſi l'on combine les ſolutions où les ſignes du radical ſont différens, chacun des ſyſtèmes d'équations ſimultanées *(F)*, *(J)*, ou *(G)*, *(H)*, appartiendra à l'autre ſurface, & repréſentera exactement l'équation *(E)*, comme on peut s'en aſſurer par la différenciation.

XXV.

Il pouvoit donc ſe faire que l'on prît l'un de ces derniers

systèmes, parce qu'ils présentent des facilités de calcul, & l'on auroit eu les deux équations simultanées

$$(F) \qquad a = \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(J) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2};$$

de ces deux équations on auroit tiré $dy + adx = 0$, dont l'intégrale $y + ax = b$ auroit donné, en faisant $b = \varphi a$,

$$y + x\left[\frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}\right] = \varphi\left[\frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}\right],$$

pour intégrale première; & parce que l'équation *(F)* donne $aq - p = \sqrt{(-1 - a^2)}$, qui, étant elle-même linéaire, s'intègre par notre méthode, & produit $z + x\sqrt{(-1 - a^2)} = \psi a$, on auroit pu regarder l'intégrale de la proposée *(D)*, comme étant le résultat de l'élimination de a entre les deux équations

$$y + ax = \varphi a,$$
$$z + x\sqrt{(-1 - a^2)} = \psi a,$$

ce qui n'auroit pas été vrai. Ce résultat est l'intégrale finie & complète de l'équation *(E)*, & appartient à la surface dont les deux rayons de courbure sont par-tout égaux & dans le même sens. Voilà l'erreur contre laquelle nous avons voulu prémunir, & qu'on peut éviter avant que d'intégrer, en recherchant, par la différenciation, quel est le système d'équations simultanées qui reproduit la proposée.

XXVI.

Pour avoir l'intégrale de l'équation *(D)*, il faut donc employer simultanément les solutions dans lesquelles le radical a le même signe, par exemple, les deux équations suivantes:

$$(F) \qquad a = \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2},$$

$$(H) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}.$$

Si l'on fait, pour abréger, $a' = \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2}$, la dernière équation devient

$$dy + a'dx = 0,$$

dans laquelle a' n'eſt pas conſtant, & dont l'intégrale ne peut être repréſentée que par les deux équations ſimultanées

$$y + a'x = \pi a' + \varphi a,$$
$$\pi' a' = x;$$

donc l'intégrale première de l'équation *(D)*, qui appartient à la ſurface dont l'aire eſt *minimum*, eſt compriſe dans les deux équations

$$y + x \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} = \pi \left\{ \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} \right\} + \varphi \left\{ \frac{pq + \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} \right\},$$

$$\pi' \left\{ \frac{pq - \sqrt{(-1 - p^2 - q^2)}}{1 + q^2} \right\} - x = 0,$$

dont l'une eſt deſtinée à déterminer la forme de la fonction ſurabondante.

En prenant le ſyſtème des deux équations *(G)*, *(J)*, & en opérant de la même manière, on auroit eu pour l'autre intégrale première les deux équations ſimultanées

$$y + ax = \varpi a + \psi a',$$
$$\varpi' a = x.$$

Actuellement, pour arriver à l'intégrale finie, il faudroit

tirer, de ces deux intégrales premières, les valeurs de p & de q, & les ſubſtituer dans l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

& l'intégrale de cette équation ſeroit l'intégrale demandée. Cette opération ne peut pas s'exécuter, mais nous pouvons en faire l'équivalent. En effet, les deux équations (F), (G), donnent

$$(a - a')p = a\sqrt{(-1 - a'^2)} + a'\sqrt{(-1 - a^2)},$$
$$(a - a')q = \sqrt{(-1 - a'^2)} + \sqrt{(-1 - a^2)},$$

& par conſéquent,

$$(a - a')dz = (a\,dx + dy)\sqrt{(-1 - a'^2)} + (a'dx + dy)\sqrt{(-1 - a^2)}.$$

Mais les deux intégrales premières donnent

$$dy + a'dx = \varphi' a\,da,$$
$$dy + a\,dx = \psi' a'\,da';$$

donc on a en même temps

$$(a - a')\,dx = \psi' a'da' - \varphi' a\,da,$$
$$(a - a')\,dy = a\varphi' a\,da - a'\psi' a'da';$$
$$(a - a')\,dz = \psi' a'da'\sqrt{(-1 - a'^2)} + \varphi' a\,da\sqrt{(-1 - a^2)};$$

donc enfin l'intégrale ſeconde de l'équation (D), eſt le réſultat de l'élimination des deux indéterminées a & a', entre les trois équations ſuivantes,

$$x = \int \frac{\psi' a'\,da' - \varphi' a\,da}{a - a'},$$
$$y = \int \frac{a\varphi' a\,da - a'\psi' a'\,da'}{a - a'},$$
$$z = \int \frac{\psi' a'da'\sqrt{(-1 - a'^2)} + \varphi' a\,da\sqrt{(-1 - a^2)}}{a - a'},$$

& en effet, si, en différenciant ce système d'équations simultanées, on fait disparoître les deux fonctions arbitraires, & si on élimine les deux indéterminées a & a', ce qui est alors possible, on reproduit l'équation (D).

XXVII.

Nous n'abusons pas des termes en disant que le système de ces trois équations simultanées représente l'intégrale seconde de la proposée *(D)*, parce que, dans ce système, il n'est plus question d'aucunes différences partielles, ni du premier ordre, ni du second, & qu'elles sont suppléées par deux fonctions arbitraires. Quant aux intégrations aux différences ordinaires qui restent à faire, & qu'on ne peut qu'indiquer, elles tiennent à la nature des choses, & elles viennent de ce que la génération de la surface que l'on considère est transcendante. Pour éclaircir ce que nous entendons par-là, il faut se rappeler que toute équation aux différences partielles est l'expression de la génération d'une surface courbe, indépendamment des courbes qui servent à cette génération & dont il n'est pas question dans l'équation. Toutes les fois que la génération pourra s'exprimer algébriquement, les fonctions arbitraires entreront d'une manière algébrique dans l'intégrale finie de l'équation aux différences partielles ; & les équations particulières des surfaces comprises dans cette génération, ne pourront devenir transcendantes que quand les courbes génératrices, & les fonctions dont ces courbes déterminent la forme, ne seront pas algébriques. Ainsi, par exemple, une surface de révolution ne peut jamais être transcendante, par cela seul qu'elle est de révolution, & elle ne peut le devenir que quand sa courbe génératrice n'est pas algébrique. Mais lorsque cette génération sera elle-même transcendante, les fonctions arbitraires entreront aussi d'une manière transcendante dans l'intégrale finie, & il sera impossible d'exprimer cette intégrale autrement que par des différences ordinaires, ou, ce qui revient au même, sans employer

des intégrations indiquées; & les équations particulières des surfaces comprises dans cette génération, ne pourront devenir algébriques que dans les cas très-rares, où les transcendantes introduites par la génération, seront détruites par celles qu'introduiront les courbes génératrices.

XXVIII.

Quoique les intégrales finies des équations des deux surfaces courbes que nous venons de considérer, ne puissent être représentées chacune en particulier que par le système de deux équations simultanées pour la première, & de trois pour la seconde; néanmoins on peut, sans les distinguer, les intégrer par notre méthode, & obtenir une équation unique & finie qui les exprime toutes deux ensemble.

En effet, reprenons les deux équations aux différences ordinaires de l'*article XXIV*,

$$(1+q^2)dq^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+p^2)dx^2 = 0,$$
$$(1+q^2)dp^2 - 2pq\,dp\,dq + (1+p^2)dq^2 = 0;$$

qui, prises simultanément, appartiennent à ces deux surfaces. L'intégrale de la seconde, comme nous l'avons déjà dit, est

$$(1+q^2)a^2 - 2apq + 1 + p^2 = 0.$$

La première peut être mise sous la forme suivante,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0;$$

& son intégrale peut être représentée par

$$\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = b,$$

constante arbitraire. Les deux racines de cette équation étant égales, on peut déjà conclure que les deux fonctions qui compléteront l'intégrale finie seront composées de la même quantité b. Donc en faisant $a = \varphi\, b$, l'intégrale première sera

$$(1+q^2)\left[\varphi\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}\right]^2$$
$$- 2pq\varphi\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + 1 + p^2 = 0.$$

Actuellement, pour intégrer encore une fois cette équation, nous conservons la quantité a, pour abréger, & nous la mettons sous cette forme,

$$aq - p = \sqrt{(-1 - a^2)},$$

qui, étant linéaire, se traite par la méthode de l'*article III*, & donne pour équation aux différences ordinaires,

$$dz + dx\sqrt{(-1 - a^2)} = 0,$$
$$dy + a\,dx = 0,$$
$$a\,dz - dy\sqrt{(-1 - a^2)} = 0.$$

Si de deux de ces trois équations on élimine la quantité a, on aura encore

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

qui tiendra lieu d'une d'entr'elles; & si on combine cette dernière avec une des autres, par exemple, avec la seconde, ces deux équations comprendront toute la question.

Or, de ces deux équations, la première donne, comme ci-dessus,

$$\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = b,$$

& l'intégrale de la seconde, puisque a est constante, est $y + ax = c$, constante arbitraire. Donc, l'intégrale en quantités finies, commune aux deux surfaces, est

$$y + ax = \psi b,$$

qui, à cause de $a = \varphi b$, peut être mise sous la forme symétrique

$$y\varphi\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + x\psi\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} + 1 = 0.$$

XXIX.

Pour nous assurer que cette équation est l'intégrale commune aux deux surfaces, dont les deux rayons de courbure

courbure ſont par-tout égaux entr'eux, ſans diſtinction de ſens, il faut faire évanouir les deux fonctions φ & ψ, ce qui ſe fait commodément par le procédé de l'*article Ier* Pour cela, mettons-la ſous la forme

$$y + x\varphi = \psi;$$

& nous aurons les deux équations aux différences ordinaires

$$dy + dx\varphi = 0,$$
$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

ou

$$(1 + q^2)dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + p^2)dx^2 = 0;$$

& éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre la première & la troiſième, on aura pour différentielle première

$$(K) \quad (1 + q^2)\varphi^2 - 2pq\varphi + 1 + p^2 = 0.$$

Le même procédé donnera encore les deux équations aux différences ordinaires

$$(L) \quad q(s\,dx + t\,dy)\varphi^2 - \left\{ \begin{matrix} p\varphi(s\,dx + t\,dy) \\ q\varphi(r\,dx + s\,dy) \end{matrix} \right\} + p(r\,dx + s\,dy) = 0,$$

$$(M) \quad (1 + q^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + 1 + p^2 = 0;$$

& éliminant les deux quantités φ & $\frac{dy}{dx}$ entre les trois équations *(K)*, *(L)*, *(M)*, la réſultante ſera compoſée des deux facteurs ſuivans:

$$(D) \quad (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0;$$

$$(E) \quad [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]^2 - 4(1 + p^2 + q^2)(rt - s^2) = 0.$$

Le premier eſt la propoſée de l'*article XXIII*, c'eſt-à-dire, l'équation de la ſurface, dont les deux rayons de courbure ſont par-tout égaux entr'eux, & en ſens contraire, ou

dont l'aire eſt un *minimum :* le ſecond eſt l'équation de la ſurface pour laquelle les rayons de courbure ſont égaux, & dans le même ſens.

Cette diſtinction néceſſaire des racines des équations aux différences ordinaires, n'eſt pas une ſuite de la méthode que nous propoſons, elle tient à la nature même des choſes : il faudroit donc pareillement l'obſerver dans tout autre procédé d'intégration, & nous ne croyons pas qu'il y en ait qui fourniſſe pour cela des moyens auſſi ſimples & auſſi naturels.

XXX.

On nous a encore propoſé d'intégrer l'équation

$$r - t + 2bq = 0,$$

qu'on a coutume de regarder comme n'ayant point d'intégrales premières; nous allons intégrer la ſuivante,

$$(A) \quad Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0,$$

dont elle eſt un cas particulier, & dans laquelle tous les coéfficiens ſont ſuppoſés conſtans. Dans ce cas, les équations aux différences ordinaires de l'*article VIII,* deviennent

$$A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0,$$

$$A\,dp\,dy + C\,dq\,dx + dx\,dy\,(Dp + Eq + F) = 0.$$

Les racines de la première ſont

$$dy - k\,dx = 0, \;\&\; dy - k'dx = 0;$$

k & k' étant les racines de l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0.$$

En employant la première racine, la ſeconde équation devient

$$A(dp + k'dq) + dx\,(Dp + Eq + F) = 0;$$

& ſi l'on fait

$$dy - k\,dx = da,\; dy - k'dx = da',$$

ce qui donne $dx = \frac{da' - da}{k - k'}$, & $dy = \frac{k\,da' - k'da}{k - k'}$;
cette équation, à cause de l'hypothèse $da = 0$, devient

$$A(dp + k'dq) + \frac{da'}{k - k'}(Dp + Eq + F) = 0,$$

dont l'intégrale est représentée par le système des deux équations simultanées

$$A(p + k'q) + \psi' a' = \varphi' a,$$
$$(k - k')\psi'' a' = Dp + Eq + F:$$

c'est le système de ces deux équations, dont l'une est destinée à déterminer la forme de la fonction surabondante, qui est l'intégrale première complète de la proposée. Actuellement, si de ces deux équations on tire les valeurs de p & de q, & qu'on les substitue dans $dz = pdx + qdy$, en employant pour dx & dy les valeurs trouvées plus haut; on a en intégrant

$$\left.\begin{array}{l} z(Dk' - E) - a'F + A(k - k')^2\psi' a' \\ + (Dk - E)\psi a' - (Dk' - E)\varphi a \\ + \int[(Dk - E)\varphi' a da' - (Dk' - E)\psi' a' da \end{array}\right\} = 0,$$

qui est l'intégrale complète de l'équation *(A)*.

Il suit de-là, que l'intégrale complète de l'équation $r - t + 2bq = 0$, est

$$z = \varphi a + \psi a' - \frac{2}{b}\psi' a' - \int(\varphi' a da' + \psi' a' da);$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$y - x = a, \; \& \; y + x = a'.$$

De l'intégration des équations aux différences partielles linéaires du troisième ordre.

XXXI.

Soit fait pour abréger

$$dr = \alpha dx + \beta dy,$$

$$ds = \beta dx + \gamma dy,$$

$$dt = \gamma dx + \varepsilon dy,$$

de manière que α, β, γ, ε, ſoient les quatre différences partielles du troiſième ordre; & ſoit propoſé d'intégrer l'équation linéaire générale

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\varepsilon + E = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens A, B, C, D, E, ſoient donnés, d'une manière quelconque, en x, y, z, p, q, r, s, t. Si de cette équation & des trois précédentes, on élimine trois des quatre quantités α, β, γ, ε, les trois dernières, par exemple, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(Ady^3 - Bdy^2dx + Cdydx^2 - Ddx^3) \\ \quad + dy^2(Bdr + Cds + Ddt) \\ \quad - dxdy(Cdr + Dds) \\ \quad + dx^2 Ddr \\ \quad + Edy^3 \end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation devant avoir lieu indépendamment de α; qui ne peut être déterminé, donne les deux équations aux différences ordinaires

$$Ady^3 - Bdy^2dx + Cdydx^2 - Ddx^3 = 0,$$

$$dy^2(Bdr + Cds + Ddt) - dxdy(Cdr + Dds) + Ddx^2dr + Edy^3 = 0.$$

Cela poſé, ſi ces deux équations ſont immédiatement intégrables, ou ſi on peut en déduire deux autres qui le ſoient, ou ſi l'une le devient en vertu de l'intégrale de l'autre . . . &c. & que les deux intégrales ſoient

$$V = a,$$

$$U = b,$$

a & b étant les conſtantes arbitraires introduites par intégration, l'intégrale première de la propoſée ſera

$$V = \varphi U.$$

Nous ne nous permettrons qu'un ſeul exemple.

XXXII.

Soit propoſé d'intégrer l'équation des ſurfaces engendrées d'une manière quelconque, par le mouvement d'une ligne droite, & qui en faiſant, pour abréger,

$$-s + \sqrt{(s^2 - rt)} = u,$$

eſt $t^3\alpha + 3t^2u\beta + 3tu^2\gamma + u^3\varepsilon = 0$;

les deux équations aux différences ordinaires de l'*article précédent*, deviennent, dans ce cas,

$$t^3dy^3 - 3t^2udy^2dx + 3tu^2dydx^2 - u^3dx^3 = 0,$$

$$dy^2(3t^2dr + 3tuds + u^2dt) - dxdy(3utdr + u^2ds) + u^2dx^2dr = 0.$$

La première a les trois racines égales,

$$(A) \quad tdy - udx = 0;$$

& la ſeconde, en vertu de cette racine, devient

$$(B) \quad u^2dt + 2utds + t^2dr = 0:$$

ainſi les deux équations *(A)* & *(B)*, priſes ſimultanément, renferment toute la queſtion.

Or l'intégrale de *(B)* eſt $\frac{u}{t} = a$,

& celle de *(A)*, puiſque $\frac{u}{t}$ eſt conſtant, eſt

$$y = ax + b;$$

donc l'intégrale première de la propoſée, eſt

$$y = \frac{u}{t}x + \varphi\left(\frac{u}{t}\right).$$

Cette équation n'eſt pas linéaire, & cependant on peut

encore la traiter par la méthode de ce Mémoire; car elle exprime que si l'on fait $\frac{u}{t}$ = constante = a, ce qui donne, en mettant pour u sa valeur,

$$r + 2as + a^2t = 0,$$

on a $$y = ax + \varphi a,$$

Or l'intégrale complète de la première est

$$z = x\psi(ax - y) + \pi(ax - y), \ldots$$

qui, en vertu de la seconde, devient

$$z = x\psi a + \pi a;$$

donc l'intégrale troisième & complète de la proposée, est représentée par le système des deux équations simultanées

$$y = ax + \varphi a,$$
$$z = x\psi a + \pi a,$$

c'est-à-dire, qu'elle est le résultat qu'on obtiendroit en éliminant l'indéterminée a entre ces deux équations; ce que nous avons déjà fait voir ailleurs.

XXXIII.

Si les deux équations aux différences ordinaires avoient toutes deux plusieurs racines inégales, il faudroit les distinguer d'une manière analogue à celle que nous avons employée pour le second ordre.

XXXIV.

Il est facile de voir que le procédé que nous venons de détailler pour les trois premiers ordres, est applicable à tous les ordres supérieurs, & que le raisonnement qui nous a conduit, tant dans la nouvelle manière de différencier, que dans le procédé d'intégration qui en résulte, contient la véritable métaphysique du calcul aux différences partielles.

De l'intégration des Équations aux différences partielles linéaires, pour un nombre quelconque de Variables principales.

Nous nous contenterons d'expoſer la méthode pour le cas des trois variables principales & pour les deux premiers ordres ; il ſera facile enſuite de l'appliquer aux autres cas.

XXXV.

Soient u, x, y, les trois variables principales, & z la variable qui en dépend; ſoit auſſi

$$dz = pdu + qdx + rdy,$$

de manière que les trois différences partielles du premier ordre, ſoient exprimées par p, q, r. Cela poſé, ſi l'on a l'équation générale linéaire

$$Ap + Bq + Cr + D = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens A, B, C, D ſoient donnés d'une manière quelconque en u, x, y, z; au moyen de la valeur de dz, on pourra chaſſer une des trois quantités p, q, r, ce qui donnera l'une des trois équations

$$Adz + Ddu = q(Adx - Bdu) + r(Ady - Cdu),$$
$$Bdz + Ddx = -p(Adx - Bdu) + r(Bdy - Cdx),$$
$$Cdz + Ddy = -p(Ady - Cdu) - q(Bdy - Cdx).$$

Chacune de ces équations devant avoir lieu indépendamment des valeurs de p, q, r, qui ne doivent pas être déterminées, même l'une d'elles, en une autre ſeule, il s'enſuit que les coéfficiens de ces quantités doivent être ſimultanément égaux à zéro, & qu'on doit avoir en même temps les ſix équations ſuivantes:

$$Adz + Ddu = 0,$$
$$Bdz + Ddx = 0,$$
$$Cdz + Ddy = 0,$$

$$Adx - Bdu = 0,$$
$$Bdy - Cdz = 0,$$
$$Cdu - Ady = 0,$$

dont trois quelconques comportent les trois autres.

Actuellement, ſi de ces ſix équations, trois quelconques ſont intégrables immédiatement, ou ſi on peut en compoſer trois autres qui ſoient intégrables, ou ſi l'une étant intégrée, deux autres quelconques deviennent intégrables en vertu de l'intégrale de la première, &c. enfin ſi on peut en tirer d'une manière quelconque trois intégrales complètes,

$$V = a$$
$$U = b$$
$$W = c,$$

qui tiennent lieu de trois d'entr'elles, a, b, c étant les conſtantes arbitraires introduites par intégration, ces trois intégrales ſimultanées exprimeront la même choſe que la propoſée: or elles ſignifient, non que les quantités V, U, W, ſont conſtantes chacune en particulier, mais que l'une quelconque étant conſtante, les deux autres le ſont néceſſairement, ou que l'une eſt fonction arbitraire des deux autres; donc l'équation

$$V = \varphi(U.\&\, W),$$

exprimera la même choſe que la propoſée, & ſera ſon intégrale complète.

XXXVI.

Il eſt facile de voir que l'équation générale linéaire du premier ordre, & pour un nombre quelconque de variables principales, ſe traitera de la même manière; & par un ſemblable raiſonnement, on trouve que ſi $\alpha', \alpha'', \alpha''' \ldots \alpha'^{m\prime}$, ſont les variables principales en nombre m, & que l'on ait l'équation linéaire

$$A\frac{dz}{d\alpha'} + B\frac{dz}{d\alpha''} + C\frac{dz}{d\alpha'''} \ldots + M\frac{dz}{d\alpha'^{m\prime}} + N = 0,$$

dans

dans laquelle les coéfficiens $A, B, C, \ldots M, N$, ſoient donnés d'une manière quelconque en fonctions de toutes les variables, il faudra poſer les m équations ſuivantes aux différences ordinaires,

$$\begin{aligned} A\,dz + N\,d\alpha' &= 0, \\ B\,dz + N\,d\alpha'' &= 0, \\ C\,dz + N\,d\alpha''' &= 0, \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots \\ M\,dz + N\,d\alpha'''' &= 0. \end{aligned}$$

Cela fait, ſi toutes ces équations ſont immédiatement intégrables, ou ſi les unes ſont intégrables en vertu des intégrales des autres, ou ſi on peut en déduire d'une manière quelconque un nombre m d'autres équations qui les comportent toutes & qui ſoient toutes intégrables, & que les conſtantes arbitraires de toutes ces intégrales ſoient

$$a, b, c, \ldots\ldots\ldots\ldots \mu,$$

l'intégrale complète de la propoſée ſera

$$a = \varphi\,(b, c, \ldots\ldots\ldots\ldots \mu).$$

XXXVII.

Les variables principales étant encore comme ci-devant u, x, y, ſoit l'équation linéaire générale aux ſecondes différences

$$\left.\begin{aligned} &A\frac{ddz}{du^2} + B\frac{ddz}{dx^2} + C\frac{ddz}{dy^2} \\ &+ D\frac{ddz}{dxdy} + E\frac{ddz}{dydu} + F\frac{ddz}{dudx} + G \end{aligned}\right\} = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens ſont fonctions des quatre variables & des différences partielles premières; on a d'ailleurs toujours

$$d.\frac{dz}{du} = \frac{ddz}{du^2}du + \frac{ddz}{dudx}dx + \frac{ddz}{dudy}dy,$$

$$d.\frac{dz}{dx} = \frac{ddz}{dudx}du + \frac{ddz}{dx^2}dx + \frac{ddz}{dxdy}dy,$$

$$d.\frac{dz}{dy} = \frac{ddz}{dudy}du + \frac{ddz}{dxdy}dx + \frac{ddz}{dy^2}dy.$$

Si l'on ſubſtitue dans la propoſée, à la place des différences partielles

$$\frac{ddz}{du^2},\ \frac{ddz}{dx^2},\ \frac{ddz}{dy^2},$$

leurs valeurs priſes dans les trois dernières équations, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ddz}{dxdy}(Ddudxdy - Bdudy^2 - Cdudx^2) \\ + \frac{ddz}{dudy}(Edudxdy - Adxdy^2 - Cdu^2dx) \\ + \frac{ddz}{dudx}(Fdudxdy - Adx^2dy - Bdu^2dy) \\ + \quad Adxdyd\frac{dz}{du} + Bdudyd.\frac{dz}{dx} \\ + Cdudxd\frac{dz}{dy} + Gdudxdy \end{array}\right\} = 0;$$

équation dans laquelle aucune des trois quantités

$$\frac{ddz}{dxdy},\ \frac{ddz}{dudy},\ \frac{ddz}{dudx},$$

ne doit être déterminée, & qui devant avoir lieu indépendamment des valeurs de ces trois quantités, donne les quatre équations ſimultanées ſuivantes,

$$Cdx^2 - Ddxdy + Bdy^2 = 0,$$
$$Ady^2 - Edydu + Cdu^2 = 0,$$
$$Bdu^2 - Fdudx + Adx^2 = 0,$$
$$Adxdyd.\frac{dz}{du} + Bdudyd.\frac{dz}{dx}$$
$$+ Cdudxd.\frac{dz}{dy} + Gdudxdy = 0.$$

De ces quatre équations, les trois premières étant entre les deux quantités

$$\frac{du}{dy} \;\&\; \frac{du}{dx},$$

ne peuvent avoir lieu elles-mêmes, à moins que l'équation de condition ſuivante ne ſoit ſatisfaite,

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = 4ABC + DEF.$$

Donc, 1.° la propoſée n'eſt intégrable que lorſque les coéfficiens ſatisfont à cette condition; 2.° ces quatre équations aux différences ordinaires n'en repréſentent réellement que trois, à cauſe de l'équation de condition.

Actuellement, ſi de ces quatre équations, la dernière & deux des autres ſont intégrables immédiatement, ou ſi on peut en déduire d'une manière quelconque trois autres qui ſoient intégrables & qui en comportent trois en y comprenant toujours la dernière, & que les conſtantes arbitraires qui complèteront ces intégrales ſoient a, b, c; une des intégrales premières de la propoſée ſera,

$$a = \varphi\,(b, c).$$

XXXVIII.

En raiſonnant de même, on trouvera les équations aux différences ordinaires, dont les intégrales donneront celles des équations aux différences partielles des ordres ſupérieurs; mais on trouvera auſſi que le nombre des conditions auxquelles les coéfficiens doivent ſatisfaire pour que l'équation ſoit intégrable, eſt toujours moindre d'une unité que l'ordre des différentielles, dans les cas de trois variables principales.

Nous n'entrerons pas, à cet égard, dans de plus grands détails, & nous terminerons cet article en répétant encore que les équations ſimultanées aux différences ordinaires ſont enſemble de la même généralité que l'équation aux différences partielles. Le travail de l'intégration ne conſiſte

donc plus, lorſqu'elle eſt poſſible, qu'à transformer ces équations en d'autres qui les comportent toutes & qui ſoient intégrables.

De l'intégration des Équations aux différences partielles élevées.

L'intégration des équations aux différences partielles élevées ayant une très-grande analogie avec celles des équations aux différences ordinaires qui ne ſont pas linéaires, nous allons répéter ici, d'une manière un peu plus générale, ce que nous avons dit ſur ce dernier objet, dans un Mémoire imprimé dans le volume de l'Académie, de 1782.

Si dans une équation algébrique quelconque, délivrée de radicaux & de diviſeurs, les coéfficiens $A, B, C, D \ldots$ &c. des différens termes ſont indépendans les uns des autres, c'eſt-à-dire, s'ils ſont regardés comme donnés immédiatement; qu'enſuite on différencie cette équation un certain nombre de fois, & qu'après chaque différenciation on élimine une des conſtantes $A, B, C, D \ldots$ &c. l'équation différentielle à laquelle on arrivera, ſera toujours linéaire par rapport aux plus hautes différences. Par exemple, ſi l'on a l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1,$$

& qu'on la différencie trois fois de ſuite, ce qui donnera, en faiſant $ddx = 0$,

$$2Axdx + B(xdy + ydx) + 2Cydy = 0,$$

$$2Adx^2 + B(xddy + 2dxdy) + 2C(dy^2 + yddy) = 0,$$

$$B(xd^3y + 3dxddy) + 2C(3dyddy + yd^3y) = 0;$$

ſuivant qu'on éliminera entre la propoſée & la première différentielle, l'une des trois conſtantes $A, B, C,$ on aura

une des trois différentielles premières, dans chacune desquelles les différences dx, dy, seront linéaires; parce que dans chaque élimination on ne multiplie jamais, les uns par les autres, les termes d'une même équation, & que chaque terme de la seconde ne doit être multiplié que par des termes de la première qui ne contiennent point de différence.

Pareillement, selon qu'on éliminera entre la proposée & les deux premières différentielles, deux quelconques des trois coéfficiens A, B, C, on aura l'une des trois différentielles secondes, dans chacune desquelles la quantité ddy sera linéaire; parce que dans cette opération on n'aura multiplié chaque terme de la troisième que par des termes pris dans les deux autres, qui ne contiennent point de secondes différences.

Enfin, si on élimine entre les quatre équations, les trois coéfficiens, l'équation unique à laquelle on sera conduit, contiendra d^3y linéaire, par la même raison.

Mais, si dans la proposée, les coéfficiens A, B, C, ne sont pas considérés comme donnés immédiatement & qu'ils soient fonctions données d'autres quantités a, b, c, élevées à différentes puissances dans les différens coéfficiens, lorsque par la différenciation on fera disparoître une des quantités a, b, c, l'équation différentielle ne sera pas linéaire. Par exemple, si l'on avoit

$$(a + b)^2 x^2 + (a - b)^2 y^2 = 1,$$

& si après avoir différencié une première fois, ce qui donneroit

$$(a + b)^2 x dx + (a - b)^2 y dy = 0,$$

on vouloit éliminer ou a ou b, pour avoir l'une des deux différentielles premières; l'équation à laquelle on arriveroit contiendroit dx^2, dy^2 & $dxdy$, parce que dans l'élimination entre des équations élevées, on multiplie les unes par les autres, des fonctions qui contiennent chacune des termes pris dans les deux équations.

Il ſuit donc de-là qu'une équation aux différences ordinaires n'eſt élevée, que parce que la conſtante arbitraire a fait diſparoître par la différenciation, n'étoit pas linéaire dans l'intégrale.

X L.

Actuellement, ſi l'on différencie une des deux différentielles premières de l'équation précédente, par exemple, celle qui ne contient que b, & qu'on élimine encore cette conſtante, la différentielle ſeconde qu'on obtiendra, & qui ſera délivrée de deux conſtantes a & b, ſera la même que celle qu'on auroit eue en regardant chacun des coéfficiens $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ de l'intégrale comme indépendant; & par conſéquent, dans cette équation, la quantité ddy ſera linéaire. On pourra donc trouver, de cette équation, deux intégrales premières différentes, dans chacune deſquelles la conſtante arbitraire ſera linéaire; & en éliminant entre ces deux intégrales premières la quantité $\frac{dy}{dx}$, on arrivera à l'équation $Ax^2 + By^2 = 1$. Si l'on veut que cette intégrale, qui contient deux conſtantes arbitraires, ne ſoit pas plus générale que la différentielle première qui ne contient que b, il faut ſubſtituer dans cette différentielle pour y & pour $\frac{dy}{dx}$, les valeurs que fournit l'intégrale, & déterminer A en B de manière que l'équation réſultante ſoit ſatisfaite indépendamment de x.

X L I.

Il ſuit de-là que ſi l'on a une équation élevée aux différences ordinaires

$$V = 0,$$

de l'ordre m, & dont l'intégrale ſoit algébrique, & que l'on différencie ſucceſſivement une, deux, trois... fois cette équation, en faiſant évanouir à chaque fois une conſtante, s'il y en a, ou une variable, s'il n'y a pas de conſtante, on

arrivera, après un certain nombre n d'opérations, à une équation différentielle linéaire de l'ordre $m + n$. Cette équation aura un nombre $m + n$ d'intégrales premières possibles, dans chacune desquelles la constante arbitraire sera linéaire; si l'on en trouve seulement un nombre m, & qu'entre ce nombre m d'équations & les autres dont le nombre est encore n, on élimine les quantités

$$\frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{d^{m+n-1}y}{dx^{m+n-1}}.$$

on aura en x, y, & constantes arbitraires, l'intégrale finie & complète de la proposée.

Il est facile de voir que la même chose auroit encore lieu, quand même la proposée ne seroit intégrable qu'au moyen des logarithmes & des arcs-de-cercle; en sorte que le procédé que nous venons d'exposer contient la méthode d'intégrer toutes les équations élevées dont les intégrales sont expressibles en quantités finies.

XLII.

Tout ce que nous venons de dire, peut s'appliquer aux équations aux différences partielles. En effet, lorsque les fonctions arbitraires qui se trouvent dans une équation intégrable sont toutes linéaires, & que les quantités qui entrent sous les fonctions sont toutes données immédiatement, l'équation qu'on obtient en faisant évanouir les fonctions arbitraires, est elle-même toujours linéaire. Mais, 1.° si les fonctions arbitraires sont élevées à différentes puissances dans les différens termes de l'intégrale; 2.° si les quantités, sous les fonctions, ne sont données que par d'autres équations dans lesquelles elles se trouvent encore sous des fonctions arbitraires, & que dans ce cas elles ne soient pas linéaires par-tout, l'équation aux différences partielles, qui énonce la même chose que l'intégrale, est toujours élevée. Il y a donc deux espèces d'équations aux différences partielles qui ne sont pas linéaires: les unes ont pour

intégrale finie une équation unique; l'intégrale des autres ne peut être exprimée en quantité finie que par le ſyſtème de plusieurs équations ſimultanées, entre leſquelles il faudroit éliminer les indéterminées qui ſe trouvent ſous des fonctions arbitraires. Néanmoins nous ne les diſtinguerons pas, parce que la méthode que nous allons propoſer convient également aux unes & aux autres.

X L I I I.

Des Équations aux différences partielles élevées du premier ordre.

Une équation aux différences partielles n'étant élevée que parce que la fonction arbitraire qu'on a fait évanouir en différenciant ſon intégrale, ou l'indéterminée qu'on a éliminée, n'étoit pas linéaire; il s'enſuit que ſi l'on eût regardé les différentes puiſſances de la fonction, comme des fonctions différentes, ou celles de l'indéterminée, comme d'autres fonctions arbitraires de cette même quantité, en faiſant diſparoître toutes ces fonctions par des différenciations, on ſeroit arrivé à une équation dont l'ordre auroit été plus haut, & qui auroit été linéaire. C'eſt cette équation linéaire qu'il faut retrouver par la différenciation, lorſque cela eſt poſſible, pour l'intégrer enſuite par la méthode que nous avons donnée précédemment.

Soit (A) $W = 0$

une équation compoſée d'une manière quelconque en x, y, z, p, q: & poſons qu'en la différenciant aux différences ordinaires, on ait

$$Adp + Bdq + Cdx + Ddy = 0.$$

Comme la différenciation qui fait diſparoître une fonction arbitraire eſt hypothétique, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt toujours priſe en ſuppoſant entre dx & dy, un certain rapport, au

moyen

moyen duquel on chaſſe enſuite $\frac{dy}{dx}$ de l'équation, poſons que ce rapport ſoit tel que l'on ait $Cdx + Ddy = 0$; nous aurons donc les deux équations ſimultanées

$$Adp + Bdq = 0,$$
$$Cdx + Ddy = 0,$$

entre leſquelles, éliminant la quantité $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$(B) \quad ADr + (BD - AC)s - BCt = 0,$$

équation qui doit être regardée comme le réſultat de la différenciation de l'équation *(A)*. Actuellement, ſi, dans cette équation, quelqu'une des conſtantes qui entrent dans la première, a diſparu, elle ſera l'équation linéaire dont l'intégrale donnera celle de la propoſée, comme nous le ferons voir dans un moment. Mais ſi l'équation *(B)* contient encore toutes les conſtantes de l'équation *(A)*, il faudra en éliminer une; & ſi le réſultat de l'élimination eſt linéaire par rapport aux différences ſecondes, ce ſera encore l'équation qu'il faudra intégrer: enfin, ſi par l'élimination d'aucune conſtante, on n'arrive à un réſultat linéaire, il faudra traiter ce réſultat par la méthode des équations élevées du ſecond ordre.

Suppoſons d'abord que dans l'équation *(B)*, quelques-unes des conſtantes de la propoſée, ou quelque variable, s'il n'y a pas de conſtante, ait diſparu. En traitant cette équation par la méthode de l'*article VIII*, on a les deux équations aux différences ordinaires,

$$ADdy^2 - (BD - AC)\,dxdy - BCdx^2 = 0,$$
$$ADdpdy - BCdqdx = 0.$$

La première a deux racines, $Cdx + Ddy = 0$, & $Ady - Bdx = 0$; ſi l'on employoit la première racine, on ſeroit reconduit à la propoſée, tandis que l'objet eſt de

trouver l'autre intégrale première de l'équation aux différences ſecondes, ce qu'on ne peut obtenir qu'à l'aide de la ſeconde racine : ainſi on aura les deux équations ſimultanées

$$(C) \quad A\,dy - B\,dx = 0,$$

$$(D) \quad C\,dq - D\,dp = 0.$$

Actuellement, ſi ces deux équations aux différences ordinaires, que l'on peut encore réduire par l'équation *(A)*, ſont intégrables, ou ſi l'une peut s'intégrer en vertu de l'intégrale de l'autre, ou enfin ſi on peut en déduire d'une manière quelconque deux autres qui les comportent, & qui ſoient intégrables, en ſorte que leurs intégrales complètes étant

$$V = \alpha,$$

$$U = \varphi\alpha,$$

on puiſſe, à l'aide de ces deux équations, éliminer p & q de la propoſée; le réſultat de l'élimination ſera en x, y, z, α, l'intégrale complète de la propoſée, indépendamment de la valeur de α : donc ſi on différencie ce réſultat en ne faiſant varier que α, on aura deux équations ſimultanées qui comprendront l'intégrale demandée.

X L I V.

Si, en éliminant les quantités p & q, l'indéterminée α diſparoît en même temps, l'intégrale complète de la propoſée ſera une équation unique, dans laquelle la fonction arbitraire ſera élevée à différentes puiſſances dans les différens termes. Nous allons éclaircir ce procédé par des exemples ſimples.

X L V.

EXEMPLE I. Soit propoſé d'intégrer l'équation

$$(ap + q)^2 - ax(ap + q) + a^2 z = 0.$$

En différenciant, on a

$$adp + dq = 0,$$
$$dx - ady = 0;$$

par conséquent les équations *(C)* & *(D)* deviennent

$$ady - dx = 0,$$
$$adq + dq = 0;$$

donc les intégrales sont

$$ay - x = \alpha$$
$$ap + q = \varphi\alpha = \varphi(ay - x).$$

Substituant pour $ap + q$, cette valeur dans la proposée, on trouve pour intégrale complète,

$$[\varphi(ay - x)]^2 + x\varphi(ay - x) + z = 0;$$

dans cette intégrale, l'indéterminée α disparoît en même temps que les différences partielles p & q, parce que la proposée n'est élevée qu'en vertu de la première cause que nous avons rapportée.

XLVI.

Exemple II. Soit proposé d'intégrer

$$a^2(1 + p^2 + q^2) = (z - px - qy)^2,$$

qui est l'équation des surfaces développables circonscrites à la sphère, dont le centre est à l'origine, & dont le rayon est a. En la différenciant aux différences ordinaires, on trouve $C = 0$, $D = 0$, c'est-à-dire, qu'il n'y a pas de termes affectés de dx & de dy, & que cette différentielle se réduit à la forme

$$Mdp + Ndq = 0;$$

d'où l'on tire

$$p = \varphi q.$$

Substituant cette valeur de p dans la proposée, on a

$$a^2 [1 + q^2 + (\varphi q)^2] = (z - x\varphi q - qy)^2,$$

qui doit avoir lieu indépendamment de la valeur de q; donc, si on différencie cette équation, en ne faisant varier que q, ce qui donne

$$a^2 [q + (\varphi q)(\varphi' q)] - (z - x\varphi q - qy)(x\varphi' q + y) = 0,$$

on aura deux équations simultanées qui comprendront l'intégrale de la proposée.

XLVII.

Exemple III. Si l'on avoit eu

$$a^2 + b^2 p^2 + c^2 q^2 = (z - px - qy)^2,$$

a, b, c étant des constantes, on auroit trouvé pareillement $p = \varphi q$, & l'intégrale complète auroit été le résultat de l'élimination de q entre les deux équations suivantes,

$$a^2 + b^2 (\varphi q)^2 + c^2 q^2 = (z - x\varphi q - qy)^2,$$

$$b^2 (\varphi q)(\varphi' q) + c^2 q - (z - x\varphi q - qy)^2 (x\varphi' q + y).$$

Cette équation est celle des surfaces développables circonscrites à une surface du second degré, dont le centre est à l'origine, & dont les axes a, b, c sont dirigés suivant ceux des x, y, z.

XLVIII.

En général, si en représentant par M la quantité $z - px - qy$, on a une équation composée d'une manière quelconque en p, q, M, elle donnera, comme les précédentes, $p = \varphi q$, & elle appartiendra par conséquent à une surface développable. Si donc on met partout φq à la place de p, dans cette équation, & qu'on la différencie ensuite en regardant q comme seule variable, on aura deux équations simultanées qui comprendront

l'intégrale de la propoſée, indépendamment de l'indéterminée q; il faut en excepter le cas où M diſparoîtroit, parce qu'alors cette méthode ne donneroit rien.

XLIX.

Exemple IV. Soit propſée $z^2(1+p^2+q^2)=a^2$, dans laquelle a eſt une conſtante: en la différenciant aux différences ordinaires, on a

$$A = pz,$$
$$B = qz,$$
$$C = p(1+p^2+q^2),$$
$$D = q(1+p^2+q^2);$$

par conſéquent, les équations *(C), (D)* de l'*article XLIII*, deviennent

$$p\,dy - q\,dx = 0,$$
$$p\,dq - q\,dp = 0.$$

Pour les intégrer, faiſons

$$p - Vq = 0,$$

& elles deviendront

$$dp - V\,dq = 0,$$
$$dx - V\,dy = 0.$$

De ces trois dernières équations, multipliant la première par dz, la ſeconde par z, & ajoutant les trois enſemble, on a

$$p\,dz + z\,dp + dx - V(q\,dz + z\,dq + dy) = 0;$$

cette équation devant avoir lieu, indépendamment de l'indéterminée V, que nons avons introduite, donne les deux équations ſimultanées,

$$p\,dz + z\,dp + dx = 0,$$
$$q\,dz + z\,dq + dy = 0,$$

qui énoncent la même chose que les deux premières équations aux différences ordinaires simultanées, & dont les intégrales sont

$$pz + x = \alpha,$$
$$qz + y = \varphi\alpha.$$

Substituant dans la proposée pour p & q les valeurs que donnent les deux intégrales, on aura

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2;$$

& différenciant cette équation, en ne faisant varier que α, ce qui donne

$$x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha = 0,$$

on aura deux équations, qui, prises simultanément, comprendront l'intégrale demandée.

De ces deux équations, la première est celle d'une sphère constante de rayon, & dont le centre est sur une courbe tracée dans le plan des x & y, l'équation de cette courbe étant $y = \varphi x$; la seconde énonce qu'on ne considère dans chaque sphère que les points dont les coordonnées x, y, z, ne varient point quand α varie; elles expriment donc ensemble que la surface à laquelle elles appartiennent, est l'enveloppe d'une suite de sphères constantes de rayon, & dont les centres sont placés sur une courbe quelconque tracée dans le plan des x & y.

L.

L'hypothèse que nous avons adoptée dans la différenciation de l'*article XLIII*, & qui consistoit à faire

$$Cdx + Ddy = 0,$$

& à substituer ensuite dans l'autre équation la valeur de $\frac{dy}{dx}$, que fournit celle-ci, étoit arbitraire, & on peut, au lieu d'elle, employer toutes celles qui, en faisant disparoître une constante, conduisent à une équation aux différences

ſecondes que l'on ſache traiter. Cette conſidération, qui donne de l'étendue à la méthode que nous propoſons, la rend auſſi plus vague, & même indéterminée; elle nous a conduit à des réſultats qui pourront paroître curieux, & que nous allons expoſer.

Si les trois quantités L, M, N, ſont données d'une manière quelconque en x, y, z, p, q, mais qu'il y ait entr'elles cette relation que des trois équations ſuivantes aux différences ordinaires

$$dL = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$

deux quelconques étant poſées, la troiſième s'enſuive néceſſairement; & que l'on ait une équation aux différences partielles, composée d'une manière quelconque des trois quantités L, M, N, & repréſentée par

$$F(L, M, N,) = 0,$$

dans laquelle la forme de la fonction F ſoit tout ce qu'on voudra, déterminée, ou arbitraire, algébrique, ou tranſcendante; en la différenciant aux différences ordinaires, on aura une équation de cette forme,

$$A\,dL + B\,dM + C\,dN = 0.$$

Et ſi l'on prend pour hypothèſe, que l'une de ces trois différentielles ſoit nulle, on aura, par exemple, les deux équations ſimultanées

$$A\,dL + B\,dM = 0,$$
$$dN = 0,$$

qui ſignifient que la ſeconde étant ſuppoſée, on a M égale à une fonction de L; mais par la condition entre ces trois quantités, on a auſſi N égale à une fonction des deux autres; on aura donc les trois équations ſimultanées

$$L = \alpha,$$
$$M = \varphi\alpha,$$
$$N = \psi\alpha:$$

on a d'ailleurs, en vertu de la proposée,

$$F(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha) = 0.$$

Si donc entre ces quatre équations, on élimine $p, q,$ & une des deux fonctions arbitraires, on aura une équation $V = 0$, en x, y, α, & une fonction arbitraire, qui devra avoir lieu indépendamment de l'indéterminée α, & qui, prise simultanément avec l'équation $\frac{dV}{d\alpha} = 0$, comportera l'intégrale complète de la proposée.

L I.

EXEMPLE I. Soit proposée

$$(ax + by + cz - 1)^2(1 + p^2 + q^2) = h^2(c - ap - bq)^2,$$

dans laquelle les coéfficiens $a, b, c, h,$ sont constans; si l'on fait pour abréger

$$1 + p^2 + q^2 = k^2,$$

on pourra la mettre sous la forme suivante :

$$a\left(x + \frac{hp}{k}\right) + b\left(y + \frac{hq}{k}\right) + c\left(z - \frac{h}{k}\right) = 1.$$

Or, les trois quantités qui entrent dans cette équation sont telles, que deux des trois équations

$$d\left(x + \frac{hp}{k}\right) = 0,$$
$$d\left(y + \frac{hq}{k}\right) = 0,$$
$$d\left(z - \frac{h}{k}\right) = 0;$$

étant

étant posées, la troisième s'ensuit nécessairement, indépendamment de l'objet de la question : en posant donc

$$x + \frac{hp}{k} = \alpha,$$

$$y + \frac{hq}{k} = \varphi\alpha,$$

$$z - \frac{h}{k} = \psi\alpha,$$

ce qui donne en éliminant p & q,

$$(a) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + (z - \psi\alpha)^2 = h^2;$$

l'intégrale de la proposée sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α & d'une des deux fonctions arbitraires φ ou ψ, entre cette équation & les deux suivantes,

$$(b) \quad a\alpha + b\varphi\alpha + c\psi\alpha = 1,$$

$$(c) \quad x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'\alpha = 0.$$

L'élimination actuelle de la fonction surabondante est facile ; nous ne la faisons pas, pour laisser au calcul sa simplicité : ainsi l'intégrale de la proposée est réellement comportée par le système de deux équations simultanées.

De ces trois équations (a), (b), (c), la première est celle de la surface d'une sphère dont le centre est indéterminé ; la seconde énonce que le centre est toujours dans le plan, dont l'équation rapportée à l'origine générale, est

$$ax + by + cz = 1;$$

la troisième exprime qu'on ne considère sur la surface de la sphère que les points dont les coordonnées x, y, z ne varient pas lorsque le paramètre α, qui détermine la position du centre, varie : elles expriment donc ensemble que la surface à laquelle appartient la proposée, est l'enveloppe d'une suite de sphères dont le rayon est h, & dont les centres sont placés sur une courbe quelconque, tracée dans un certain plan donné de position dans l'espace.

L I I.

EXEMPLE II. Si la proposée avoit été

$$\left.\begin{array}{l} k^2\,[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2+h^2-g^2]^2 \\ +4\,h^2\,[(x-a)p+(y-b)q-(z-c)]^2 \end{array}\right\}=0,$$

dans laquelle a, b, c, h, g sont des constantes, & où l'on a de même

$$1+p^2+q^2=k^2,$$

on auroit pu la mettre sous la forme suivante:

$$[a-(x+\tfrac{hp}{k})]^2+[b-(y+\tfrac{hq}{k})]^2+[c-(z-\tfrac{h}{k})]^2=g^2;$$

& en raisonnant comme dans l'*exemple précédent*, on auroit trouvé que l'intégrale complète de la proposée auroit été comportée par le système des trois équations

$$(x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+(z-\psi\alpha)^2=h^2,$$
$$(a-\alpha)^2+(b-\varphi\alpha)^2+(c-\psi\alpha)^2=g^2,$$
$$(x-\alpha)+(y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha+(z-\psi\alpha)\psi'\alpha=0,$$

qu'il est facile de réduire à deux, par l'élimination actuelle d'une des deux fonctions arbitraires.

De ces trois équations, la première & la troisième sont les mêmes que dans l'*exemple précédent ;* mais la seconde exprime que le centre de la sphère est généralement sur la surface d'une autre sphère, dont le rayon est g, & dont les coordonnées du centre sont a, b, c, dans les sens des x, y, z: donc la proposée appartient à l'enveloppe d'une suite de sphères dont les centres sont placés sur une courbe quelconque, tracée sur la surface d'une autre sphère donnée de rayon & de position.

L I I I.

Quand même la fonction F dans l'équation

$$F(L, M, N) = 0,$$

de l'*article* L, feroit tranfcendante, l'intégration dont nous venons de parler ne s'en feroit pas moins de la même manière.

Par exemple, fi la propofée étoit

$$z - \frac{h}{k} = a.\text{arc. fin.} \frac{y + \frac{hq}{k}}{(x + \frac{hp}{k})^2 + (y + \frac{hq}{k})^2},$$

fon intégrale complète feroit comprife dans les trois équations fuivantes:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + (z - \psi\alpha)^2 = h^2,$$

$$\psi\alpha = a.\text{arc. fin.} \frac{\varphi\alpha}{\alpha^2 + (\varphi\alpha)^2},$$

$$x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'\alpha = 0,$$

qu'on peut toujours réduire à deux par l'élimination actuelle de la fonction ψ.

De ces trois équations, la feconde énonce que le centre de la fphère doit fe trouver fur la furface du filet d'une vis à filet carré, dont l'axe coïncide avec celui des z, & dont le produit de la circonférence de la bafe, multipliée par la hauteur du pas, eft a; elles expriment donc enfemble que la propofée eft l'équation de l'enveloppe d'une fuite de fphères de même rayon h, & dont les centres font placés dans une courbe quelconque, tracée fur la furface que nous venons de définir.

L I V.

En général, les quantités L, M, N, P, Q...&c. étant compofées chacune d'une manière quelconque en x, y, z, p, q, avec cette condition que deux quelconques des équations fuivantes aux différences ordinaires,

$$dL = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$
$$dP = 0,$$
$$dQ = 0 \ldots\ldots \&c.$$

étant poſées, toutes les autres s'enſuivent néceſſairement; ſi l'on a une équation aux différences partielles, compoſée d'une manière quelconque des quantités $L, M, N, P, Q,$ & repréſentée par

$$F(L, M, N, P, Q \ldots) = 0,$$

pour l'intégrer, il faudra poſer les équations

$$L = \alpha,$$
$$M = \varphi\alpha,$$
$$N = \psi\alpha,$$
$$P = \pi\alpha,$$
$$Q = \varpi\alpha \ldots\ldots \&c.$$

& éliminer entre toutes ces équations, les quantités p & q, ce qui donnera autant d'équations moins une, qu'il y a de fonctions arbitraires $\varphi, \psi, \pi, \varpi \ldots\ldots$ &c, entre leſquelles on aura d'ailleurs, en vertu de la propoſée, l'équation

$$\mathrm{F}\,(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha, \pi\alpha, \varpi\alpha \ldots\ldots) = 0.$$

Cela fait, on éliminera entre toutes ces équations, compriſe la dernière, toutes les fonctions arbitraires moins une, & on aura une équation unique

$$V = 0,$$

qui ne contiendra que x, y, z, α & une fonction arbitraire; & en la combinant avec ſa différentielle priſe en ne faiſant venir que α, & qui eſt

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0,$$

on aura deux équations qui comprendront l'intégrale de la proposée.

L V.

Lorsque la fonction F, de l'*article précédent*, sera de forme algébrique, l'élimination des fonctions surabondantes pourra toujours se faire, & l'intégrale complète de la proposée pourra toujours être représentée par le système des deux équations simultanées

$$V = 0,$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = 0;$$

mais lorsque cette forme sera transcendante, l'élimination ne sera pas praticable en général, & l'intégrale sera représentée par un système d'équations dont le nombre sera plus grand d'une unité que celui des fonctions qui resteront.

L V I.

Enfin, lors même que la fonction F contiendra des fonctions arbitraires, & que l'équation

$$F(L, M, N, P, Q \ldots\ldots \&c.) = 0,$$

sera par conséquent l'intégrale d'une équation d'ordre supérieur, son intégrale finie se trouvera de la même manière. Par exemple:

1.° Si l'on avoit

$$z - \frac{h}{k} = \pi\left[\left(x + \frac{hp}{k}\right)^2 + \left(y + \frac{hq}{k}\right)^2\right],$$

dans laquelle π est une fonction arbitraire, son intégrale complète seroit le résultat de l'élimination d'une des deux fonctions φ ou ψ & de l'indéterminée α, des trois équations suivantes,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + (z - \psi\alpha)^2 = h^2,$$
$$x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'\alpha = 0,$$
$$\psi\alpha = \pi[\alpha^2 + (\varphi\alpha)^2];$$

& elle appartiendroit à l'enveloppe d'une ſuite de ſphères de même rayon, & dont les centres ſeroient placés dans une courbe quelconque tracée ſur une ſurface quelconque de révolution autour de l'axe de z, ſans rien ſtatuer d'ailleurs, ni ſur la courbe génératrice de la ſurface de révolution, ni ſur la courbe qui, dans cette ſurface, doit contenir les centres des ſphères.

2.° Si la propoſée étoit le réſultat de l'élimination de l'indéterminée β entre les deux équations ſuivantes,

$$z - \frac{h}{k} = (x + \frac{hp}{k})\pi\beta + (y + \frac{hq}{k})\varpi\beta + \beta,$$
$$(x + \frac{hp}{k})\pi'\beta + (y + \frac{hq}{k})\varpi'\beta + 1 = 0,$$

dans leſquelles les fonctions π & ϖ ſont arbitraires; ſon intégrale ſeroit le réſultat de l'élimination d'une des fonctions φ ou ψ, & des deux indéterminées α, β, entre les quatre équations ſuivantes,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + (z - \psi\alpha)^2 = h^2,$$
$$x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'\alpha = 0,$$
$$\psi\alpha = \alpha.\pi\beta + \varphi\alpha\varpi\beta + \beta,$$
$$\alpha\pi'\beta + \varphi\alpha\varpi'\beta + 1 = 0,$$

qu'on peut facilement réduire à trois par l'élimination actuelle de la fonction ψ; & elle appartiendroit à l'enveloppe d'une ſuite de ſphères de même rayon, & dont les centres ſeroient ſur une courbe quelconque tracée ſur une ſurface développable quelconque, ſans rien ſtatuer d'ailleurs, ni ſur la nature de la ſurface développable, ni ſur celle de la courbe qui, dans cette ſurface, doit contenir les centres des ſphères.

LVII.

Il n'y a aucune équation aux différences partielles du premier ordre, qui ne ſoit ſuſceptible d'être ramenée à la forme que nous venons de conſidérer, & qui ne pût s'intégrer par cette dernière méthode, ſi l'on avoit un procédé pour trouver les quantités $L, M, N, P \ldots$ &c. qui toutes ſont fonctions de deux d'entr'elles, & qui entrent ſeules dans la compoſition de la propoſée; mais cette recherche comporte en général des difficultés auſſi grandes que celles du calcul intégral des équations aux différences partielles; & ce que nous avons dit depuis l'*article L*, ne peut être utile que dans des cas très-particuliers. Néanmoins, le nombre de ſyſtèmes de quantités L, M, N, qui ſatisfont à la condition que nous avons énoncée, eſt infini; nous allons en rapporter quelques-uns des plus ſimples.

1.° Les trois quantités

$$L = x + \frac{a^2 p}{\sqrt{(a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2)}};$$

$$M = y + \frac{b^2 q}{\sqrt{(a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2)}},$$

$$N = z - \frac{c^2}{\sqrt{(a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2)}},$$

ſont telles que les différences ordinaires de deux d'entre elles étant égales à zéro, celle de la troiſième devient nulle; & ſi dans tous les exemples que nous avons rapportés on met pour L, M, N, ces nouvelles valeurs, toutes les équations aux différences partielles que l'on aura, n'appartiendront plus à des enveloppes de ſuites de ſphères, mais à des enveloppes de ſuites de ſurfaces du ſecond degré, dont les axes ſont conſtans, & toujours parallèles à ceux des coordonnées x, y, z, & dont les centres ſe meuvent d'une manière indiquée dans chaque cas par la propoſée. Ainſi, en faiſant, pour abréger,

$$a^2 p^2 + b^2 q^2 + c^2 = k^2,$$

l'intégrale de l'équation

$$A\left(x + \frac{a^2 p}{k}\right) + B\left(y + \frac{b^2 q}{k}\right) + C\left(z - \frac{c^2}{k}\right) = 1;$$

analogue à celle de l'*article LI*, feroit le réfultat de l'élimination d'une des deux fonctions arbitraires φ ou ψ, & de l'indéterminée α entre les trois équations fuivantes,

$$b^2c^2(x-\alpha)^2 + a^2c^2(y-\varphi\alpha)^2 + a^2b^2(z-\psi\alpha)^2 = a^2b^2c^2,$$
$$b^2c^2(x-\alpha) + a^2c^2(y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha + a^2b^2(z-\psi\alpha)\psi'\alpha = 0;$$
$$A\alpha + B\varphi\alpha + C\psi\alpha = 1,$$

& appartiendroit à l'enveloppe d'une fuite de furfaces du fecond degré, dont les axes conftans a, b, c, feroient toujours parallèles à ceux des coordonnées x, y, z, & dont les centres feroient placés fur une courbe quelconque tracée dans le plan, dont l'équation feroit

$$Ax + By + Cz = 1.$$

2.° En donnant aux quantités L, M, N, les valeurs fuivantes,

$$L = \frac{x}{p}(px + qy - z),$$
$$M = \frac{y}{q}(px + qy - z),$$
$$N = -z(px + qy - z),$$

qui font encore telles que l'on a à la fois

$$dL = 0,\ dM = 0,\ dN = 0,$$

toute équation compofée de ces trois quantités, eft toute intégrée par le procédé que nous venons de donner, & elle appartient à l'enveloppe d'une fuite de furfaces du fecond degré, dont les centres font à l'origine, & dont les axes, dirigés fuivant ceux des coordonnées x, y, z, varient de longueur, fuivant une loi donnée par la propofée. Ainfi, l'intégrale de l'équation

$$(px + qy - z)(Aqx + Bpy - Cpqz) = pq,$$

qui

qui peut être mise sous la forme

$$AL + BM + CN = 1,$$

est le résultat de l'élimination d'une des deux fonctions φ ou ψ, & de l'indéterminée α entre les trois équations

$$x^2 \varphi\alpha \psi\alpha + y^2 \alpha \psi\alpha + z^2 \alpha \varphi\alpha = \alpha \varphi\alpha \psi\alpha,$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 (\varphi\alpha \psi'\alpha + \varphi'\alpha \psi\alpha) \\ + y^2 (\psi\alpha + \alpha \psi'\alpha) \\ + z^2 (\varphi\alpha + \alpha \varphi'\alpha) \end{array}\right\} = \varphi\alpha \psi\alpha + \alpha \psi\alpha \varphi'\alpha + \alpha \varphi\alpha \psi'\alpha,$$

$$A\alpha + B\varphi\alpha + C\psi\alpha = 1;$$

& elle appartient à l'enveloppe d'une suite de surfaces du second degré, dont les centres sont à l'origine, & dont les axes a, b, c, toujours dirigés suivant ceux des coordonnées x, y, z, varient de grandeur, d'une manière quelconque, en satisfaisant néanmoins à l'équation

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 = 1.$$

LVIII.

Quant à la manière de trouver *a priori* un système de trois quantités L, M, N, composées en x, y, z, p & q, & telles qu'une quelconque soit fonction des deux autres; si l'on prend une équation quelconque $V = 0$, qui soit en x, y, z, & trois paramètres, & que de cette équation & des deux suivantes,

$$\frac{dV}{dx} = 0,$$

$$\frac{dV}{dy} = 0,$$

on tire les valeurs de ces trois paramètres, ces valeurs satisferont à la condition énoncée, c'est-à-dire, qu'en égalant à zéro les différences ordinaires de deux d'entr'elles, celle de la troisième deviendra nulle, en vertu des premières.

L I X.

Avant que de quitter cette matière, nous croyons devoir fare remarquer une propriété analogue dans les équations aux différences ordinaires de tous les ordres. Suppoſons que pour abréger, on faſſe

$$\frac{dy}{dx} = p, \frac{dp}{dx} = q, \frac{dq}{dx} = r \ldots \&c.$$

Cela poſé, ſi deux quantités $M, N,$ compoſées toutes deux en $x, y, p,$ ſont telles, que l'une des deux équations ſuivantes,

$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$

étant poſée, l'autre ait lieu néceſſairement, & qu'on ait à intégrer une équation aux différences ordinaires du premier ordre, compoſée d'une manière quelconque en M & N, repréſentée par

$$F(M, N) = 0,$$

en éliminant p & une des deux conſtantes arbitraires $a, b,$ entre les trois équations ſuivantes:

$$M = a,$$
$$N = b,$$
$$F(a, b) = 0,$$

on aura en $x, y,$ & une conſtante arbitraire, l'intégrale complète de l'équation propoſée; car de ces trois équations, les deux premières ayant lieu indépendamment de la nature de la queſtion, elles expriment en général que b eſt une fonction de a; & la troiſième qui réſulte de la propoſée, détermine la forme de cette fonction.

EXEMPLE I. L'intégrale de $F[p, (y - px)] = 0$, eſt le réſultat de l'élimination de p & d'une des conſtantes arbitraires a ou b des trois équations

$$p = a,$$
$$y - px = b,$$
$$F(a, b) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, elle est comprise dans les deux équations suivantes:

$$y = ax + b,$$
$$F(a, b) = 0,$$

dont la seconde est destinée à éliminer la constante arbitraire surabondante.

EXEMPLE II. L'une des deux équations

$$d\left[x - \frac{ph}{\sqrt{(1 + p^2)}}\right] = 0,$$
$$d\left[y + \frac{h}{\sqrt{(1 + p^2)}}\right] = 0;$$

étant posée, l'autre s'ensuit nécessairement; si donc on a une équation aux différences ordinaires de cette forme,

$$F\left[\left(x - \frac{ph}{\sqrt{(1 + p^2)}}\right), \left(y + \frac{h}{\sqrt{(1 + p^2)}}\right)\right] = 0,$$

son intégrale sera le résultat de l'élimination de p & d'une des deux arbitraires a ou b entre les trois équations

$$x - \frac{ph}{\sqrt{(1 + p^2)}} = a,$$
$$y + \frac{h}{\sqrt{(1 + p^2)}} = b,$$
$$F(a, b) = 0;$$

ou parce qu'on peut d'abord éliminer p des deux premières; l'intégrale sera comprise dans les deux équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = h^2,$$
$$F(a, b) = 0.$$

Quant à la manière de trouver *a priori* deux quantités M, N, telles que, posant $dM = 0$, on ait $dN = 0$; si l'on a une équation $V = 0$, qui soit en x, y & deux

paramètres, & que de cette équation & de la ſuivante $dV = 0$, on tire les valeurs de ces deux paramètres, ces valeurs ſatisferont à la condition énoncée.

L X.

Si l'on a trois quantités M, N, P, composées en x, y, p, q, & telles, qu'une des trois équations ſuivantes,

$$dM = 0,$$
$$dN = 0,$$
$$dP = 0,$$

étant poſée, les deux autres s'enſuivent néceſſairement; & qu'il faille intégrer une équation aux différences ordinaires du ſecond ordre, composée d'une manière quelconque des trois quantités M, N, P, repréſentée par

$$F(M, N, P) = 0,$$

on éliminera p, q, & une des trois conſtantes arbitraires a, b, c, des quatre équations

$$M = a,$$
$$N = b,$$
$$P = c,$$
$$F(a, b, c) = 0,$$

& le réſultat ſera en x, y & deux conſtantes arbitraires, l'intégrale complète & finie de la propoſée. En effet, de ces quatre équations, les trois premières ayant lieu ſimultanément, quel que ſoit d'ailleurs l'objet de la queſtion, il en reſulte généralement, en x, y, a, b, c, une équation, dans laquelle les trois conſtantes arbitraires ſont indépendantes, & la propoſée établit la relation qu'ont entr'elles ces trois conſtantes, dans la queſtion dont il s'agit.

EXEMPLE. Les trois quantités

$$M = x - \frac{p(1 + p^2)}{q},$$
$$N = y + \frac{1 + p^2}{q},$$

$$P = \frac{(1 + p^2)^3}{q^2},$$

étant telles, que l'on a ſimultanément $dM = 0$, $dN = 0$, $dP = 0$, il s'enſuit que l'intégrale finie & complète d'une équation aux différences ordinaires du ſecond ordre, repréſentée par

$$F\left\{\left[x - \frac{p(1 + p^2)}{q}\right], \left[y + \frac{1 + p^2}{q}\right], \frac{(1 + p^2)^3}{q^2}\right\} = 0,$$

eſt le réſultat de l'élimination de p & de q, & d'une des conſtantes arbitraires entre les quatre équations

$$x - \frac{p(1 + p^2)}{q} = a,$$

$$y + \frac{1 + p^2}{q} = b,$$

$$\frac{(1 + p^2)^3}{q^2} = c,$$

$$F(a, b, c) = 0;$$

ou parce qu'on peut toujours éliminer p & q des trois premières, elle eſt le réſultat de l'élimination d'une des conſtantes a, b, c, entre les deux équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c,$$

$$F(a, b, c) = 0.$$

L X I.

En général, ſi l'on a un nombre n de quantités M, N, P, Q, R....&c. compoſées en x, y, p, q, r, s...&c. juſqu'aux différences de l'ordre $n - 1$ incluſivement, & telles, qu'une des équations ſuivantes,

$$dM = 0, dN = 0, dP = 0, dQ = 0, dR = 0 \ldots \&c.$$

étant poſées, les autres s'enſuivent néceſſairement, & qu'on ait une équation aux différences ordinaires de l'ordre $n - 1$, compoſée d'une manière quelconque des quantités M, N, P, Q, R....&c. repréſentée par

$$F(M, N, P, Q, R \ldots\ldots \&c.) = 0;$$

ſon intégrale finie & complète ſera le réſultat de l'élimination des $(n - 1)$ quantités p, q, r, s....&c. & d'une

des conſtantes arbitraires $a, b, c, d, e \ldots$ &c, entre les $n + 1$ équations

$$M = a,$$
$$N = b,$$
$$P = c,$$
$$Q = d,$$
$$R = e,$$
$$\ldots\ldots$$
$$F(a, b, c, d, e \ldots\ldots\ldots \&c.) = 0,$$

& ce réſultat ſera en x, y & $(n - 1)$ conſtantes arbitraires.

Nous n'inſiſterons pas davantage ſur cette matière, & nous ne dirons plus qu'un mot des équations aux différences partielles élevées du ſecond ordre.

Des Équations aux différences partielles élevées du ſecond ordre.

L X I I.

Soit $W = 0$ une équation aux différences partielles compoſée d'une manière quelconque en x, y, z, p, q, r, s, t. Poſons qu'en la différenciant aux différences ordinaires, & en faiſant

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

on ait

$$A\,dr + B\,ds + C\,dt + D\,dx + E\,dy = 0.$$

Cela poſé, ſi par une certaine hypothèſe faite dans cette équation ſur la valeur de $\frac{dy}{dx}$, l'équation aux différences partielles du troiſième ordre, à laquelle on arrivera, contient une conſtante de moins, & eſt linéaire, ou de la forme de celle que l'on ſait traiter ; on prendra les trois intégrales premières de cette équation, dont l'une ſera la

propoſée, & toutes les fois que de ces trois intégrales il ſera poſſible d'éliminer en même temps les cinq quantités p, q, r, s, t, le réſultat ſera l'intégrale finie demandée.

Suppoſons qu'en faiſant

$$(A) \quad D\,dx + E\,dy = 0,$$

ce qui donne

$$(B) \quad A\,dr + B\,ds + C\,dt = 0,$$

on faſſe diſparoître une conſtante, ou quelque variable s'il n'y a pas de conſtante; en ſubſtituant dans (B) pour $\frac{dy}{dx}$ la valeur que donne (A), on aura l'équation aux différences partielles du troiſième ordre, & linéaire

$$AE\frac{d^3z}{dx^3} + (BE - AD)\frac{d^3z}{dx^2dy} + (CE - BD)\frac{d^3z}{dxdy^2} - CD\frac{d^3z}{dy^3} = 0,$$

qui, traitée par la méthode de l'*article XXXI*, donne les deux équations aux différences ordinaires

$$(A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2)(D\,dx + E\,dy) = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} dr\,[(BE - AD)dy^2 - (CE - BD)dxdy - CDdx^2] \\ + ds\,dy\,[(CE - BD)dy + CDdx] \\ - CDdtdy^2 \end{array}\right\} = 0.$$

La première de ces deux équations a deux facteurs rationels; ſi l'on employoit le ſecond, l'intégrale première que l'on obtiendroit ſeroit la propoſée elle-même, & l'on auroit fait un travail inutile. Ainſi il ne faut faire uſage que du premier facteur; mais en vertu de ce facteur, la ſeconde équation ſe ſimplifie, en ſorte que les deux équations aux différences ordinaires qui doivent donner les deux autres intégrales de l'équation aux troiſièmes différences ſont,

$$(C) \quad Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0,$$

$$(D) \quad AEdydr + ds(CEdx - ADdy) - CDdxdt = 0.$$

Chacune des racines de l'équation *(C)*, prise simultanément avec l'équation *(D)*, produira une intégrale, & toutes les fois que de ces deux intégrales & de la proposée il sera possible d'éliminer d'une manière quelconque les quantités p, q, r, s, t, on aura l'intégrale finie de la proposée.

L X I I I.

EXEMPLE. Soit proposé d'intégrer

$$2bx(a^2r + 2as + t) + a\sqrt{(a^2r + 2as + t)} - 2ab(ap + q) = 0;$$

en la différenciant aux différences ordinaires, les équations *(A)* & *(B)* deviennent

$$a^2dr + 2ads + dt = 0,$$
$$dx - ady = 0,$$

dans lesquelles la constante b a disparu. Les équations *(C)* & *(D)* reproduisent encore les mêmes équations aux différences otdinaires, & l'on a en intégrant

$$a^2r + 2as + t = \varphi(x - ay);$$

substituant cette valeur dans la proposée, elle devient

$$ap + q = a\varphi(x - ay) + 4ab^2x[\varphi(x - ay)]^2,$$

qui, étant linéaire, s'intègre facilement, & donne pour intégrale complète & finie

$$z = \psi(x - ay) + x\varphi(x - ay) + 2b^2x^2[\varphi(x - ay)]^2.$$

Il est facile de faire de semblables raisonnemens pour les équations des ordres supérieurs; mais aussi l'on voit qu'à mesure que l'ordre des équations sera plus élevé, les cas où, par ce procédé, on pourra les intégrer complétement, seront plus rares.

OBSERVATION

OBSERVATION
SUR UN GRAND NOMBRE DE MORSURES
Faites à une même perſonne, par un chien enragé, traitées avec ſuccès.

Par M. SABATIER.

Lu le 13 Novembre 1784.

RIEN ne prouve plus l'incertitude où l'on eſt encore ſur la meilleure manière de traiter les plaies faites par des animaux enragés, que le jugement que la Société royale de Médecine a porté, en 1782, ſur les Mémoires qui ont concouru pour le Prix qu'elle avoit propoſé à ce ſujet : elle a cru devoir en couronner trois, quoique les vues curatives que chacun de leurs auteurs propoſe, ſoient différentes. Il eſt donc eſſentiel de fixer l'attention du public, & celle des gens de l'art, ſur cet objet important, & de leur faire connoître les faits qui conſtatent la préférence que l'on doit donner à une méthode ſur les autres : celui dont je vais rendre compte, ne me paroît laiſſer aucun doute ſur les avantages de celle que j'ai ſuivie.

Le 17 Février dernier, un chien deſtiné à la garde d'une maiſon iſolée, en bleſſa le Jardinier à la lèvre ſupérieure, qui fut déchirée de manière à former un lambeau aſſez conſidérable. Comme cet animal n'étoit pas méchant, on eut quelque ſoupçon qu'il pouvoit être malade, & on l'enferma dans le jardin, où on lui deſcendoit des alimens par une fenêtre. On crut qu'il en avoit uſé, & on commença à ſe raſſurer ſur ce qu'il répondoit à la voix & venoit chaque fois qu'il étoit appelé. Un jeune homme de vingt-deux ans, grand & robuſte, ſe haſarda, le ſurlendemain 19 au matin, à entrer dans le jardin avec un plat où il y avoit de la viande, & une terrine pleine

d'eau. Le chien qu'il appela, vint aſſez paiſiblement, mais quand il aperçut l'eau, il recula de quelques pas, & s'élança ſur lui avec impétuoſité. Le jeune homme, forcé de ſe défendre, jeta ce qu'il avoit dans les mains, afin de pouvoir ſaiſir l'animal par le cou, & de s'en rendre maître. Il étoit déjà bleſſé en pluſieurs endroits, & il appeloit des ſecours que la crainte rendit tardifs. Enfin il parvint à ſe coucher ſur le chien qu'il avoit terraſſé, & à le tenir pendant aſſez long-temps dans cette ſituation, pour que le maître de la maiſon, armé d'un couteau de chaſſe, le tuât ſous lui.

Il avoit été mordu aux deux mains, à l'avant-bras & à l'épaule droite, & à la partie ſupérieure & antérieure de la jambe gauche. En outre, il étoit égratigné en divers endroits & ſur-tout au ventre, & il étoit difficile de juger ſi c'étoit par les dents ou par les griffes de l'animal. Pluſieurs des morſures ne portoient que l'empreinte des dents qui avoient pénétré toute l'épaiſſeur de la peau; mais celles de l'avant-bras & de l'épaule offroient des plaies aſſez étendues, & celle de la jambe, plus conſidérable que les autres, avoit au moins un pouce &-demi de longueur & de largeur, & une profondeur telle que le tibia, & l'aponévroſe qui couvre les muſcles de ſa partie antérieure & externe, étoient à nu.

Le Jardinier, dont on avoit panſé la plaie à la manière de celle qui réſulte du bec-de-lièvre, étoit tranquille; mais le jeune homme & les perſonnes de la maiſon, qui prenoient intérêt à lui, ne l'étoient pas. Il demanda à conſulter, & je fus prié de le voir le ſoir du même jour. Je lui dis que pour le mettre en ſûreté, il falloit élargir celles de ſes bleſſures qui en avoient beſoin, & les cautériſer toutes à une aſſez grande profondeur. Il le deſiroit avec empreſſement; mais il n'étoit pas ſûr que le chien fut enragé. L'opération que je me propoſois de lui faire, pouvoit avoir des ſuites fâcheuſes, vu le nombre, l'étendue & la profondeur de ſes plaies: il pouvoit ſe faire qu'il

reſtât eſtropié. Je ne voulus rien entreprendre que je n'euſſe l'aveu d'un parent qu'il avoit à Paris, & qui veilloit ſur lui. Cette circonſtance me fit différer juſqu'au lendemain vers midi, c'eſt-à-dire, vingt-ſept à vingt-huit heures après l'accident. Les morſures & les plaies étoient au nombre de vingt-cinq, & les égratignures remarquables, au nombre de cinquante. Je n'eus pas beſoin d'inſpirer du courage au malade, quoique le ſupplice auquel il alloit être expoſé, dût être bien long. Les ouvertures faites par les dents de l'animal, & les égratignures furent inciſées en étoile à une profondeur plus ou moins grande ; enſuite je cautériſai les premières avec le beurre d'antimoine liquide, dans lequel j'avois trempé des pinceaux de linge roulé ſur des brins de bouleau, & je brûlai les ſecondes, à pluſieurs repriſes, avec des groſſes aiguilles montées ſur des alumettes, & rougies à la flamme d'une bougie. Je portai de même le cauſtique ſur tous les points de la ſurface & des bords des plaies, de manière que la ſphère de ſon activité répondît à la grandeur de leurs dimenſions, & il n'y eut d'autre différence à cet égard, ſi ce n'eſt que je n'y fis point d'inciſions préparatoires, parce qu'elles étoient ſuffiſamment ouvertes. Il me fallut plus de deux heures pour achever ce terrible procédé, dont j'étois plus fatigué que le malade : tant la crainte de la rage avoit fait d'impreſſion ſur lui.

Je craignois des accidens relatifs aux plaies ; il n'en ſurvint point, & les parties malades n'éprouvèrent qu'un léger gonflement. La ſuppuration s'établit ſucceſſivement dans les différentes parties, & les eſcares ſe détachèrent ; les plaies légères furent guéries en aſſez peu de temps. Il ne reſtoit plus que celles dont les dimenſions étoient plus grandes. Celles-ci éprouvèrent les mêmes révolutions que les autres, & celle de la jambe, ſur-tout, ſuppura très-long-temps avant de ſe cicatriſer.

Le 14 Avril ſuivant, cinquante-cinq jours après ſa bleſſure, le Jardinier, qui s'applaudiſſoit de ſa ſécurité,

& qui ne pouvoit ſe perſuader que le chien qui les avoit bleſſés eût été malade, commença à perdre l'appétit; il dîna fort peu & ne ſoupa point. Le lendemain il ſe plaignit que ſa plaie étoit douloureuſe, & dit qu'il ſe ſentoit oppreſſé & qu'il avoit des envies de vomir. On lui demanda s'il étoit altéré, à quoi il répondit qu'il avoit grand ſoif, mais qu'il ne pouvoit pas boire. Effectivement, il lui fut impoſſible d'avaler l'eau qu'on lui préſenta, quoiqu'il ſe fût efforcé de la porter à ſa bouche. On lui fit prendre avec peine trois grains d'émétique dans quelques cuillerées d'eau, ce qui lui procura des évacuations abondantes, dont il ne reçut aucun ſoulagement. La ſuffocation devenoit de plus en plus forte; il y avoit beaucoup d'agitations; le malade, quoique d'une conſtitution vigoureuſe, ſe ſoutenoit avec peine quand il s'efforçoit de ſe lever: ſon état étoit décidé. On ſe détermina à le conduire à l'Hôtel-Dieu dans la ſoirée. L'impreſſion de l'air ſur ſon viſage, le mit dans une fureur momentanée, qui ſe renouvela pluſieurs fois pendant la nuit. Il ne put rien avaler de ce qu'on lui préſenta, & mourut hydrophobe, le lendemain 16, à ſept heures du ſoir.

Le jeune homme que j'ai ſoigné, jouit encore de la meilleure ſanté, quoiqu'il y ait bientôt huit mois accomplis qu'il a été bleſſé; quoique ſes plaies aient été au nombre de ſoixante-quinze; quoique pluſieurs de ces plaies, & notamment celles des mains & des poignets, lui aient été faites à nu, & qu'il ſoit d'une vraiſemblance qui approche de la certitude, que celles de l'avant-bras, de la jambe & de l'épaule, qui étoient fort grandes, ont été couvertes & infectées de la bave de l'animal; quoique je n'aie pris aucune précaution pour prolonger la ſuppuration des plaies, dont le plus grand nombre s'eſt cicatriſé aſſez promptement; quoiqu'enfin le malade n'ait fait uſage intérieurement que de quelques gouttes d'alkali volatil, que je lui ai laiſſé prendre chaque matin, dans la vue de calmer ſon imagination troublée, plutôt que dans celle de le mettre à l'abri

du mal dont il ſe croyoit menacé, puiſque j'ai vu périr, entre mes mains pluſieurs perſonnes mordues par des animaux enragés, auxquelles on l'avoit adminiſtré à forte doſe.

A quoi donc eſt-il redevable de ſa guériſon? à l'action du cauſtique & à celle du feu qui ont détruit le virus en même-temps que le tiſſu des parties qui en étoient imprégnées. Les morſures des animaux enragés peuvent être comparées aux plaies que l'on fait pour inſérer le levain de la petite vérole. Il ſe fait une véritable inoculation, dont on préviendra les effets ſi on cautériſe les plaies avant que le virus ait eu le temps de déployer ſon énergie & de l'exercer ſur l'économie animale. La facilité avec laquelle ces ſortes de plaies guériſſent pour l'ordinaire, & la longueur du temps qui s'écoule avant que les malades en éprouvent les ſuites, montrent qu'il y reſte d'abord ſans action ; ce n'eſt guère qu'entre trente & quarante jours que les malades ſont incommodés. Ils commencent pour lors à reſſentir un mal-aiſe, de l'agitation, des inſomnies, de légers mouvemens convulſifs, une altération dans les traits du viſage, des dégoûts & de l'oppreſſion, ſimptômes avant-coureurs par où la maladie s'annonce d'une manière particulière. Peut-être le procédé qui m'a ſi bien réuſſi, peut-il être employé avec ſuccès juſqu'à cette époque. Le fait que je viens de rapporter, montre du moins qu'on peut tarder vingt-quatre heures & plus ſans y avoir recours. Mais, ſans les circonſtances particulières qui m'ont forcé de différer, j'en aurois fait uſage auſſi-tôt que j'ai été averti, & je crois prudent de ne pas perdre un inſtant ſans venir au ſecours des bleſſés.

Ce cas n'eſt pas le ſeul où j'aie employé la cautériſation pour prévenir la rage. En 1775, je fis brûler un cylindre d'amadou ſur la plaie d'un Soldat atteint à la poitrine, au-deſſous du mamelon gauche, par un coup de croc qu'un chien lui avoit donné; l'eſcarre fut profonde, & ſa ſéparation fut ſuivie d'une ſuppuration qui dura aſſez

long-temps. Un autre homme, mordu par le même chien en plusieurs endroits de la tête, tomba dans les accidens de l'hydrophobie, cinquante-deux jours après, & mourut en moins de vingt-quatre heures. Cependant celui que j'ai cautérisé n'en a pas eu le moindre ressentiment : je l'ai revu bien portant quatre à cinq ans après sa blessure. Depuis ce temps, j'ai conseillé le même procédé pour un enfant mordu à l'un des avant-bras, près le poignet. Il a guéri; & l'on m'a assuré qu'une autre personne, mordue par le même chien, étoit morte de la rage quelque temps après. Enfin j'ai coupé, en 1780, l'extrémité du pouce de la main droite & celle du doigt indicateur de la main gauche, à un Officier & à un Soldat, blessés tous deux par un même chien, sur l'état duquel il y avoit des doutes bien fondés. Mais il s'en faut de beaucoup que ces observations soient concluantes. Le premier Soldat avoit été blessé à travers la bandoulière de son fourniment & à travers ses habits, de sorte que la dent de l'animal avoit pu être essuyée avant qu'elle lui perçât la peau. Je n'ai pas vu périr la personne mordue par le chien qui avoit blessé l'enfant, & la nature de la maladie à laquelle cette personne a succombé ne me paroît pas bien constatée. Enfin il est possible que le chien qui a blessé l'Officier & le dernier Soldat, ne fût pas enragé. Mais toutes les circonstances de l'observation qui fait le sujet de ce Mémoire, se sont passées sous mes yeux, & le chien qui a si fort maltraité le malade à qui j'ai donné des soins, étoit certainement attaqué de la rage, puisque le Jardinier, blessé plus de quarante-huit heures avant lui, est mort avec les simptômes qui caractérisent cette maladie.

Je ne dois pas dissimuler que la cautérisation des plaies faites par des animaux enragés, est un procédé fort connu. Presque tous ceux qui ont écrit sur le traitement de ces sortes de plaies en ont recommandé l'usage, mais comme celui d'un moyen purement auxiliaire, auquel ils n'ont pas attaché toute l'importance qu'il mérite, & sans recom-

mander comme je le fais, de la porter aſſez loin pour que toutes les particules vénéneuſes inoculées ſoient détruites. Si on excepte M. le Roux, de l'Académie des Sciences, Arts & Belles-Lettres de Dijon, l'un de ceux qui ont partagé le prix de la Société royale de Médecine, dont les idées ſont preſque entièrement conformes aux miennes, ils ne ſe ſont propoſé d'autre but que celui d'obtenir une ſuppuration qui durât long-temps, & des dégorgemens à la faveur deſquels les miaſmes virulens puſſent être entraînés au dehors; comme ſi le mouvement qui s'excite dans les plaies, pouvoit empêcher que les ſubſtances qui ſont en contact avec elles, pénètrent à l'intérieur. Il y a des exemples de morſures qui ont ſuppuré avec abondance & qui n'ont point eu de ſuites. N'eſt-il pas plus ſûr de dénaturer & d'anéantir le virus dont les parties ſont infectées, en cautériſant profondement avec des cauſtiques, en conſumant avec le feu, ou en extirpant la partie bleſſée, lorſqu'on ne peut employer l'un ou l'autre de ces procédés ſans de grands inconvéniens, & lorſque le retranchement de cette partie n'emporte pas avec lui le danger de la vie? Voilà ce que l'inſuffiſance des remèdes les plus accrédités dont j'avois fait uſage ſans ſuccès, & ſur-tout ce que la réflexion & l'analogie m'avoient fait penſer depuis long-temps. Il falloit que des circonſtances malheureuſes me miſſent à portée de faire les nouvelles épreuves dont j'avois beſoin: j'ai ſaiſi celles qui ſe ſont préſentées. Les premières m'avoient laiſſé des doutes de toute eſpèce; la dernière les a totalement diſſipés, & je ſuis enfin convaincu que c'eſt de la Chirurgie ſeule que l'on doit attendre des ſecours vraiment efficaces, contre l'une des plus affreuſes maladies qui aient jamais affligé l'humanité.

MÉMOIRE

SUR UNE PLANTE DU PÉROU,

Nouvellement connue en France.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Préfenté le 17 Déc. 1784.

LA fcience de la Botanique eft redevable à M. Dombey*, de plufieurs Plantes naturelles au Pérou, qu'il a envoyées au Jardin royal, de la nouvelle Efpagne, en fruits ou en graines, & dont plufieurs ont réuffi.

C'eft M. Dombey, qui, en 1780, adreffa à l'Académie la manière de deffécher la pomme de terre ou patate, & de conferver plufieurs années les tubérofités de cette plante, de manière à pouvoir fervir d'aliment aux hommes & aux animaux.

Cette même année 1780, M. Dombey envoya à l'Académie & au Jardin du Roi, une graine, fous le nom de *quinoa*, ajoutant les ufages qu'on faifoit de cette graine à Lima, & les grands avantages dont elle pouvoit être en France, fi nous parvenions à l'y multiplier.

On donna de ces graines à tous les cultivateurs, mais elles n'ont réuffi nulle part, il y a même apparence que la graine envoyée avoit été defféchée, & peut-être mondée, contre le gré de M. Dombey.

J'ai femé cette graine de quinoa, & en vain; un feul pied d'une autre plante, qui me fembloit nouvelle pour nous, a levé dans une des terrines; je l'ai cultivée avec le plus grand foin.

Je n'ai pas tardé à me convaincre que cette plante

* Médecin-botanifte du Roi, correfpondant de l'Académie des Sciences de Paris, envoyé par Sa Majefté le Roi de France, au Pérou (de retour en France lors de l'impreffion de ce Mémoire).

n'étoit

n'étoit pas le quinoa, puiſqu'on l'a dit de la famille du *chenopodium*, & que la plante nouvelle indiquoit être d'un genre tout différent. Cette nouvelle plante a fleuri la même année qu'elle a été ſemée ; elle eſt annuelle, & tous les ans, depuis cette époque, j'obtiens pluſieurs pieds des ſemences recueillies à Denainvilliers ; mais comme cette plante mérite par ſa feuille & ſa fleur d'être connue, & que nous pourrions la perdre par la réunion de diverſes circonſtances, puiſqu'elle eſt annuelle, j'ai cru devoir en donner une deſcription particulière, & la conſigner dans les volumes de l'Académie.

Je ne crois pas, d'après les recherches que j'ai faites, qu'aucun Botaniſte ait décrit cette plante, qui, par les caractères propres aux parties de ſa fructification, doit être rangée dans la *didinamie angioſpermie* de Linné, ce qui le rapproche beaucoup, comme nous le ferons voir dans la ſuite, de la famille des bignognes, des martynia, &c. Cependant M. de Juſſieu, de cette Académie, ayant eu la complaiſance de me permettre de viſiter l'herbier que M. de Juſſieu ſon oncle a raſſemblé au Pérou ; j'y ai trouvé cette plante deſſinée au trait, par feu M. Joſeph de Juſſieu, avec ſon caractère, tiré de ſa fleur & de ſon fruit, & un exemplaire de la même plante deſſéchée, avec le lieu où il l'a trouvée, ainſi indiqué ; *Achochillas del monte, camino de canelos.*

Deſcription de la Plante.

Cette plante, au ſortir de la terre, porte deux feuilles ſéminales, oppoſées, épaiſſes, non dentelées, dont les nervures ont peu d'apparence, & qui ſont ovoïdes, fort échancrées dans leur petit diamètre, à l'extrémité ſupérieure, ainſi que du côté de leur pédicule : la plante dont nous parlons, court & s'étend de douze à quinze pieds, ſes branches ſont herbacées, mais elles ſe ſoutiennent en s'accrochant à l'aide de ſes vrilles qui ſont bifurquées &

terminées par des crochets ; c'eſt ainſi que la plante, en ſe prolongeant, adhère aiſément & fortement à ce qu'elle touche. Elle n'eſt ligneuſe que près de ſa racine, les branches & les tiges ſont herbacées, & tiennent de la plupart des labiées, en ce que les tiges ſont anguleuſes & comme quadrangulaires, avec des eſpèces de ſéparations ou de renflemens aux endroits d'où ſortent les branches latérales, *fig. 1*. De ce renflement de la tige, ou de cette eſpèce d'articulation, ſortent deux branches oppoſées, ou deux feuilles, & de chaque inſertion une vrille ou le pédicule d'une vrille. Il ſe forme enſuite, à quatre ou cinq pouces de cette première articulation, un ſecond renflement d'où partent deux pédicules qui ſoutiennent deux nouvelles feuilles ; ainſi de ſuite. Chacun de ces pédicules qui portent les feuilles, ſe diviſe ordinairement en trois autres pédicules plus déliés, & ces trois-ci portent une foliole : ces folioles ſont découpées & dentées irrégulièrement. Quelquefois, une ou deux des principales nervures ſe prolongent & ſervent à former une quatrième ou une cinquième foliole ; ainſi on doit regarder la feuille comme étant compoſée de deux folioles oppoſées & d'une impaire, quoiqu'elle en ait ſouvent quatre & cinq. La vrille, qui, comme nous l'avons déjà dit, ſe trouve à l'inſertion des branches & des feuilles, eſt auſſi ſurcompoſée ; le pédicule principal de cette vrille ſe diviſe ordinairement en trois : elle ſe roule ſouvent en ſpirale déliée, & toujours ſe termine par deux crochets qui ont beaucoup de force, & qui ſe briſent plutôt que d'abandonner la partie à laquelle ils adhèrent. Les nervures de chacune de ces folioles, ſur-tout la principale & longitudinale, ſont très-relevées en deſſous & profondes en-deſſus ; la couleur de la foliole, eſt d'un vert aſſez foncé. Des poils fins & blancs ſe remarquent ſur les pédicules des feuilles & ſur les tiges, ils ſont ſur-tout placés ſur les angles ; on voit auſſi de ces poils diſpoſés par touffes à l'inſertion des articulations. Toutes les branches ſont ſi herbacées,

& les feuilles si aqueuses, qu'il est difficile de les bien dessécher, & elles se réduisent, entre du papier, à un très-petit volume.

La fleur est disposée en épis de 4 à 5 pouces. Cet épi est terminé par cinq, six & même dix fleurs incomplètes qui n'ont qu'un calice d'une seule pièce, divisé en deux lèvres principales, comme dans le calice des fleurs complètes dont nous allons parler. La principale & la plus grande lèvre du calice de ces fleurs incomplètes, puisqu'elles manquent de corolle, est comme ployée & souvent dentée vers son extrémité supérieure; l'autre est étroite & pointue. Ce calice est coloré d'un rouge très-foncé, jusque vers son fond qui est vert. Les fleurs du reste de l'épi sont composées d'un calice, aussi d'une seule pièce & divisé en deux lèvres principales, comme dans les fleurs incomplètes: l'une de ces lèvres, moins large que dans celles incomplètes, est souvent colorée d'un rouge-foncé, elle est plus grande que la seconde lèvre, & comme creusée un peu en gouttière ou en cueilleron; la seconde lèvre, qui est le plus souvent verte, est plus étroite que celle que nous venons de décrire & un peu pointue. L'ouverture de la corolle se trouve du côté de la plus grande lèvre.

La corolle est composée d'un tuyau d'inégale forme & largeur, sa moindre extrémité est renfermée dans le calice; ce tuyau continue à *s'évaser*, puis il forme une petite lèvre qui se rabat sur le tuyau, tandis que l'autre partie, qu'on peut considérer comme formant la lèvre supérieure, imite la figure d'un casque, d'une toque ou d'un capuchon très-obtus, ouvert sur le côté qui forme la partie antérieure de la fleur, & cette ouverture est garnie d'un petit rebord qui d'un côté & de l'autre se rabat sur la fleur: toute la corolle est d'une belle couleur bleuâtre très-foncée, qui tire sur le violet.

On voit, en ouvrant la fleur, quatre étamines attachées à la corolle, dont deux sont plus longues que les deux

autres, & quelquefois le filet ou la naiſſance d'une cinquième étamine. Les antères de chaque étamine ſont doubles; chaque bourſe ovale s'ouvre en deux parties qui répandent une pouſſière fécondante jaune & aſſez abondamment.

Du fond du calice, part un piſtil composé d'un ovaire hériſſé dès ſon jeune âge de petits poils fins, ſurmonté d'un ſtil de la longueur du pétale, & terminé par un ſtigmate aigu: le pédicule propre à la fleur, eſt peu alongé, & porte à ſon inſertion une *bractée* ou petite feuille peu apparente.

La carolle abandonne le calice, enſuite tombe le calice; & l'ovaire groſſiſſant, devient un fruit long d'environ deux pouces, hériſſé de filets durs, & dont l'extrémité eſt terminée par un crochet aſſez ſemblable par ſa forme à ceux des vrilles; mais celui du fruit a encore plus de force & de réſiſtance.

Si on coupe ce fruit horizontalement, on le voit composé de quatre loges principales, formées par des cloiſons qui ſe prolongent ſuivant la longueur du fruit: ce fruit, à l'extérieur, & par les pointes dont il eſt hériſſé, a des rapports avec celui du *xanthium* ou *lappa minor*, (bardanne).

Dans chacune de ces loges, il y a des ſemences appliquées le long de la cloiſon, & qui par leurs poſitions ſe recouvrent en partie les unes les autres: ces ſemences ſont ovales, & entourées d'une membrane mince qui les rend ailées, la membrane eſt fort échancrée dans ſa partie poſtérieure. L'enveloppe hériſſée de pointes, forme à ce fruit comme une eſpèce de brou qui recouvre les quatre loges plus intérieures, où ſont diſpoſées les ſemences, ce qui le diviſe comme en huit parties; & par-là, ce fruit ſe rapproche du *martinia.*

On voit par cette deſcription, que la plante dont il s'agit, doit être placée dans la *didinamie angioſpermie* de Linné, qu'elle tient & ſe rapproche beaucoup de la famille des bignognes par les quatre étamines qui ſont adhérentes à la corolle, dont deux ſont plus courtes, &

par la naiſſance d'une cinquième, qui n'eſt apparente que dans certaines fleurs; par ſes feuilles qui ſont ſurcompoſées comme dans pluſieurs eſpèces de bignognes; par ſes vrilles encore propres à pluſieurs bignognes; enfin par ſon fruit, les différentes loges qui le partagent, & par ſes ſemences ailées qui ſe recouvrent les unes les autres, & qui ſont enfermées dans une gouſſe, par conſéquent par des rapports tirés de ſes feuilles, de ſa fleur & de ſon fruit. Mais comme le genre des bignognes eſt nombreux, que la Nature ſemble avoir indiqué des diviſions, en ayant égard à la différence que préſentent leurs feuilles entières ou compoſées, leurs fleurs dont la corolle eſt plus ou moins campanulée, & diviſée plus ou moins régulièrement, les fruits plus ou moins longs, plus ou moins gros, la quantité des cloiſons qui les ſéparent; enfin, que les fruits des bignognes ſont unis ou épineux, on pourroit aiſément en faire autant de genres particuliers, ſur-tout ſi on fait attention aux cloiſons & au nombre des loges qui diviſent les fruits. En ſe ſervant de ces différences, ce ſeroit un moyen aiſé pour former des diviſions dans ce genre des bignognes déjà nombreux.

Nous croyons voir dans la plante que nous décrivons, un caractère qui lui eſt propre, puiſque ſa corolle, au lieu d'être campanulée, eſt formée en un tuyau long & renflé irrégulièrement, qui ſe termine, comme dans certaines labiées, par une toque ou capuchon obtus; enfin puiſque la cloiſon à quatre ailes qui ſépare ſon fruit, n'eſt commune à cette plante avec aucune des eſpèces de bignognes déjà décrites.

Il convient donc d'en faire un genre particulier. Ayant appris que M. Dombey avoit adreſſé à M. de Juſſieu, des fruits de cette même plante & l'avoit nommée; en reſpectant les intentions de ce zélé Botaniſte, & une perſonne connue avantageuſement des Savans, je nommerai la plante dont il eſt queſtion,

La Tourretia *caule volubili quadrangulari, cyrrhoſo, foliis plerumque trifidis, foliolis dentatis, fructu hiſpido, xanthii ſeu lappæ minori ferè ſimili.* Act. Reg. Par.

Explication de la Planche qui repréſente la Tourretia.

Fig. 1. Les feuilles ſeminales qui durent & perſiſtent quelque temps.

Fig. 2. La plante.

a, la feuille avec ſon pédicule qui ſe diviſe en trois ſolioles, ayant chacune ſon pédicule; une des dentelures de la foliole qui s'alonge, & forme quatre ou cinq folioles, au lieu de trois.

b, les vrilles qui ſont elles-mêmes ſurcompoſées, le crochet qui termine chaque vrille.

c, l'épi de fleurs qui ſort ſouvent de la bifurcation des tiges, & à ces endroits où les tiges de la plante forment un renflement. A l'extrémité ſupérieure de l'épi de fleurs, il y a ſouvent cinq ou ſix fleurs incomplètes,

d, & compoſées d'un ſeul calice coloré, ſans pétale.

Fig. 3. La fleur avec tous ſes détails.

e, le bouton de la fleur.

f, la fleur vue de côté avec ſon calice.

g, la fleur vue en face.

h, le calice ouvert.

i, le calice dans lequel on voit l'embryon.

k, l'embryon avec ſon ſtil.

l, la corolle ouverte & les quatre étamines.

m, une étamine ſéparée.

n, le jeune fruit toujours accompagné, dans le jeune âge, de deux ſtipules ou bractées.

Fig. 4. Le fruit en ſon état de maturité.

Fig. 5. Le fruit coupé tranſverſalement où l'on voit les quatre loges formées par les cloiſons, & le brou qui les enveloppe.

Fig. 6. Les graines attachées aux cloiſons.

o, la graine ſéparée & ailée.

p, une de ces pointes ou crochets qui garniſſent le deſſus du fruit.



Fossier del.

Y. le Gouaz sculp.

MÉMOIRE
SUR L'ABRICOTIER DE SIBÉRIE.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Lû le 3 Août 1785.

LE travail que j'ai entrepris depuis plus de dix ans, pour donner une nouvelle édition du Traité des arbres & arbuſtes, publié par M. du Hamel-du-Monceau, en 1755, m'a obligé de revoir en même temps certains arbres fruitiers, & en particulier l'eſpèce d'abricotier de Sibérie dont je vais parler.

Quoique la ſéparation entre les abricotiers, amandiers, pêchers, & les pruniers, ſoit difficile à fixer; cependant M. du Hamel, en traitant des abricotiers, les a diſtingués avec raiſon des pruniers, puiſque, ſans changer des dénominations reçues vulgairement, la fleur & les fruits de l'abricotier ſont ſeſſiles, l'ovaire & le fruit velus, le noyau ovale, uni, renflé, &c. le temps de la maturité, différent & plus prématuré, ſont des caractères ſuffiſans pour les différencier des pruniers.

M. du Hamel, dans ſon Traité des arbres & arbuſtes, a donné à l'abricotier de Sibérie, la phraſe d'Amman, *armeniaca betulæ folio & facie, fructu exſucco;* Amman, *Ruth.* & en a parlé dans ſon Traité des bons fruits, ſous le nom d'*abricot noir; tome I, page 142.*

M. Pallas, dans ſon premier volume, 1.ere partie des plantes Ruſſes, donne ſous le nom de *prunus Sibirica,* la deſcription & la figure de cet abricotier; il y indique auſſi la couleur de ſon fruit, d'un rouge-noir, & donne tous les détails concernant ſon bois, ſa feuille & ſes fleurs, *tab. VIII, page 15.*

En 1757, M. du Hamel ignoroit d'où lui étoit venu cet arbre qu'il cultivoit; mais d'après la deſcription qu'en

a donnée dernièrement M. Pallas, celles qu'on avoit de Gmelin & d'Amman, je crois ne pouvoir plus douter que ſon lieu originaire ne ſoit la Sibérie.

Linné, qui a compris l'abricotier & le pêcher dans le genre des pruniers, regarde avec raiſon cet arbre de Sibérie, comme devant former une eſpèce, puiſqu'il varie peu par ſes ſemences. Jamais il ne devient un ſi gros arbre ni ſi élevé que l'abricotier commun; cependant il pouſſe des jets longs & grêles, ſouvent terminés par une pointe dure. Sa feuille eſt ovale, alongée, & finit par un prolongement très-aigu; elle eſt dentée finement, d'un vert-foncé en-deſſus, ſoutenue par des pétioles longs, & reſſemblant par-là aux feuilles de bouleau auxquelles on l'a comparée avec aſſez de juſtice. Les fruits de celui que nous poſſédons, ſont attachés à un très-court pédicule, en quoi il diffère principalement du premier, & ne deviennent pas plus gros qu'une prune de damas: ils ſont arrondis, ayant leurs diamètres à peu-près égaux, & de dix-huit lignes environ; l'œil eſt peu enfoncé. Ce fruit eſt couvert d'un duvet léger & fin; ſa couleur eſt violette très-foncée, preſque noire, & ſa chair uniformément pourpre; ſa peau & ſa chair ſont colorées de la même manière du côté du ſoleil & de la muraille, s'il eſt en eſpalier; le noyau eſt liſſe & bombé, figuré en cœur comme celui de l'abricotier, étant plus renflé ſur un côté qu'il ne l'eſt ſur l'autre: celui aplati porte une arête principale, & à côté de celle-là deux autres moins marquées; elles ſont ſemblables à ce qu'on remarque ſur les noyaux d'abricots: celui de Sibérie en diffère ſeulement par un ſillon qui ſe voit ſur le côté oppoſé à l'arête, & qui eſt renflé, par-là il ſe rapproche de la prune; mais on ſait que ce ſillon ſe trouve auſſi ſur quelques eſpèces d'abricot, que ſur d'autres, c'eſt un véritable tuyau, dans lequel on peut paſſer un crin ou fil de laiton fin; que d'ailleurs il manque à quelques eſpèces de prunes. Quoique ce ſillon ſoit apparent ſur toute la longueur du noyau, dans le fruit

que

que nous examinons, on ne peut diſconvenir qu'il tient plus, par ſa forme, du noyau d'abricot que de celui de la prune: ſon amande eſt légèrement amère; il mûrit avec les abricots, à la fin de Juillet ou au commencement d'Août; ſon eau eſt ſucrée, mais a peu de goût. Amman & Pallas donnent ce fruit comme n'ayant aucune ſaveur, mais la culture peut avoir corrigé celle naturelle à l'arbre ſylveſtre: il faut cependant convenir qu'il ne mérite d'être placé dans nos vergers, que par la ſingulière couleur de ſon fruit.

Ces deſcriptions de la feuille & du fruit ayant la plus grande conformité avec celles données par Amman, Gmelin, Linné & Pallas, je crois qu'il n'y a pas lieu de douter que l'arbre que je viens de décrire, ne ſoit originaire de la Sibérie, & que c'eſt celui qui y croît dans des lieux montagneux & entre des rochers.

M. Pallas ajoute que « peut-être ce prunier de Sibérie n'eſt-il qu'une ſimple variété du prunier-abricotier que le « changement de climat & de poſition a fait dégénérer; « c'eſt ce que la culture dans les jardins fera connoître par « la ſuite ». Nous avons déjà dit que cet abricotier ſe régénère par les ſemences, ainſi ce ſeroit une eſpèce; d'ailleurs, ne ſemble-t-il pas qu'on dût retrouver la première Nature dans les climats & contrées de la Sibérie, où la main de l'homme n'auroit encore produit aucun changement? S'il eſt aſſez conſtant que l'abricotier que nous cultivons, a été tranſporté de la Perſe dans l'Arménie & en Grèce * pourquoi les parties les plus ſeptentrionales de notre globe n'auroient-elles pas auſſi une eſpèce d'abricot? ce qui devient confirmé par le fait que nous venons de rapporter.

J'ajoute ici la ſynonimie de cet arbre.

Prunus inermis, foliis ovato-cordatis, longè mucronatis, fructibus excuſſis. Gmelin, flor. Sib. III, pag. 172.

---

* *Voyez* le voyage de M. Pockocke, pour l'abricot de damas: & le voyage de M. Otter, pour ceux d'Alep & d'Aintab.

Prunus floribus ſeſſilibus, foliis ovato-oblongis. Linné, ſyſt. II, pag. 486, n.° 8.

Armeniaca betulæ folio & facie, fructu exſucco. Amman, Stirp. Ruth. p. 192, n.° 272, tab. XXX. Du Hamel, arb. & arb. tom. I, pag. 74.

Prunus inermis, foliis ovato-cordatis, longè mucronatis, fructibus exſuccis (ſeſſilibus), Pallas, plant. Roſ. 1.ª pars, tom. I, pag. 15, tab. VIII.

MÉMOIRE
SUR UNE
NOUVELLE ESPÈCE D'ORME.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Préſenté le 1.er Sept. 1784.

PARMI pluſieurs grands arbres qui par différentes émigrations garniſſent maintenant nos forêts, nos bois & nos plantations, & qu'on a aſſociés avec le chêne qui couvroit uniquement l'ancienne Gaule, nous pouvons citer l'orme comme étant une des acquiſitions des plus utiles & qui nous procure le plus de diverſes jouiſſances.

Nous poſſédons l'orme depuis long-temps en France; il eſt indigène dans quelques parties de l'Europe, il ſe trouve auſſi naturellement dans quelque parties de l'Aſie; pluſieurs variétés ſemblables aux nôtres ſont auſſi en Canada & dans l'Amérique ſeptentrionale.

Depuis peu, en France, on cultive une eſpèce d'orme provenant de la Floride, & elle n'eſt nullement ſenſible aux fortes gelées; enfin l'on cultive un orme nain qu'on croit avoir été tiré du Japon, mais celui-là ſouffre des gelées, & demande des protections contre les froids rigoureux.

M. du Hamel, dans ſon *Traité des Arbres & Arbuſtes*, nous donne les phraſes de dix ormes, mais dans ce nombre, il n'a pas prétendu, quoique ſous le titre d'eſpèces, n'y avoir pas réuni pluſieurs variétés. Il ne connoiſſoit pas, en 1757, les deux eſpèces étrangères, celles de la Floride & du Japon. Nous devons la deſcription de ces deux-ci à M. Richard, qui maintenant, à Cayenne, travaille à reculer les limites de nos connoiſſances en Botanique.

J'aurois tort de prétendre avoir introduit en France une nouvelle eſpèce d'orme, puiſqu'elle y exiſtoit depuis

long-temps; mais comment, après les Tournefort, Vaillant & les Juſſieux, eſt-il reſté un arbre différent de preſque toutes les eſpèces de ce genre, ſans qu'ils l'aient fait connoître ? Admirateur de leur zèle & de leurs talens, c'eſt un haſard s'il m'eſt reſté à glaner après de pareils maîtres, auſſi attentifs à récolter en matière de Sciences.

L'orme commun ſe plaît dans notre climat, il végète dans des terres qui ont peu de fond quand la terre de la ſuperficie eſt végétative, ſes racines s'étendent au loin & vont chercher la nourriture qui lui eſt néceſſaire: le chêne périroit où l'orme ſubſiſte. Mais quand il eſt placé dans une terre ſertile qui a du fond, il pivote & en peu de temps s'élève, & quoiqu'étant planté proche d'autres ormes il acquiert de la groſſeur; les progrès de cet arbre ſont encore plus rapides lorſqu'il eſt placé dans un fond frais & un peu humide.

Perſonne n'ignore l'utilité & les grands avantages qu'on retire de l'orme que nous cultivons, & dont quelques eſpèces ou variétés ſont préférées à juſte titre; les Charrons emploient beaucoup d'ormes, ils en ſont ſur-tout les moyeux des roues & les jantes, &c. c'eſt avec l'orme qu'on fait la preſſe des preſſoirs, certaines parties des moulins à eau & à vent, &c. & on achette de préférence, pour les moyeux & les jantes, l'orme appelé *tortillard.*

Avant de parler encore de la nouvelle eſpèce d'orme découverte, il convient de rapeler les caractères propres au genre, & de ne citer que les différences qui caractériſent l'eſpèce dont nous parlons.

La fleur, dans le genre de l'orme, eſt compoſée d'un calice plus ou moins découpé, mais d'une ſeule pièce preſque toujours colorée en rouge; ce calice qui perſiſte juſqu'à la maturité du fruit, porte depuis quatre juſqu'à cinq & même ſix étamines du double plus longues que le calice; il eſt donc difficile de donner à ce genre une place dans la méthode du célèbre Linné, puiſqu'elle devroit être réglée ſur ce nombre d'étamines.

Mais ce qui déroute encore celui qui cherche dans cette même méthode une place aſſignée au genre de l'orme, c'eſt que ſur le même arbre il ſe trouve des fleurs à étamines, d'autres hermaphrodites, & que certains individus ont plus ou moins de l'une ou de l'autre de ces fleurs; l'eſpèce d'orme qu'on nomme *tortillard*, & qui eſt principalement recherchée par les Charrons, eſt très-ſujette à donner des graines ſtériles, ou à n'en point produire, parce que des individus ſouvent ne portent que des fleurs incomplètes.

Ces fleurs naiſſent par petits paquets, elles ſont ſeſſiles, & il leur ſuccède des capſules membraneuſes, auſſi ſeſſiles, au milieu deſquelles on voit une loge qui contient une ſeule ſemence: la forme de la capſule eſt un ovoïde ſoutenu à la branche par ſon petit diamètre, & chacun de ſes côtés eſt arrondi ; l'extrémité oppoſée à celle de ſon pédicule, eſt échancrée en forme de cœur.

A l'eſpèce nouvelle que je fais connoître aujourd'hui, la fleur varie auſſi dans le nombre de ſes étamines qui en contient depuis quatre juſqu'à ſix. Le calice ne diffère des autres eſpèces d'ormes qu'en ce que le calice de celles connues eſt campanulé , & le fond , dans l'eſpèce que je décris, eſt très-pointu; d'ailleurs ce qui lui ſert de différence & la caractériſe , c'eſt que, dans cette eſpèce, la fleur eſt ſoutenue par un long pédicule , & n'eſt pas ſeſſile comme dans la plupart des eſpèces décrites.

Le fruit ſoutenu auſſi par ce même pédicule fort alongé, a la forme d'un ovoïde dont le grand axe porte par une de ces extrémités dans le calice, & l'autre extrémité très-pointue, eſt fendue, & ſéparée juſque vers la loge qui renferme la ſemence; enfin le pédicule & le fruit ſont garnis de poils ou filets blancs & ſoyeux qui les rendent comme velus: ces parties, en mûriſſant, changent peu de couleur & conſervent en grande partie la teinte verte qu'elles avoient ſur l'arbre.

La feuille de cet arbre eſt grande, large; on y remarque

auſſi, comme dans beaucoup d'autres ormes, qu'un côté de la feuille ſe prolonge plus que l'autre côté ſur la nervure principale intermédiaire & longitudinale. Enfin, elle ſe diſtingue difficilement des ormes à grandes feuilles, & qu'on a nommés mal-à-propos *ormes femelles.*

L'écorce me paroît raboteuſe, & aſſez approchante auſſi de celle de l'orme femelle, ſans y pouvoir remarquer ces ſillons tortueux, comme on les diſtingue dans l'orme tortillard; variété de l'orme femelle.

Le tronc, quoique l'arbre s'élève & ait un beau port, ſes branches s'étendant, devient fort gros : je ne puis parler de la qualité de ſon bois, ne m'étant pas trouvé à portée d'en faire débiter.

J'ai dit que pluſieurs ormes, quoique grainant beaucoup, ne donnoient que des ſemences infructueuſes : je ſoupçonne que quelques parties de la fructification ſont viciées ou incomplètes dans ces individus, & que l'orme dont nous parlons a ce défaut, car la plupart des capſules ſont dépourvues de graines, & je n'ai pu encore parvenir à le faire lever de graines; mais d'autres perſonnes ont été plus heureuſes, & d'ailleurs on peut ſe le procurer par le ſecours de la greffe.

On voit donc que je ne puis pas aſſurer que cet orme forme une eſpèce, mais les différences dans certaines parties de ſa fructification me le font conjecturer avec quelque eſpèce de certitude.

J'ai découvert cet orme premièrement au jardin de l'Arſenal de Paris; & depuis que je l'ai eu fait remarquer à différentes perſonnes, on s'eſt aſſuré qu'il ſe trouve encore dans pluſieurs autres endroits de la France.

Je dois ajouter qu'ayant eu à ma diſpoſition un catalogue de quelques arbres indigènes à la Ruſſie & à la Siberie, & y ayant quelques planches gravées de ces arbres, j'y ai vu l'orme que je cite avec les longs pédicules qui ſoutiennent ſes fleurs & ſes fruits, & qu'on y donne cet arbre comme étant l'eſpèce d'orme la plus commune en Sibérie, & d'un uſage très-avantageux pour les Arts.

ULMUS PEDUNCULATA

Mem. de l'Acad. R. des Sc. An. 1784. Pag. 214. Pl. II.



Fossier del. *Y. le Gouaz sculp.*

Il seroit difficile, comme je l'ai dit, de fixer le temps où l'orme a commencé à être introduit en France; nous savons seulement que du temps de François I.er il n'y en avoit presque point en France: il seroit plus incertain encore de déterminer le pays d'où on l'a tiré; serions-nous redevables de cette espèce à la Russie ou à la Siberie?

On pourroit désigner cet orme sous le nom trivial d'*ulmus pedunculata*, & sous cette phrase.

Ulmus foliis ovato-acuminatis duplicato-serratis basi inæqualibus, fructu viridi bicorne villoso, pedunculo filiforme longo, membranâ seminali subtilissimè reticulatâ. Act. R. Paris. 1784*.

* Depuis la lecture de ce Mémoire, M. Pallas a publié la première partie des plantes de la Russie; il y annonce que l'*ulmus pedunculata* est l'orme le plus commun en Russie, & le nomme *ulmus lævis*: il a fait graver sa graine, & y décrit notre orme à fruit sessile, comme étant l'orme le moins généralement répandu; ainsi cela confirmeroit ce que j'ai dit plus haut, que nous pourrions devoir cet orme à la Russie ou à la Siberie.

DESCRIPTION

D'un Poiſſon du genre des Silures, appelé Shaid *ou* Shaiden *par les Allemands.*

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Lû le 28 Juillet 1784.

M. BROUSSONET (maintenant de cette Académie) lut à l'Académie, le 14 Juillet 1784, un Mémoire ſur un Silure ou anguille tremblante, comparable au *gimnotus* annoncé par M. Adanſon, &c; & voyant une grande conformité entre le poiſſon qu'il décrivoit, & le shaid des Allemands, j'ai cru devoir faire part à la Compagnie, de ce que j'avois écrit ſur ce poiſſon.

Le shaid entre dans la claſſe ou ſection des poiſſons anguilliformes, & fera partie de la ſuite au traité des Pêches, commencé par feu M. du Hamel-du-Monceau, & à laquelle je travaille.

Le shaid ou shaiden, ſchadem, welſs des Allemands, eſt le poiſſon décrit par Geſner, ſous le nom de *ſilurus (page 1047),* ainſi que par Willughby *(page 128, tab. H 5;* c'eſt le *glanis ſalviani (page 210)* & d'Aldrovande; le *ſilurus glanis* de Linné, le *ſum harcha* ou *acchia* des Polonois, & le *sheat fish* des Anglois, le *glagno* à Conſtantinople, & enfin le *glanis,* eſpèce de ſilure, de Pline.

Bélon, après avoir parlé de l'eſturgeon, & du poiſſon *ičtio colle hanſen ploſen*, cite le *ſilurus*, & ſemble avoir voulu parler du shaid, en annonçant un poiſſon d'eau douce qu'on vend journellement au marché de Conſtantinople, que le vulgaire nomme *glagnon*, & qui, ſuivant Bélon, eſt le vrai ſilure des Anciens.

Il paroît encore que les Auteurs ont reconnu pluſieurs eſpèces de ſilures; celui que nous décrivons eſt celui d'Artedy, *cirris quatuor in mento*, appendix 110. Ce poiſſon n'ayant

n'ayant été décrit qu'imparfaitement par les Ichtyologistes, & la figure qu'ils en ont donnée étant encore plus incomplète, j'ai cru devoir profiter d'un de ces poissons, envoyé par M. de Regemorte à M. du Hamel, pour le faire dessiner; & comparant ce que les auteurs déjà cités en avoient dit, avec le poisson que j'avois sous les yeux, ajouter ce qui manquoit à leur description & aux gravures qu'ils en ont données *(a)*. Les Anciens ne suivoient aucune méthode, & omettoient de décrire dans les poissons, les parties caractéristiques qui pourroient servir maintenant à faire connoître ceux qu'ils n'ont qu'indiqués. Les Ichtyologistes plus modernes sont, je crois, encore trop concis, & nous laissent des descriptions imparfaites, de sorte qu'en poissons, comme en plantes, nous sommes sujets à séparer des espèces ou variétés, au lieu de les rapporter aux genres & espèces connus: d'ailleurs, la plupart des figures laissées par les Ichtyologistes, sont bien imparfaites; tâchons donc qu'on ne puisse pas nous faire les mêmes reproches.

Suivant Willughby, le shaid ou *silurus* a quelquefois quinze, seize pieds, & beaucoup plus de longueur: on en a vu, d'après les auteurs qui en ont parlé, qui pesoient 80, 120, 150 livres & plus. Il se trouve dans l'Elbe en Hongrie, dans le lac Newsildersée, dans le Danube, principalement au-dessous d'Offen, à quelque distance de Vienne, en sorte qu'il fournit abondamment le marché de cette capitale; fort rarement en pêche-t-on depuis Offen en remontant vers Vienne: on en trouve aussi dans la Vistule. Gesner dit que quelques lacs de Suisse en fournissoient de son temps, mais on prétend qu'il ne s'y en trouve plus un seul. Il y a aussi en Bavière, un lac où l'on y en prend quelquefois. On en a aussi pêché dans

(a) Depuis la lecture de ce Mémoire à l'Académie, j'ai su que ce poisson étoit décrit dans les Mémoires de l'Académie de Stockolm, *année 1756, tab. III, pag. 34,* par M. Osbeck, & dans le douzième volume des Mémoires de l'Académie de Copenhague, *figures 1 & 2, page 132*, sous le nom de *Mallen.*

le Rhin en différens temps, & nommément trois vers l'année 1740. Bélon dit qu'on l'apporte à Conſtantinople, des prochains fleuves & des lacs de Macédoine.

Celui que nous avons eu entre les mains (en 1769), & dont nous allons donner la deſcription, venoit de Vienne en Autriche: ſa longueur depuis l'extrémité du muſeau *A*, juſqu'au bout de l'aileron de la queue *B*, étoit de deux pieds & demi; ſa plus grande largeur, très-charnue à l'endroit *(C)* des ouïes ou branchies, étoit de quatre pouces & demi.

La forme de ce poiſſon, conſidérée généralement, va en diminuant avec uniformité depuis les branchies juſqu'à la queue, en s'aplatiſſant un peu ſur les côtés; cet aplatiſſement devient conſidérable à l'endroit où eſt ſitué l'anus, & il continue de même juſqu'à la queue.

On ne trouve d'écailles très-apparentes *(b)* en aucune partie de la peau; elle eſt viſqueuſe & couverte d'une mucoſité, à peu-près comme la peau de l'anguille: cette ſimilitude, plutôt que la forme du corps du poiſſon, a engagé les Ichtyologiſtes à le ranger dans la claſſe des anguilliformes *(de piſcibus anguilliformibus)*. Bélon dit que ſa peau eſt liſſe & polie, ſans écailles comme l'anguille; que par cette raiſon, les Juifs s'en abſtiennent comme nourriture; qu'on ſe ſert de la peau de ce poiſſon pour en couvrir les inſtrumens, comme luth & guitare: cette peau eſt médiocrement épaiſſe, néanmoins plus en certains endroits que dans d'autres; elle revêt en général, ſans diſcontinuité, tout le corps, les ailerons, &c. mais ſa couleur varie. Dans le poiſſon qui nous a ſervi à faire cette deſcription, le corps étoit marbré de taches plus ou moins grandes, & de différentes formes, les unes rouges, les autres bleuâtres, jaunes, pâles ou brunes; le deſſous de la mâchoire & du ventre étoit blanc avec des

(b) Je ne voudrois pas aſſurer ſi avec attention on n'en découvriroit ps comme à l'anguille.

teintes rouges. Willughby ne parle que d'un mélange de ſillons noirs & blanchâtres ſur le ventre & ſur les côtés; les ſillons du nôtre étoient peu profonds & tracés ſur le dos & les côtés, non ſur le ventre, ſuivant diverſes directions, mais toujours de la tête vers l'extrémité oppoſée, indépendamment des ſillons ſuperficiels & parallèles qu'on apercevoit ſur le travers du poiſſon, où ils étoient produits, ſur-tout par les appendices latérales de la grande arête.

Geſner, qui diſtingue pluſieurs eſpèces de ce poiſſon, y obſerve des variétés de couleurs encore différentes de celle que nous citons : au reſte, on peut dire avec Willughby, qu'il y a beaucoup de poiſſons dont la couleur varie à raiſon de l'âge, du ſexe, & du lieu où ils vivent; de plus, certaines couleurs s'affoibliſſent beaucoup & promptement au ſortir de l'eau. La tête eſt large & aplatie en deſſus, à ſa partie antérieure, comme on le voit en *E, F, figure 2,* dans ce poiſſon dont la longueur totale étoit de deux pieds & demi ; le travers de la bouche *E, F,* avoit trois pouces & demi d'un angle à l'autre, & le pourtour de ſon ouverture preſque onze pouces. Les lèvres ſont épaiſſes d'environ deux lignes & demie en tout ſens, ſuivant le contour des mâchoires : l'épaiſſeur de la partie garnie de dents à chaque mâchoire, eſt de quatre à cinq lignes, *G, figures 1* & *3 ;* ces mâchoires forment un demi-ovale, mais celle d'en bas eſt de trois quarts de pouce plus avancée que l'autre; toutes deux ſont diviſées au milieu de leur longueur par une ſymphiſe *G,* & entièrement garnies d'une multitude de dents courtes, fines, aiguës, fort ſerrées, & un peu inclinées vers le dedans de la bouche. À peu de diſtance de la mâchoire ſupérieure, on trouve au palais une zone de ſix lignes de largeur, en demi-cercle, formée de pareilles dents, mais qui ſont plus courtes. On aperçoit encore au fond du palais de chaque côté, une maſſe oſſeuſe, arrondie, ſaillante, longue d'environ un pouce, toute hériſſée de dents ſemblables à celles des mâchoires,

mais bien plus courtes & plus ſerrées; & ſur les mâchoires inférieures, au-deſſous de ces maſſes, ſont deux autres garnitures pareilles qui ont une forme rhomboïdale d'environ un pouce & demi de longueur : toutes ces parties dentées, qu'on peut comparer en quelque ſorte à des limes, ſont d'une couleur jaunâtre qui contraſte ſenſiblement avec le blanc de l'intérieur de la bouche.

Aſſez près du bord de la lèvre ſupérieure, & à un pouce de l'articulation des os de la mâchoire, eſt de chaque côté un filet cartilagineux *H*, ferme, brun, long de ſept pouces, & terminé en pointe fine: la diſſection nous a fait voir que cette eſpèce de mouſtache, dont nous ignorons le vrai uſage, eſt mue par un nerf contigu au nerf optique, & par un muſcle très-fort; qu'elle eſt articulée à ſa baſe avec un nœud oſſeux qui lui donne un mouvement de genou. Benoît-Martin de Berne dit que ces fibres ſont des antennes, & que le poiſſon les projette en avant, comme pour tâter les objets.

En ſuivant le bord de la mâchoire ſupérieure, & avançant vers le milieu, un demi-pouce plus haut que l'inſertion de ces fibres, on aperçoit de chaque côté une petite ouverture *I*, garnie d'un tuyau qui y fait une ſaillie d'environ une ligne de longueur; ce trou communique par un canal intérieur, large & oſſeux, avec une autre ouverture moins apparente faite en fente, placée ſur la même ligne, à un pouce au-deſſus, & qui ne devient bien ſenſible que quand on a ſoulevé la membrane qui la couvre en partie.

Immédiatement derrière les mouſtaches, à un pouce de diſtance, ſont les yeux *K*; ils n'ont que trois lignes d'ouverture, ſont très-peu ſaillans, & revêtus d'une membrane épaiſſe. Deux os embraſſent chaque œil, un de ces os, à peu-près demi-circulaire, aſſez large, contigu au crâne, & ſaillant, en environne la partie antérieure; l'autre lui eſt oppoſé, mais a une forme approchante de celle des ailerons; il eſt étroit, en courbe alongée dans ſa

plus grande largeur, puis il ſe prolonge en ligne droite, & ſe termine en pointe par le haut ; il eſt logé entièrement dans la peau des joues.

Ce que nous appelons *joues*, ſont des parties fort charnues *L, fig. 1*, qui accompagnent l'œil, & dont la poſition ſe termine au bord de l'opercule des ouïes : cet opercule *M,* commençoit à trois pouces & demi de la lèvre ſupérieure dans ce poiſſon, & il avoit en cet endroit une articulation. Depuis-là, toute la largeur de l'opercule, ſur les côtés, n'étoit que d'un pouce & demi ; après avoir fait le tour de la tête, il s'étendoit juſque ſous la gorge, & les deux opercules ſe réuniſſoient en pointe, *N, fig. 4*, à deux pouces du bord antérieur de la lèvre. La partie oſſeuſe formoit tout au plus la moitié de cette largeur, le reſte étoit rempli par une ſubſtance charnue & pliſſée, dans laquelle étoient enclavées & fixées des arêtes fines & oſſeuſes. Sous chaque opercule ſont quatre branchies, dont les os ſont très-forts ; les deux de devant ont chacun, ſur un ſeul rang, une douzaine de petits oſſelets mobiles, pointus, & diſtans les uns des autres. Il y a ſur chacun des deux os poſtérieurs deux rangées parallèles de dents moins conſidérables & plus ſerrées ; ſes filets oſſeux & colorés ne forment qu'un ſeul plan de cinq à ſix lignes de largeur au bord de chaque os ; mais le plan eſt double à la partie poſtérieure.

A la mâchoire inférieure, ſont adhérens quatre filets *O, fig. 1, 3 & 4*, cartilagineux, aſſez mous, blancs avec une légère teinte de rouge, longs d'un pouce & demi ou deux pouces, ſitués à treize ou quatorze lignes du bord de la lèvre, ſuivant aſſez le contour de la mâchoire, & eſpacés entr'eux de treize à quatorze lignes.

Geſner & pluſieurs autres Auteurs diſent que les ſix filets dont nous avons parlé, qui garniſſent la mâchoire ſupérieure & celle inférieure, tombent tous les ans, & qu'ils ſont remplacés par de nouveaux. Sur la même ligne que l'angle de la bouche, à trois pouces & demi en arrière,

ſous le bord de l'opercule des ouïes, eſt une nageoire, *P*, aſſez large, arrondie par le bas, compoſée de ſeize rayons cartilagineux, dont le plus grand a trois pouces de longueur, & les autres ſont graduellement plus courts, ſelon la forme de l'arrondiſſement qui les termine. Outre ces ſeize rayons, il y en a, ſur le bord antérieur, un autre *Q*, tout-à-fait oſſeux, très-fort, large de quatre lignes à ſa baſe, pointu, long de deux pouces & qui, n'ayant point ſenſiblement d'articulation ſéparée, eſt couvert de la même membrane que les autres rayons. Willughby obſerve, avec Kintmannus, que ce rayon oſſeux ſert d'arme défenſive au shaid, & qu'il eſt denté en ſcie à ſa partie poſtérieure. Nous convenons de cette denture qui n'eſt ſenſible que vers le bas; mais comme le rayon oſſeux eſt couvert de la membrane commune de toute la nageoire, que ſa pointe ſeule l'excède, & qu'il ne paroît pas pouvoir s'alonger, nous ne ſommes pas dans le cas de déterminer en aucune manière l'uſage de cette denture ainſi enfermée de la longueur d'environ un pouce.

Environ à onze pouces du bord antérieur de la mâchoire d'en bas, ſont deux ailerons *R*, preſque contigus, parallèles & entièrement cartilagineux; chacun compoſé de onze rayons qui ſe terminent en arrondiſſement, & dont le plus long a un pouce & demi. La plus grande largeur de ces ailerons eſt de quinze lignes.

Ils ſont ſitués un pouce en devant de l'anus *D*, au-deſſous duquel commence un grand aileron *SS*, dont les rayons ſont au nombre de quatre-vingt-dix. Il s'étend ſur une longueur d'environ dix-huit pouces, & ſe termine en s'arrondiſſant à-peu-près au milieu *T*, de la longueur de l'aileron de la queue; ſa largeur eſt de douze à treize lignes, & ſon arrondiſſement, à côté de la queue, fait comme un reſſaut bien ſenſible.

L'aileron de la queue *(B)* eſt entier, taillé obliquement, un peu frangé, formé de dix-ſept rayons cartilagineux & ſouples. La membrane qui le couvre eſt plus

épaiſſe que celle des autres ailerons; elle l'eſt ſur-tout au bord qui eſt une continuation du dos : comme il y a une coupe inclinée, ſon angle ſupérieur eſt à deux pouces cinq ou ſix lignes de l'articulation *(V)*, où cet aileron a un pouce & demi de largeur. Geſner paroît douter que cet aileron ſoit une continuité de celui du ventre. Willughby le nie poſitivement. A conſidérer ces deux ailerons en tant que recouverts en effet par une membrane commune, on pourroit n'admettre entr'eux aucune ſéparation; mais les rayons qui s'articulent au bas de la grande arête, ayant ſous cette même membrane une direction qui leur eſt propre depuis l'endroit où ſe termine l'arrondiſſement de l'aileron du ventre; & le concours de ces rayons formant autour du bord inférieur de la grande arête, un aileron comme dans la plupart des autres poiſſons, il ſemble qu'on peut très-bien diſtinguer cet aileron d'avec l'autre.

Sur le dos, à huit pouces du bord antérieur de la mâchoire d'en haut, eſt un ſeul aileron *(X)* dont le plus grand diamètre eſt de ſix à ſept lignes. Il eſt formé de trois rayons que l'on comprend devoir être écartés les uns des autres pour former cette étendue; le plus grand n'a qu'un pouce de largeur.

On ne trouve pas de langue dans ce poiſſon. Sur la voûte du palais, eſt un voile épais & tendineux qui n'a d'attache que par les côtés.

Nous avons dit que les opercules des ouïes alloient ſe réunir ſous le devant de la mâchoire inférieure. Quand on enlève la membrane qui tapiſſe par en-bas le dedans de la bouche, on trouve, à ce point de leur réunion, une loge charnue, dans laquelle eſt une oreillette ou aorte conſidérable, faite en poire, qui précède le cœur. Ce muſcle n'eſt pas échancré, il a une forme à peu-près priſmatique, foiblement convexe en deſſous, terminé en pointe par le bas, & taillé aſſez carrément à ſon extrémité

ſupérieure qui ne communique avec l'aorte que par un tuyau menu & court.

L'eſtomac commence au fond de la gorge; il eſt très-épais, long d'environ ſix pouces, large de trois pouces à ſon orifice ſupérieur, arrondi & un peu plus étroit par le fond. Le pylore ou orifice inférieur eſt ſitué plus bas que la moitié de la longueur totale : ce viſcère, liſſe & veiné par dehors, eſt intérieurement garni de rugoſités plus ou moins conſidérables, très-nombreuſes, & qui s'étendent en long ſur divers ſens, de manière qu'on aperçoit ſouvent une communication entr'elles.

Sur ce viſcère, eſt placé le foie diviſé en deux lobes conſidérables & inégaux, au milieu deſquels on trouve une petite veſſie qui contient du fiel, couleur de ſouci. La veſſie d'air eſt blanche, enveloppée d'une membrane brune & mince qui tient à la grande arête; mais on les ſépare auſſi facilement l'une de l'autre que le gant d'avec la main : cette veſſie eſt d'une ſubſtance forte & tendineuſe, longue d'environ ſix pouces, large de trois dans ſa partie moyenne, arrondie en bourſe ou ſac par le bas; telle étoit au moins celle de notre shaid. Nous n'y avons point vu cette diminution inſenſible en pointe, que Willughby attribue à cette veſſie, elle eſt ſéparée intérieurement de haut en bas par une forte cloiſon dont le bas ſe courbe en arc, & qui intercepte toute communication entre les deux loges.

Ce poiſſon n'a qu'une arête; elle règne depuis la tête juſqu'à la queue; ſes vertèbres ne ſont pas couvertes de mucilage comme celles de l'anguille, à la claſſe de laquelle Willughby rapporte le shaid; leurs apophyſes ou arêtes latérales ſont rangées parallèlement des deux côtés, aſſez droites, eſpacées à une ligne ou un peu plus. Il n'y a point de côtes courbes qui ſe prolongent pour enfermer les viſcères. Les apophyſes de ce côté-là ſont ſeulement plus courtes dans l'eſpace qu'occupent les viſcères ; auſſi le ventre s'affaiſſe-t-il ſur lui-même, faute de ſoutien, dès

qu'on

qu'on l'a vidé. Les œufs du shaid, que nous avons eus à la mi-Février, étoient très-menus, & rassemblés en deux masses ovales terminées en pointe, longues de presque trois pouces sur un pouce de largeur.

Nous ne décrirons pas l'organe de l'ouïe de ce poisson; il nous suffira de dire qu'à l'extrémité du crâne, & près de la naissance des vertèbres, on trouve une loge à peu-près aussi longue que large, qui renferme un mucilage, dans lequel sont contenus séparément, l'un à droite, l'autre à gauche, deux osselets très-secs, nus, fort blancs, dont la forme approche de l'ovale, longs d'environ une ligne & demie, plats sur leurs surfaces; mais il y en a une chargée d'un pareil os bombé, plus petit, moins blanc, & qui s'en détache par le moindre choc.

Ce poisson passe pour être des plus voraces, & en conséquence à redouter parmi les autres poissons.

On le range au nombre des mets délicats. Le foie en est bon, les œufs ont une saveur fine, la peau qui est grasse a un mérite particulier.

Nous l'avons mangé au bleu, suivant l'avis des connoisseurs qui nous l'avoient envoyé, mais une sauce un peu relevée lui auroit servi de meilleur assaisonnement; aussi Willughby dit-il qu'on peut l'apprêter de toutes les mêmes manières que l'anguille.

Nous avons déjà prévenu qu'il y avoit plusieurs espèces de Silure, & Gesner dit qu'il existe un poisson, connu sous le nom de *blax*, qui lui ressemble assez par la forme, mais qui est d'un si mauvais goût que les chiens ne veulent pas même en manger.

Tous les Auteurs s'accordent à donner une dimension & une pesanteur considérables à certains de ces poissons; c'est pour cela qu'on ne peut les vendre au marché qu'en les coupant par tranches ou morceaux: Gesner dit que le milieu du corps doit être préféré au reste, comme étant plus ferme & moins fade.

Nous avons cité beaucoup d'endroits où l'on trouvoit

le shaid; il ſemble qu'il eſt devenu beaucoup plus rare qu'il ne l'étoit autrefois.

Le ſieur Diers, pêcheur diſtingué de Straſbourg, ayant entendu parler de ce poiſſon par ſon père, pêcheur comme lui, entreprit le voyage de Hongrie; & après avoir pris des inſtructions des Hongrois, il raſſembla quatre cents shaids de toutes grandeurs, convenables au tranſport, & les conduiſit, dans une baſcule, depuis Offen juſqu'à Ulen. Il les mit dans des tonneaux pour les mener par terre à Straſbourg. Aucun de ces poiſſons ne périt dans la baſcule; mais une douzaine des plus petits ne purent ſoutenir le charroi de terre. Depuis cette tentative, le même ſieur Diers entreprit de faire venir un ſecond convoi à-peu-près du même nombre, & de le faire arriver directement par terre, il a encore réuſſi; mais il a eu environ un tiers de perte, dont l'objet, du côté de l'intérêt, a été compenſé par la précaution de vendre en route ceux des poiſſons qu'il voyoit foiblir.

Dans les deux convois, ceux qui ſont arrivés à Straſbourg, ſe ſont très-bien ſoutenus, à la reſerve de cinq à ſix ſur chaque cent, & ont été vendus chèrement.

Le ſieur Diers avoit combiné la marche & les ſéjours; il les nourriſſoit de ces petits poiſſons communs auſſi dans la rivière de Seine, qu'on nomme *ables* ou *ablettes*, & dont on retire l'écaille qui recouvre la peau, pour en former la nacre des perles fauſſes. Il trouvoit à point nommé ou de ces ables, ou des petits poiſſons blancs pour la nourriture de ſes shaids, & des baſcules dans leſquelles il donnoit, en pleine eau, un jour de repos à ſon poiſſon après deux jours de marche. A Straſbourg, dans les baſcules, le ſieur Diers les nourriſſoit avec des ables écaillés, qui forment un commerce d'induſtrie pour ce pêcheur, qui, d'après ce qu'il a vu dans un de ſes voyages à Paris, a reconnu qu'il pouvoit trouver abondamment en Alſace, ce petit poiſſon propre à la fabrique des fauſſes perles; & il a établi une manufacture ou un dépôt de ces écailles

qu'il envoie à Paris, tandis que ses shaids & ses brochets mangent les poissons qui les ont fournies.

Je dois terminer cette description, en ajoutant qu'un fond limoneux paroît mieux convenir à ce poisson que celui sableux, & qu'il passe pour certain qu'il ne s'est jamais multiplié dans quelque lieu qu'il ait été transporté. Cependant le sieur Diers ne désespère pas, en lui trouvant une eau tranquille, & l'y laissant en liberté, de l'y voir frayer, & de réussir à le multiplier.

Ce poisson grossit beaucoup & promptement, même dans les bascules. On a reconnu qu'en neuf mois, ceux pesant dix-huit livres, en pesoient vingt-six; ceux d'une livre ont pesé trois livres après un an de séjour dans les bascules. On a cru à propos de les transporter vivans pendant les chaleurs, c'est au mois de Juillet que le sieur Diers les a fait voyager.

J'ai donné, d'après les Auteurs, 150, même 200 livres, comme l'excédant de pesanteur auquel peut parvenir ce poisson. Je dois cependant ajouter que la personne qui a fait, en Hongrie, l'acquisition des shaids pour le sieur Diers, assure qu'il s'y en trouve qui pèsent jusqu'à quatre cents livres, qu'on les coupe comme de la viande, & qn'on les vend par livre au marché.

EXPLICATION de la Planche représentant un Shaid, espèce de silure.

Fig. 1. Le poisson, vu de côté, & suivant sa longueur.

A, museau.

B, la queue.

C, l'ouïe.

D, l'anus.

L, parties charnues auxquelles nous avons donné le nom de *joues*.

M, origine des opercules.

P, nageoire brachiale.

Q, rayon de cette nageoire, qui est osseux.

R, aîlerons ventrals.

S, grand aileron qui prend depuis l'anus, & se prolonge jusqu'à l'aileron de la queue.

T, aileron de la queue.

V, articulation de cet aileron de la queue.

X, seul aileron du dos.

Fig. 2. *E E*, éminences charnues, que nous avons nommées *joues*.

F F, ouverture des mâchoires.

I, petite ouverture garnie d'un tuyau.

K, les yeux.

Fig. 3. *G*, lèvres qui bordent les mâchoires.

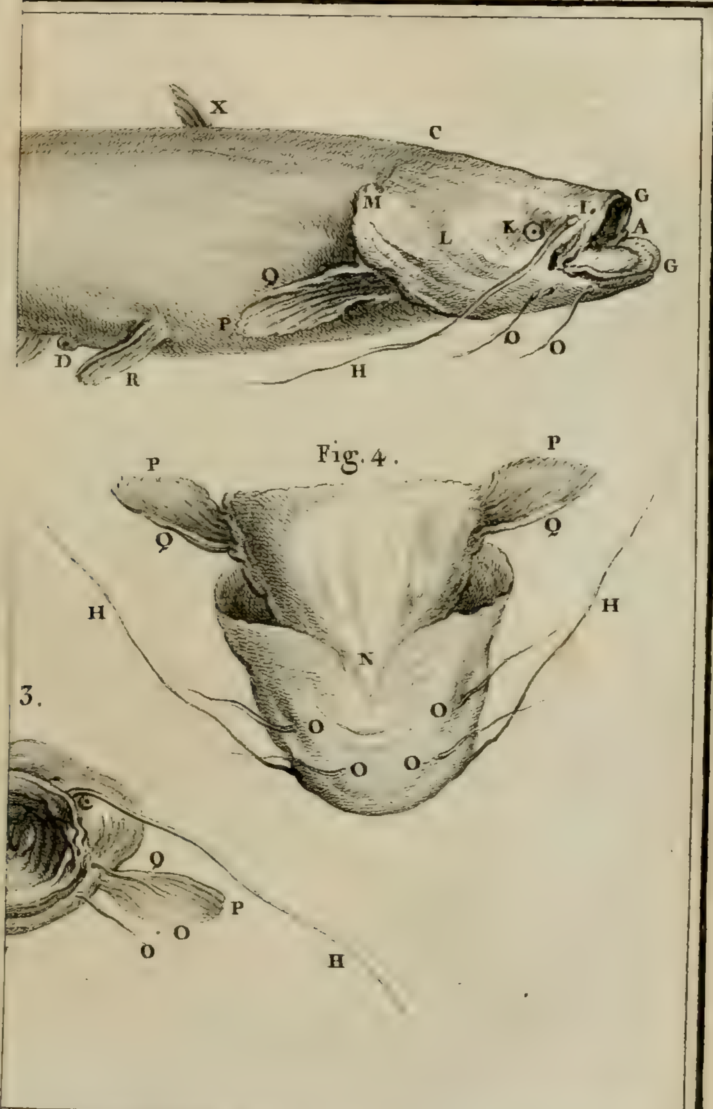
H, filet cartilagineux au bord de la lèvre supérieure, à un pouce de l'articulation des os de la mâchoire.

Fig. 4. *N*, réunion des opercules.

O, quatre filets cartilagineux & mous.

AID GERM.

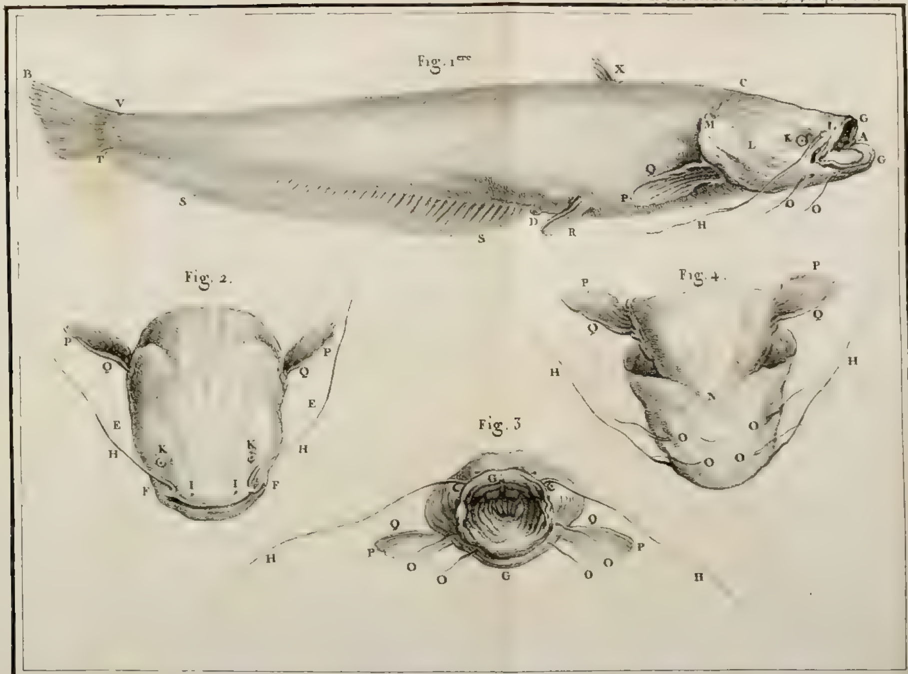
Mém. de l'Ac. R. des Sc. An. 1784. Pag. 228. Pl. III.



Y. le Gouaz sculp.

SILURUS LATI, SHAID GERM.

Mém. de l'Ac. R. des Sc. An 1784. Pag. 228. Pl. III



Fossier del. — J. le Gouaz sculp.

RECHERCHES THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES

Sur la force de torsion, & sur l'élasticité des fils de métal : Application de cette théorie à l'emploi des métaux dans les Arts & dans différentes expériences de Physique : Construction de différentes balances de torsion, pour mesurer les plus petits degrés de force. Observations sur les loix de l'élasticité & de la cohérence.

Par M. COULOMB.

I.

CE Mémoire a deux objets ; le premier, de déterminer la force élastique de torsion des fils de fer & de laiton, relativement à leur longueur, à leur grosseur, & à leur degré de tension. J'avois déjà eu besoin, dans un Mémoire sur les Aiguilles aimantées, imprimé dans le *neuvième volume des Savans étrangers*, de déterminer la force de torsion des cheveux & des soies ; mais je ne m'étois point occupé des fils de métal, parce que l'objet utile à mes recherches, n'étoit pour lors que de choisir, à forces égales, les suspensions les plus flexibles, & que j'avois trouvé que les fils de soie avoient incomparablement plus de flexibilité que les fils de métal. Le second objet de ce Mémoire, est d'évaluer l'imperfection de la réaction élastique des fils de métal, & d'examiner quelles sont les conséquences que l'on en peut tirer, relativement aux loix de la cohérence & de l'élasticité des corps.

Lû en 1784.

I I.

La méthode pour déterminer la force de torſion, d'après l'expérience, conſiſte à ſuſpendre par un fil de métal, un poids cylindrique, de manière que ſon axe ſoit vertical ou dans la direction du fil de ſuſpenſion. Tant que le fil de ſuſpenſion ne ſera point tordu, le poids reſtera en repos; mais ſi l'on fait tourner ce poids autour de ſon axe, le fil ſe tordra, & fera effort pour ſe rétablir dans ſa ſituation naturelle; ſi pour lors l'on abandonne le poids, il oſcillera plus ou moins de temps, ſuivant que la réaction élaſtique de torſion ſera plus ou moins parfaite. Si dans ce genre d'expérience, l'on obſerve avec ſoin la durée d'un certain nombre d'oſcillations, il ſera facile de déterminer, par les formules du mouvement oſcillatoire, la force de réaction de torſion qui produit ces oſcillations. Ainſi, en faiſant varier la peſanteur du poids ſuſpendu, la longueur des fils de ſuſpenſion, & leur groſſeur, l'on peut eſpérer de déterminer les loix de la réaction de torſion, relativement à la tenſion, à la longueur, à la groſſeur, & à la nature de ces fils.

I I I.

Si le fil de métal étoit parfaitement élaſtique, ſi la réſiſtance de l'air n'altéroit pas l'amplitude des oſcillations, le poids ſoutenu par le fil de métal, une fois en mouvement, oſcilleroit juſqu'à ce qu'on l'arrêtât. La diminution des amplitudes des oſcillations ne peut donc être attribuée qu'à la réſiſtance de l'air, & qu'à l'imperfection de l'élaſticité de torſion; ainſi, en obſervant la diminution ſucceſſive de l'amplitude de chaque oſcillation, & en retranchant la partie de l'altération qu'il faut attribuer à la réſiſtance de l'air, l'on pourra, au moyen des formules du mouvement oſcillatoire, appliquées à ces expériences, déterminer ſuivant quelles loix cette force élaſtique de torſion eſt altérée.

IV.

Ce Mémoire ſera diviſé en deux ſections; dans la première, l'on déterminera la loi des forces de torſion, en ſuppoſant les forces de torſion proportionnelles à l'angle de torſion, ſuppoſition conforme à l'expérience, lorſque l'on ne donne pas une trop grande amplitude à l'angle de torſion: l'on donnera quelques applications de cette théorie à la pratique.

Dans la ſeconde ſection, l'on cherchera, par l'expérience, ſuivant quelles loix la force élaſtique de torſion eſt altérée dans les grandes oſcillations : l'on ſera uſage de cette recherche pour déterminer les loix de la cohérence & de l'élaſticité des métaux & de tous les corps ſolides.

V.

SECTION PREMIÈRE.

Formules du mouvement oſcillatoire, en ſuppoſant la réaction de la force de torſion proportionnelle à l'angle de torſion, ou altérée par un terme très-petit.

Un corps cylindrique B (*fig. I, n.° 1*) eſt ſoutenu par un fil RC, de manière que l'axe du cylindre eſt vertical, ou ſe trouve dans la prolongation du fil de ſuſpenſion; l'on fait tourner ce cylindre autour de ſon axe, ſans déranger cet axe de ſon à-plomb: il faut déterminer, dans la ſuppoſition des forces de torſion proportionnelles à l'angle de torſion, les formules du mouvement oſcillatoire.

Le *n.° 2, fig. I,* repréſente une ſection horizontale du cylindre; tous les élémens du cylindre ſont projetés ſur cette ſection circulaire en π, π', π'', &c. l'on ſuppoſe que l'angle primitif de torſion ſoit $ACM = A$, & qu'après le temps t, cet angle ſoit ACm, ou qu'il ſoit diminué de l'angle $MCm = S$, en ſorte que $ACm = (A - S)$.

Puiſque l'on ſuppoſe la force de torſion proportionnelle à l'angle de torſion, le *momentum* de cette force ſera

représenté par $n(A - S)$, n étant un coéfficient constant, dont la valeur dépendra de la nature du fil de métal, de sa longueur & de sa grosseur. Si l'on nomme v la vîtesse d'un point quelconque π, au bout du temps t, lorsque l'angle de torsion est ACm, l'on aura, par les principes de Dinamique,

$$n(A - S)\, dt = \int \pi r dv,$$

où r est la distance $C\pi$ du point π à l'axe de rotation G.

Mais si le rayon CA' du poids cylindrique $= a$, & que la vîtesse d'un point A' de la circonférence du cylindre, soit au bout du temps t, représentée par u, l'on aura $v = \frac{ru}{a}$; d'où résulte

$$n(A - S)\, dt = du \int \frac{\pi r^2}{a};$$

& comme $dt = \frac{a\, dS}{u}$, l'on aura pour l'équation intégrée

$$n(2AS - SS) = uu \int \frac{\pi r^2}{a^2},$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{dS \int (\pi r^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(n)}\sqrt{(2AS - SS)}}.$$

Mais $\frac{dS}{\sqrt{(2AS - SS)}}$ représente un angle dont A est le rayon & S le sinus verse, qui s'évanouit lorsque $S = 0$, & qui devient égal à 90 degrés lorsque $S = A$.

Ainsi le temps d'une oscillation entière sera

$$T = \left(\int \frac{\pi r^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} 180^d.$$

VI.

Pour comparer la force de torsion avec la force de la gravité dans un pendule, il faut se ressouvenir que dans le

le pendule, le temps T d'une oscillation entière

$$= \left(\frac{\lambda}{g}\right)^{\frac{1}{2}} 180^d,$$

où λ est la longueur du pendule, & g la force de gravité. Ainsi un pendule isochrone aux oscillations du cylindre, donne

$$\int \frac{\pi r^2}{n} = \frac{\lambda}{g};$$

de cette formule, l'on tirera facilement la valeur de n, d'après l'expérience, puisque les dimensions du cylindre ou du poids sont données, ainsi que le temps d'une oscillation qui détermine la valeur λ.

Si l'on vouloit ensuite chercher un poids Q, qui, agissant à l'extrémité du levier b, eût un *momentum* égal au *momentum* de la force de torsion, lorsque l'angle de torsion est $(A - S)$, il faudroit faire $Q\,b = n\,(A - S)$.

VII.

Il faut actuellement chercher, pour un cylindre, la valeur de $\int \pi r^2$, que l'on trouvera égale à $\frac{\varphi \delta L . a^4}{4}$, où φ est le rapport de la circonférence au rayon, δ est la densité du cylindre & a son rayon. Mais comme la masse M du cylindre $= \frac{\varphi \delta L a^2}{2}$, l'on a $\int \pi r^2 = \frac{M a^2}{2}$, & conséquemment $T = \left(\frac{M a^2}{2 n}\right)^{\frac{1}{2}} 180^d$: en comparant, comme à l'*article précédent*, avec le pendule isochrone, il en résulte $\frac{\lambda}{g} = \frac{M a^2}{2 n}$, & comme $g\,M$ est le poids P du cylindre, nous aurons $n = \frac{P a^2}{2 \lambda}$; ce qui donne une formule très-simple pour déterminer n d'après l'expérience.

VIII.

SI la force de torsion, que nous avons supposée $n(A - S)$, étoit altérée par une quantité R, la formule du mouvement oscillatoire donneroit pour lors

$$[n(A - S) - R]\,\partial t = \partial u \int \frac{\pi r^2}{a};$$

& mettant comme plus haut, à la place de ∂t, sa valeur $\frac{a\,dS}{u}$, l'on a pour l'intégration

$$n(2AS - SS) - 2\int R\,dS = uu \int \frac{\pi r^2}{aa}.$$

Si l'on veut étendre cette intégration à une oscillation entière, il faut la diviser en deux parties, la première depuis M jusqu'en A, où la force de torsion accélère la vîtesse u, tandis que la force retardatrice la diminue; la deuxième depuis A jusqu'en M, où toutes les forces concourent à retarder le mouvement.

EXEMPLE I.er Supposons $R = \mu(A - S)^m$, l'on aura, pour l'état de mouvement dans la première portion MA,

$$n(2AS - SS) + \frac{2\mu(A - S)^{m+1}}{m+1} - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = uu \int \frac{\pi r^2}{aa};$$

ainsi, lorsque l'angle de torsion sera nul, ou que $(A - S) = 0$, l'on aura

$$nA^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1} = UU \int \frac{\pi r^2}{aa};$$

Considérons actuellement l'autre partie du mouvement depuis A jusqu'en M', & supposons l'angle $AGm' = S'$, nous trouverons, en nommant U la vîtesse au point A;

$$\frac{nS'^2}{2} + \frac{\mu S'^{m+1}}{m+1} = \frac{UU - uu}{2} \int \frac{\pi r^2}{aa}.$$

Substituant à la place de U^2 sa valeur

$$\left(\frac{n A^2 - \frac{2\mu A^{m+1}}{m+1}}{\int \frac{\pi r^2}{a^2}}\right),$$

l'on aura pour l'intégration totale, lorſque la vîteſſe deviendra nulle, ou lorſque l'oſcillation ſera achevée,

$$(A - S') = \frac{2\mu}{n(m+1)} \cdot \frac{(A^{m+1} + S'^{m+1})}{A + S'};$$

& ſi les forces retardatrices ſont telles qu'à chaque oſcillation, l'amplitude ſoit peu diminuée, l'on aura, pour valeur très-approchée de $(A - S')$,

$$(A - S') = \frac{2\mu A^m}{n(m+1)};$$

& ſi cette quantité $(A - S')$ étoit aſſez petite pour être traitée comme une différentielle ordinaire, l'on auroit pour lors, pour un nombre Z d'oſcillations,

$$\frac{2\mu}{n(m+1)} Z = \frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{S^{m-1}} - \frac{1}{A^{m-1}}\right),$$

où S repréſente ce que devient A après un nombre d'oſcillations Z. Ainſi l'on aura

$$S = \frac{1}{\left[\frac{2\mu.m-1}{n(m+1)} Z + \frac{1}{A^{m-1}}\right]^{\frac{1}{m-1}}},$$

qui détermine la valeur de S, après un nombre quelconque Z d'oſcillations.

Exemple II. Si

$$R = \mu(A - S)^m + \mu'(A - S)^{m'},$$

μ' & m' ayant d'autres valeurs que μ & m, l'on aura, en ſuivant le procédé du dernier exemple,

$$n(A - S) = \frac{2\mu}{m+1}\left(\frac{A^{m+1} + S^{m+1}}{A + S}\right) + \frac{2\mu'}{m'+1}\left(\frac{A^{m'+1} + S^{m'+1}}{A + S}\right);$$

& si la force retardatrice est beaucoup moindre que la force de torsion, l'on aura pour valeur approchée,

$$n(A - S) = 2\mu \frac{A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1}.$$

En général, si

$$R = \mu(A - S)^m + \mu'(A - S)^{m'} + \mu''(A - S)^{m''} + \&c.$$

l'on aura toujours pour une oscillation, en supposant R beaucoup plus petit que la force de torsion,

$$n(A - S) = \frac{2\mu A^m}{m+1} + \frac{2\mu' A^{m'}}{m'+1} + \frac{2\mu'' A^{m''}}{m''+1} + \&c.$$

IX.

Expériences pour déterminer les loix de la force de torsion.

Préparation.

SUR une petite planche KA, soutenue par quatre pieds, s'élève une potence ABD: le poteau montant AB, a quatre pieds de hauteur, la traverse horizontale DE, glisse le long du montant, & se fixe au moyen d'une vis E: le cylindre ou le poids P, porte dans sa partie supérieure, dans la prolongation de son axe, un bout d'aiguille b, fixée à ce cylindre. Cette aiguille est saisie par la partie inférieure d'une double pince a, qui se serre par des vis; la partie supérieure de cette pince saisit l'extrémité inférieure du fil de suspension; la partie inférieure de cette même pince saisit l'extrémité de l'aiguille fixée au cylindre. L'extrémité supérieure du fil de suspension est prise par une autre pince g, attachée à la traverse DE. Sur la planche AK, qui sert de base à l'appareil, l'on pose un cercle divisé en degrés, dont le centre C doit être placé dans la prolongation de l'axe du cylindre: l'on attache au-dessous du cylindre un index eo, dont l'extrémité o réponde aux divisions du cercle.

X.

Expériences ſur la torſion des fils de fer.

J'AI pris trois fils de clavecin, tels qu'on les trouve répandus dans le commerce, roulés ſur des bobines, & numérotés.

Le fil de fer, *n.° 12*, ſupporte, avant de ſe rompre, 3 livres 12 onces; les ſix pieds de longueur pèſent 5 grains.

Le fil de fer, *n.° 7*, ſupporte, avant de ſe rompre, un poids de 10 livres; les ſix pieds de longueur pèſent 14 grains.

Le fil de fer, *n.° 1*, caſſe ſous une tenſion de 33 livres; les ſix pieds de longueur pèſent 56 grains.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 12, *le cylindre peſant une demi-livre.*

L'ON a pris un cylindre de plomb peſant une demi-livre, que l'on a ſuſpendu au fil de fer, *n.° 12;* ce cylindre avoit 19 lignes de diamètre & 6 lignes $\frac{1}{2}$ de hauteur; le fil de ſuſpenſion avoit 9 lignes de longueur. L'on a fait tourner le cylindre autour de ſon axe, ſans déranger cet axe de ſon à-plomb, & l'on a eu les réſultats ſuivans:

Premier eſſai. Lorſque l'on fait tourner le cylindre autour de ſon axe, d'un angle plus petit que 180 degrés, il fait vingt oſcillations ſenſiblement iſochrones en... 120".

Deuxième eſſai. Mais en tordant de trois cercles, les dix premières oſcillations ont été de 2 à 3 ſecondes plus longues que les dix premières; & après les dix premières oſcillations, l'amplitude des oſcillations, qui étoit d'abord de trois cercles, ſe trouvoit réduite à cinq quarts de cercle.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 12, *cylindre peſant 2 livres.*

Premier eſſai. En ſuſpendant au même fil de fer, *n.° 12,*

un cylindre qui pesoit 2 livres, ayant le même diamètre que le précédent, mais 26 lignes de hauteur, l'on a eu, pour un angle de torsion de 180 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en... 242".

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 7, *cylindre pesant une demi-livre.*

Premier essai. En suspendant au fil de fer, *n.° 7,* le cylindre d'une demi-livre, l'on a eu, pour une torsion de 180 degrés & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en.................. 42"

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 7, *cylindre pesant 2 livres*

Essai. En suspendant au même fil un poids de 2 livres, les vingt oscillations ont été achevées en...... 85"

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° 1, *cylindre pesant une demi-livre.*

Essai. Lorsque l'on suspend à ce fil de fer de 9 pouces de longueur, un poids de demi-livre, sa roideur est si considérable, que ce poids n'est pas suffisant pour le redresser; en sorte que les oscillations sont très-irrégulières, parce qu'elles dépendent, non-seulement de l'angle de torsion, mais encore de la courbure que le fil de fer conserve en sortant de dessus la bobine, quoiqu'il soit tendu par un poids de demi-livre.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer n.° 1, *cylindre pesant 2 livres.*

Essai. Mais en suspendant à ce fil de fer de 9 pouces de longueur, un poids de deux livres, le fil est sensi-

blement redreſſé, & l'on a, pour un angle de torſion de 45 degrés & au-deſſous, vingt oſcillations ſenſiblement iſochrones en . . . . 23".

Continuation des Expériences.

Fils de laiton.

L'on a pris trois fils de laiton, correſpondans par le numéro & à peu-près par la groſſeur, aux trois fils de fer que l'on vient de ſoumettre aux expériences.

Le fil de laiton, *n.° 12,* portoit, au moment de ſa rupture, 2 livres 3 onces: les ſix pieds de longueur pèſent 5 grains.

Le fil de laiton, *n.° 7,* portoit, au moment de ſa rupture, 14 livres: les ſix pieds de longueur pèſent 18 grains $\frac{1}{2}$.

Le fil de laiton, *n.° 1,* caſſe ſous une tenſion de 22 livres: les ſix pieds de longueur pèſent 66 grains.

SEPTIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton n.° 12, *cylindre peſant une demi-livre.*

Eſſai. La longueur du fil de ſuſpenſion étoit de 9 pouces, comme dans les expériences qui précèdent; l'on y a ſuſpendu le cylindre peſant une demi-livre, & l'on a eu pour un angle de torſion de 360 degrés & au-deſſous, vingt oſcillations ſenſiblement iſochrones en . . . . 220".

Mais avec un angle primitif de trois cercles de torſion, les vingt premières oſcillations ont duré 225 ſecondes; & après ces vingt premières oſcillations, l'angle de torſion étoit encore de deux cercles à peu-près.

HUITIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 12, *cylindre peſant deux livres.*

Eſſai. Le fil de ſuſpenſion étant de 9 pouces, & le cylindre peſant 2 livres, l'on a eu pour un angle de 360 degrés & au-deſſous, vingt oſcillations ſenſiblement

iſochrones en . . . . 442″.

Avec un angle primitif de trois cercles de torſion, les vingt premières oſcillations ont duré à peu-près 444 ſecondes, & l'angle primitif de torſion s'eſt trouvé réduit à deux cercles un quart.

NEUVIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, *cylindre peſant une demi-livre.*

Eſſai. La longueur du fil de ſuſpenſion toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torſion étant de 360 degrés & au-deſſous, l'on a eu vingt oſcillations ſenſiblement iſochrones en . . . . 57″.

DIXIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, *cylindre peſant 2 livres.*

Eſſai. La longueur du fil de ſuſpenſion toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torſion étant de 360 degrés & au-deſſous, l'on a eu vingt oſcillations ſenſiblement iſochrones en . . . . 110″.

Mais l'angle primitif de torſion étant de deux circonférences de cercle, l'on a eu les vingt premières oſcillations en 111 ſecondes, & l'angle primitif de torſion qui étoit de deux circonférences, s'eſt trouvé réduit à une circonférence & demie.

ONZIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, *cylindre peſant une demi-livre.*

Eſſai. Sous une tenſion d'une demi-livre, le fil de ſuſpenſion n'eſt pas entièrement redreſſé, & le temps des oſcillations, dépendant en partie de ſa courbure primitive, eſt incertain.

DOUZIÈME

DOUZIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, *cylindre pesant 2 livres.*

Essai. La longueur du fil de suspension toujours de 9 pouces, l'angle primitif de torsion étant de 50 degrés & au-dessous, l'on a eu vingt oscillations sensiblement isochrones en .... 32″.

Mais l'angle primitif de torsion étant de cinq quarts de cercle, l'on a eu les vingt premières oscillations en 33 secondes $\frac{1}{2}$; & au bout de ces oscillations, l'angle primitif étoit réduit à un quart de cercle.

TREIZIÈME EXPÉRIENCE

Fil de laiton, n.° 7, *cylindre pesant 2 livres.*

Essai. La longueur des fils de suspension dans toutes les expériences précédentes, étoit de 9 pouces: comme l'on avoit besoin de déterminer la force de torsion, relativement à la longueur des fils, l'on a donné 36 pouces de longueur à la suspension de cette expérience, & l'on a eu jusqu'à trois cercles de torsion & au-dessous, vingt oscillations sensiblement isochrones en......... 222″.

X I.

Résultat des Expériences qui précèdent.

La force ou la réaction de la torsion des fils de métal, doit être relative à leur longueur, à leur grosseur, à leur tension. Ainsi, pour pouvoir déterminer généralement la loi de cette réaction, nous avons été obligés, dans les expériences qui précèdent, de suspendre différens poids à des fils de fer & de laiton, de grosseur & de longueur différentes: voici les résultats que ces expériences présentent.

Si l'on fait tourner autour de son axe le cylindre, sans

déranger cet axe de la ligne verticale, ce fil se tordra: lorsque l'on abandonnera le cylindre, le fil par sa force de réaction, fera effort pour reprendre sa situation naturelle; cet effort fera osciller le cylindre autour de cet axe, plus ou moins de temps, suivant que la force élastique sera plus ou moins parfaite.

Mais nous trouvons, par toutes les expériences qui précèdent, que lorsque l'angle de torsion n'est pas très-considérable, le temps des oscillations est sensiblement isochrone; ainsi nous pouvons regarder comme une première loi, que pour tous les fils de métal, lorsque les angles de torsion ne sont pas très-grands, la force de torsion est sensiblement proportionnelle à l'angle de torsion.

Ayant trouvé par l'expérience, que la force de réaction de torsion est proportionnelle à l'angle de torsion, il en résulte que toutes les formules oscillatoires que nous avons données, *articles IV & suivans*, d'après la supposition d'une force de torsion proportionnelle à l'angle de torsion, ou altérée par un terme très-petit, peuvent être appliquées à ces expériences.

Ainsi, comme nous avons eu, *article VII*, au moyen de ces formules $T = \left(\frac{Ma^2}{2n}\right)^{\frac{1}{2}} . 180$ degrés, & que dans toutes les expériences qui précèdent, les cylindres de demi-livre & de 2 livres avoient le même diamètre, il en résulte que n doit être toujours proportionnel à $\left(\frac{M}{T^2}\right)$.

Ainsi, si la tension plus ou moins grande du fil, n'a point d'influence sur la force de torsion, pour lors la quantité n pour un même fil, sera la même dans une tension de demi-livre & une tension de 2 livres, & par conséquent l'on aura T proportionnel à $M^{\frac{1}{2}}$. Comparons nos expériences faites avec deux poids, l'un d'une demi-livre, l'autre de 2 livres, dont les racines sont comme 1 est à 2.

Première expérience. Le fil de fer, *n.° 12,* tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en... 120″.

Deuxième expérience. Le même fil, tendu par un poids de 2 livres, fait 20 oscillations en........... 242″.

Troisième expérience. Fil de fer, *n.° 7,* tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en....... 43″.

Quatrième expérience. Fil de fer, *n.° 7,* tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en...... 85″.

La *cinquième expérience* ne peut pas se comparer avec la *sixième.*

Septième expérience. Fil de laiton, *n.° 12,* tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en... 220″.

Huitième expérience. Fil de laiton, *n.° 12,* tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en.... 442″.

Neuvième expérience. Fil de laiton, *n.° 7,* chargé du poids d'une demi-livre, fait 20 oscillations en.... 57″.

Dixième expérience. Fil de laiton, *n.° 7,* chargé du poids de 2 livres, fait 20 oscillations en...... 110″.

La *onzième* & la *douzième expériences* ne peuvent pas être comparées entr'elles.

Il résulte donc de toutes ces expériences, qu'avec le même fil de métal, un poids de deux livres fait sensiblement ses oscillations dans un temps double de celui où un poids d'une demi-livre fait ses oscillations; que par conséquent la durée des oscillations est comme la racine des poids; qu'ainsi la tension, plus ou moins grande n'influe pas sensiblement sur la réaction de la force de torsion.

Cependant, par beaucoup d'expériences faites avec de très-grandes tensions relativement à la force du métal, il paroît que les grandes tensions diminuent ou altèrent un

peu la force de torſion. L'on ſent en effet qu'à meſure que la tenſion augmente, le fil s'alonge, ſon diamètre diminue, ce qui doit ralentir la durée des oſcillations.

Nous n'avons pas pu comparer les fils de fer ou de laiton, *n.° 1*, ſous les tenſions d'une demi-livre & de deux livres, parce que, comme nous l'avons dit dans le détail des Expériences, la tenſion d'une demi-livre n'eſt pas ſuffiſante pour redreſſer ces fils.

X I I.

De la force de torſion relativement aux longueurs des fils.

Nous venons de trouver, dans l'article qui précède, que le plus ou moins de tenſion des fils n'influoit que d'une manière inſenſible ſur la force de torſion. Nous allons actuellement chercher, d'après les mêmes expériences, de combien, à angle égal de torſion, la longueur du fil de ſuſpenſion augmente ou diminue cette force. Mais il eſt clair qu'à meſure que l'on augmente la longueur du fil de métal, l'on peut faire faire, dans la même proportion, un plus grand nombre de révolutions au cylindre, ſans changer le degré de torſion; ainſi, la force de réaction de torſion doit être, pour un même nombre de révolutions, en raiſon inverſe de la longueur du fil. Voyons ſi ce raiſonnement s'accorde avec l'expérience.

La formule, de l'*article VII*, nous donne

$$T = \left(\frac{M a^2}{2 n}\right)^{\frac{1}{2}}.\ 180 \text{ degrés};$$

ou pour le même poids T proportionnel à $\frac{1}{(\sqrt{n})}$. Ainſi, ſi n eſt en raiſon inverſe des longueurs, comme la théorie l'annonce, T ſera comme les racines des longueurs des fils de ſuſpenſion: comparons avec l'expérience.

Nous trouvons, *dixième expérience*, que le fil de laiton, *n.° 7*, de 9 pouces de longueur, étant tendu par le poids d'une demi-livre, fait 20 oſcillations en....... 110",

Nous trouvons, *treizième expérience*, que le même fil de laiton, *n.*° 7, de 36 pouces de longueur, tendu par le poids de 2 livres, fait 20 oscillations en...... 222″.

Ainsi les longueurs des fils sont entr'eux : : 1 : 4, tandis que les temps des oscillations des fils sont : : 1 : 2; ainsi l'expérience prouve que les temps d'un même nombre d'oscillations, sont, pour les mêmes fils tendus par les mêmes poids, comme la racine des longueurs de ces fils, ainsi que la théorie l'avoit annoncé.

Nous avons fait beaucoup d'expériences du même genre que les précédentes, qui ont toutes très-exactement confirmé cette loi. Nous n'avons pas cru nécessaire d'en grossir ce Mémoire.

XIII.

De la force de torsion relativement à la grosseur des fils.

Nous venons de déterminer les loix de la force de torsion relativement à la tension & à la longueur des fils; il ne nous reste qu'à les déterminer relativement à la grosseur des mêmes fils.

Nous avons, dans les six premières expériences, trois fils de fer de différentes grosseurs & de même longueur; & dans les six expériences suivantes, trois fils de laiton de même longueur & de grosseurs différentes : mais comme nous avons le poids d'une longueur de 6 pieds de chacun de ces fils, il est facile d'en conclure le rapport de leur diamètre. Voici ce que le raisonnement doit faire prévoir; le *momentum* de la réaction de torsion doit augmenter, avec la grosseur des fils, de trois manières. Prenons pour exemple deux fils de même nature & de même longueur, que le diamètre de l'un soit double de celui de l'autre, il est clair que dans celui qui a un diamètre double, il y a quatre fois plus de parties tendues par la torsion, que dans celui qui a un diamètre simple; & que l'extension moyenne de toutes ces parties sera proportionnelle au diamètre du fil, de même

que le bras moyen du levier relativement à l'axe de rotation. Ainſi nous ſommes portés à croire, d'après la théorie, que la force de torſion de deux fils de métal, de la même nature, de la même longueur, mais d'une groſſeur différente, eſt proportionnelle à la quatrième puiſſance de leur diamètre, ou pour une même longueur au carré de leur poids. Comparons avec l'expérience.

Nous ne prendrons ici que les expériences où la tenſion eſt de 2 livres, pour pouvoir comparer tous les *n.os*, les fils du *n.o* 1 n'étant pas aſſez exactement tendus par le poids d'une demi-livre : nous avons

Fils de fer.

Deuxième expérience. Le fil de fer, *n.o 12*, dont les 6 pieds de longueur pèſent 5 grains, donne 20 oſcilllations en . . . . 242″.

Quatrième expérience. Le fil de fer, *n.o 7*, dont les 6 pieds de longueur pèſent 14 grains, donne 20 oſcillations en . . . . 85″.

Sixième expérience. Le fil de fer, *n.o 1*, dont les 6 pieds pèſent 56 grains, donne 20 oſcillations en . . . 23″.

Fils de laiton.

Huitième expérience. Le fil de laiton, *n.o 12*, dont les 6 pieds pèſent 5 grains, a donné 20 oſcillations en . . . 442″.

Dixième expérience. Le fil de laiton, *n.o 7*, dont les 6 pieds pèſent 18 grains ½, donne 20 oſcilliations en . . 110″.

Douzième expérience. Le fil de laiton, *n.o 1*, dont les 6 pieds pèſent 66 grains, donne 20 oſcillations en . . . 32″.

Pour déterminer, d'après ces expériences, la loi de la réaction de la force de torſion, relativement au diamètre du fil de ſuſpenſion, ſuppoſons que

$$T : T' :: D^m : D'^m :: \varphi^{\frac{m}{2}} : \varphi'^{\frac{m'}{2}},$$

où l'on ſuppoſe que T & T' repréſentent le temps d'un certain nombre d'oſcillations pour un fil de métal, dont le diamètre eſt D & D', & le poids pour une même longueur

φ & φ'; m étant la puiſſance que l'on cherche à déterminer. De cette proportion, nous tirerons

$$m = \frac{2\,(\log.\,T - \log.\,T')}{\log.\,\varphi - \log.\,\varphi},$$

formule qu'il faut comparer avec l'expérience.

La *deuxième expérience*, comparée avec la *quatrième*, donne... $m = -1{,}82$.
La *deuxième expérience*, comparée avec la *ſixième*........ $m = -1{,}95$.
La *huitième expérience*, comparée avec la *dixième*........ $m = -2{,}04$.
La *huitième expérience*, comparée avec la *douzième*....... $m = -2{,}02$.

D'où il réſulte que

$$T : T' :: \frac{1}{D^2} : \frac{1}{D'^2} :: \frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi'}.$$

Mais la formule du mouvement oſcillatoire

$$T = \left(\frac{M\,a^2}{2\,n}\right)^{\frac{1}{2}} 180 \text{ degrés},$$

donne, dans les expériences précédentes, à cauſe de l'égalité des poids de tenſion, n proportionnel à $\frac{1}{T^2}$; ainſi la force de torſion, pour des fils de même nature, de même longueur, mais de groſſeur différente, eſt comme la quatrième puiſſance du diamètre, ainſi que la théorie l'avoit annoncé.

XIV.

Réſultat général.

Il réſulte donc de toutes les expériences qui précèdent, que le *momentum* de la force de torſion, eſt, pour les fils du même métal, en raiſon compoſée de l'angle de torſion de la quatrième puiſſance du diamètre, & inverſe de la longueur du fil; en ſorte que ſi l'on nomme l la longueur du fil, D ſon diamètre, B l'angle de torſion, l'on aura, pour l'expreſſion qui repréſente la force de torſion, $\frac{\mu\,B\,D^4}{l}$, où μ eſt un coéfficient conſtant qui dépend de la roideur

naturelle de chaque métal : cette quantité μ, invariable pour les fils du même métal, peut ſe déterminer facilement par l'expérience, comme on va le voir dans l'article ſuivant.

X V.

Valeur effective des quantités n *&* μ.

Nous avons vu, *article VII,* que $n = \frac{P \cdot a^2}{2 \lambda}$, où P eſt le poids d'un cylindre, a ſon rayon, λ la longueur du pendule iſochrone, avec les oſcillations du cylindre, qui ſont produites par la force de torſion.

Appliquons cette formule à la *deuxième expérience,* où le fil de fer, *n.° 12,* eſt tendu par un poids de 2 livres, dont le rayon eſt 9 lignes $\frac{1}{2}$, & où 20 oſcillations ſe font en 242″.

Comme le pendule, qui bat les ſecondes à Paris, eſt de 440 lignes $\frac{1}{2}$, le pendule iſochrone, avec les oſcillations du cylindre, ſera $440\frac{1}{2} \left(\frac{242}{20}\right)^2$; ainſi

$$n = \frac{2 \text{ liv. } (9\frac{1}{2})^2}{2 \cdot 440\frac{1}{2} \left(\frac{242}{20}\right)^2} = \frac{1 \text{ liv.}}{715},$$

ainſi le *momentum* $n\,B$ du fil de fer, *n.° 12,* ayant 9 pouces de longueur, eſt égal à $\frac{1}{715}$ livres, multiplié par l'angle de torſion B, agiſſant à l'extrémité d'un levier d'une ligne de longueur.

Nous avons vu, dans les articles qui précèdent, que pour le même métal, il réſultoit de la théorie & de l'expérience que les forces de torſion étoient en raiſon inverſe de la longueur des fils de ſuſpenſion & de la quatrième puiſſance du diamètre. Ainſi il eſt facile d'avoir une valeur déterminée, de la force de torſion d'un fil de fer, d'une longueur & d'une groſſeur quelconque ; en voici le calcul.

Le

Le pied cube de fer, pesant à peu-près 540 livres, & les 6 pieds de longueur du fil de fer, *n.° 12*, pesant 5 grains, le diamètre de ce fil de fer est très-approchant d'un quinzième de ligne; ainsi le *momentum* de torsion d'un fil de fer, d'un quinzième de ligne de diamètre, est égal à $\frac{1}{7'5}$ livre, multiplié par l'angle de torsion, agissant à l'extrémité d'un lévier d'une ligne de longueur.

XVI.

Comparaison de la roideur de torsion de deux métaux différens.

L'ON déduira facilement, de la théorie & des expériences qui précèdent, quel est, dans deux métaux différens, le fer, par exemple, & le cuivre jaune, le rapport de roideur de torsion : prenons le fil de fer, *n.° 12*, que nous comparerons avec le fil de laiton, *n.° 12*.

Nous venons de calculer à l'*article précédent*, la quantité n, pour le fil de fer, & nous l'avons trouvée $= \frac{1}{7'5}$ livre, multiplié par un lévier d'une ligne. Mais comme le fil de laiton, chargé du poids de 2 livres, fait 20 oscillations en 442", nous aurons, par la même formule pour le fil de laiton, $n' = \frac{1 \text{ liv.} (9\frac{1}{2})^2}{440\frac{1}{2}(\frac{442}{20})^2}$; ainsi $\frac{n}{n'} = (\frac{442}{242})^2 = 3{,}34$; ainsi la roideur du fil de fer, *n.° 12*, est à la roideur du fil de laiton, *n.° 12*, à peu-près : : $3\frac{1}{3}$: 1.

Mais comme il y a peu de différence entre la pesanteur spécifique du fer & du cuivre, qui, suivant M. Musschembroek, sont : : 77 : 83, l'on peut supposer que le fil de fer, *n.° 12*, & celui de cuivre, *même numéro*, ont à peu-

près le même diamètre ; ainſi pour les fils de fer & de cuivre du même diamètre, tout étant d'ailleurs égal, les roideurs de torſion ſont $:: 3\frac{1}{3} : 1$, c'eſt-à-dire qu'en tordant le fil de fer d'un cercle, l'on aura la même réaction de torſion, qu'en tordant le fil de cuivre de $3\frac{1}{3}$ cercles.

Si l'on veut enſuite comparer la roideur de torſion avec la force de cohéſion, l'on remarquera que notre fil de fer portoit, au moment de ſa rupture, 60 onces, que celui de cuivre ne portoit que 35 onces; ainſi puiſqu'ils ont à peu-près le même diamètre, leur force de cohéſion étoit approchant $:: 60 : 35$, dans le temps que leur force de torſion vient d'être trouvée $:: 3\frac{1}{3} : 1$.

Ce dernier réſultat ne doit cependant être regardé que comme un cas particulier & non comme un réſultat général. Nous verrons dans la deuxième ſection de ce Mémoire, que la force des métaux varie ſuivant le degré d'écrouiſſement & de recuit, & que toutes les expériences dont on s'eſt ſervi juſqu'ici pour déterminer la force des métaux, ne peuvent être regardées que comme des cas particuliers.

Mais ce que cette dernière obſervation ſemble indiquer, & ce que la pratique confirme, c'eſt que ſi l'on veut ſoutenir un corps mobile ſur la pointe d'un pivot, il y a de l'avantage à préférer un pivot d'acier ou de fer, à un pivot de cuivre, puiſque ſous le même degré de preſſion le fer fléchit beaucoup moins que le cuivre; qu'ainſi le cercle de contact formé par la pointe du pivot, preſſée par le corps qu'elle ſoutient, aura un moindre diamètre pour le fer que pour le cuivre, ce qui, tout étant d'ailleurs égal, diminue le *momentum* du frottement qu'il faut vaincre pour faire tourner un corps ſur la pointe d'un pivot : nous aurons occaſion par la ſuite de revenir ſur cet article.

Par quelques expériences & par un calcul ſemblable à celui qui précède, nous avons trouvé qu'en ſuſpendant un cylindre à un fil de ſoie, formé de pluſieurs brins

réunis à l'eau bouillante, & assez fort pour porter jusqu'à 60 onces, ce fil de soie avoit 18 à 20 fois moins de roideur de torsion que le fil de fer qui portoit ce même poids au moment de sa rupture.

XVII.

Usage des expériences & de la théorie qui précède.

D'APRÈS la théorie qui précède, & les expériences sur lesquelles elle est fondée, l'on pourra mesurer des forces très-petites, qui exigent une précision que les moyens ordinaires ne peuvent pas fournir: nous allons en présenter un exemple.

XVIII.

Balance pour mesurer le frottement des fluides contre les solides.

LA formule qui exprime la résistance des fluides contre un corps en mouvement, paroît composée de plusieurs termes, dont les uns dépendent du choc des fluides contre le corps solide, & dont les autres sont dûs au frottement du fluide: parmi les termes dûs au frottement, il y en a un qui dépend de l'adhérence, & que l'on croit constant; mais ce terme est si petit, que confondu dans les expériences avec les autres quantités qui dépendent du choc, il est très-difficile de l'évaluer: l'on peut voir les expériences que M. Newton a faites pour découvrir cette quantité constante. *(Livre II des Principes mathématiques de la Philosophie naturelle, Scholie du vingt-cinquième théorème.*

La force de torsion donne un moyen facile de déterminer par l'expérience cette adhérence.

Dans un vase *ADBE*, *fig. 3*, rempli du fluide dont on veut déterminer l'adhérence, l'on suspend, au moyen d'un fil de cuivre, un cylindre *abcd*, de cuivre ou de

plomb; l'on place dessus le vase un cercle *A'B d'*, divisé en degrés; ce cercle se trouve au niveau de l'extrémité *d* d'un index *id* attaché au cylindre.

Lorsque l'on fera tourner le cylindre autour de son axe vertical, sans le déranger de son à-plomb, l'on pourra observer, au moyen du petit index, de combien chaque oscillation est altérée: & comme la force de torsion du fil qui produit ces oscillations, est connue par les expériences qui précèdent; que l'on peut aussi connoître l'altération dûe à l'imperfection de l'élasticité, en faisant osciller le cylindre dans le vide ou même dans l'air; l'on peut espérer, par ce moyen, de trouver la quantité constante dûe à l'adhérence.

Exemple & Expérience.

J'AI suspendu dans un vase plein d'eau, à un fil de cuivre, *n.° 12*, de vingt-neuf lignes de longueur, le cylindre de plomb pesant deux livres, qui nous a servi dans les expériences précédentes: le cercle *AB*, sur lequel l'on observoit les oscillations, avoit quarante-quatre lignes de diamètre; l'on a attendu, avant de commencer les observations, que les amplitudes des oscillations fussent diminuées au point que l'extrémité *d* de l'index ne parcourût sur le cercle qu'un arc d'une ligne & demie, répondant à peu-près à $3^d\, 55'$; & en observant la marche de l'index avec une loupe, l'on a aperçu distinctement quatorze oscillations avant que le mouvement fût éteint.

Résultat de cette Expérience.

Si la diminution successive de chaque oscillation est supposée constante, & qu'elle soit attribuée en entier à l'adhérence du fluide contre la surface du cylindre de plomb, l'on aura, *art. VIII*,

$$(A - S') = \left(\frac{2\mu}{n}\right),$$

où $(A - S')$ eſt la diminution de chaque oſcillation, $n(A - S)$ le *momentum* de la force de torſion, & μ le *momentum* de la force retardatrice dûe à l'adhérence.

Mais comme, d'après les obſervations des oſcillations, l'arc parcouru étoit diminué d'une ligne & demie en quatorze oſcillations, & que le rayon du cercle ſur lequel s'obſervoit cette diminution, étoit de vingt-deux lignes; en ſuppoſant cette diminution conſtante, l'on aura l'angle $(A - S)$ dont l'amplitude diminue à chaque oſcillation $= \frac{3}{2.22.14}$.

Mais nous avons trouvé, *art. XVI*, que pour un fil de laiton de neuf pouces de longueur, *n.° 12*,

$$n = \frac{1 \text{ livre}.(9\tfrac{1}{2})^2}{440\tfrac{1}{2}.\left(\frac{442}{20}\right)^2};$$

& comme nous avons auſſi trouvé que les forces de torſion ſont proportionnelles à la longueur des fils de ſuſpenſion, l'on aura pour notre fil de vingt-neuf pouces de longueur.

$$\mu = \frac{1}{3,155,000} \text{ livre} \times 1 \text{ ligne},$$

c'eſt-à-dire, que le *momentum* de la force retardatrice conſtante μ, eſt à peu-près égal à un trois millionème de livre, ſuſpendu à un lévier d'une ligne: quantité qui auroit été inappréciable par tout autre moyen que celui que nous venons d'employer.

Pour avoir actuellement la valeur de l'adhérence d'après cette expérience, il faut remarquer que la hauteur du cylindre de plomb, ſubmergée par l'eau du vaſe, étoit de vingt-quatre lignes, & que le diamètre de ce cylindre étoit de dix-neuf lignes. Ainſi, en prenant $\frac{22}{7}$ pour le rapport de la circonférence au diamètre, la ſurface du cylindre ſubmergée, étoit égale à $\frac{22}{7}.19.24$; & comme le mouvement ſe fait ici autour de l'axe du cylindre,

dont le rayon eſt $9\frac{1}{2}$ lignes, ſi δ eſt l'adhérence, le *momentum* de l'adhérence autour de l'axe de rotation, ſera $\delta\,\frac{22}{7}\,(19)^2.12$. Il faut encore ajouter à cette quantité le *momentum* de l'adhérence du cercle qui forme la baſe du cylindre plongé dans l'eau, dont le *momentum*

$$= \delta\ \frac{22}{7}.19^1.\frac{19^1}{4}.\frac{2}{3}\,\frac{19}{2},$$

en ſorte que le *momentum* total de la réſiſtance du fluide contre le cylindre ſera

$$\delta\,\frac{22}{7}\,(19)^2.(12 + \frac{19}{12}) = \delta.\frac{22}{7}.(19)^2\,(\frac{163}{12}).$$

Mais l'expérience nous a fait trouver ce même *momentum*

$= \frac{1 \text{ livre}}{3,155,000}$. 1 ligne pour un pouce carré; ainſi

$$\delta = \frac{1 \text{ livre}}{3155000}.\frac{7.12}{22.163.(19)^2},$$

& pour un pied carré l'adhérence ſera

$$\delta\,(144)^2 = \frac{1 \text{ livre}}{2345000},$$

en ſorte que la réſiſtance conſtante dûe à l'adhérence de l'eau pour une ſurface de 255 pieds, ne peut pas être évaluée à plus d'un grain; ainſi il y a peu de cas où cette altération conſtante, ſi elle a lieu, ne puiſſe être négligée dans l'évaluation du frottement de l'eau. Nous n'avons fait aucun eſſai ſur les autres fluides.

En donnant au cylindre des oſcillations de deux ou trois cercles d'amplitude, & comparant les diminutions ſucceſſives des amplitudes des oſcillations avec les formules du mouvement oſcillatoire altéré, j'ai cru apercevoir que dans les très-petites vîteſſes, ce frottement eſt comme les vîteſſes, & dans les grandes vîteſſes, comme le carré; mais ces expériences demandent un travail exprès, & d'être faites dans différens fluides.

XIX.

DEPUIS la lecture de ce Mémoire, j'ai construit, d'après la théorie de la réaction de torsion que je viens d'expliquer, une balance électrique & une balance magnétique; mais comme ces deux instrumens, ainsi que les résultats relatifs aux loix électriques & magnétiques qu'ils ont donnés, seront décrits dans les volumes suivans de nos Mémoires, je crois qu'il suffit ici de les annoncer.

XX.

SECONDE SECTION.

De l'altération de la force élastique dans les torsions des fils de métal. Théorie de la cohérence & de l'élasticité.

LORSQUE l'on tord les fils de fer ou de laiton, tendus, comme dans les expériences qui précèdent, par un poids, l'on observe deux choses; si l'angle de torsion n'est pas considérable, relativement à la longueur du fil de suspension, dans le moment où l'on lâche le poids, il revient à peu-près à la position qu'il avoit avant la torsion du fil de métal, c'est-à-dire, que le fil de suspension se détord de toute la quantité dont il a été tordu; mais si l'angle de torsion que l'on aura donné au fil de suspension, est très-grand, pour lors ce fil ne se détord que d'une certaine quantité, & le centre de réaction de torsion s'avancera de toute la quantité dont le fil ne sera pas détordu. C'est donc d'après ces deux considérations, qu'il faut diriger les expériences que nous devons faire dans cette section, ce qui demande deux suites d'expériences; la première, pour déterminer par la diminution des oscillations, de combien la force élastique de torsion est altérée dans le mouvement oscillatoire, quoique le centre de réaction de torsion ne soit pas déplacé; la seconde, pour déterminer le déplacement de ce centre de réaction, lorsque l'angle de torsion est assez grand pour que ce déplacement ait lieu.

XXI.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Fil-de fer, n.° 1, *longueur, six pouces six lignes.*

L'ON a pris un fil de fer de six pouces six lignes de longueur, il a été chargé d'un poids de deux livres, le même qui a servi dans les expériences de la section précédente. L'on a cherché, en faisant tourner ce cylindre autour de son axe pour tordre le fil de suspension, à déterminer de combien de degré l'amplitude diminuoit à chaque oscillation, & l'on a trouvé :

Premier essai, angle de torsion	90^d	perd 10^d en	$3\frac{1}{2}$ oscillat.
Deuxième essai	45	....	$10\frac{1}{2}$.
Troisième essai	$22\frac{1}{2}$	....	23.
Quatrième essai	$11\frac{1}{4}$	....	46.

Remarque sur cette Expérience.

Les diminutions des amplitudes des oscillations ont été très-incertaines, lorsque l'angle primitif de torsion a été de plus de 90 degrés; l'on a même observé que pour lors, en faisant tourner le cylindre autour de son axe, il ne revient pas à sa première position, & que la position respective des parties constitutives du fil a été altérée, & par conséquent, que son centre de réaction de torsion a resté déplacé: voici ce que l'expérience fournit sur ce déplacement.

XXII.

Suite de la première Expérience.

Dans cette partie de la première expérience, l'on a cherché le déplacement du centre de torsion, suivant le degré de torsion que l'on a donné au fil de suspension.

Premier

Premier *essai*, en tordant de.	$\frac{1}{2}C$	l'index ou le centre de torsion a été déplacé de.....		.. 8^d
Deuxième *essai*..........	1 *C*.....................			50.
Troisième *essai*..........	2.....................			310.
Quatrième *essai*..........	3...............	1 *C*	+	300.
Cinquième *essai*..........	4...............	2	+	290.
Sixième *essai*..........	5...............	3	+	280.
Septième *essai*..........	6...............	4	+	260.
Huitième *essai*..........	10...............	8	+	240.

Neuvième essai. Ayant voulu continuer à tordre toujours dans le même sens de quinze nouveaux cercles, le fil a cassé au quatorzième. Après cette expérience, ce fil étoit droit & très-roide, il s'étoit séparé suivant sa longueur, en deux parties; examiné à la loupe, cette séparation étoit très-sensible, & il avoit exactement la figure d'une corde formée de deux torons.

XXIII.

Remarque sur cette Expérience.

Cette première expérience & sa suite paroissent annoncer qu'au-dessous de 45 degrés, les altérations sont à peu-près proportionnelles aux amplitudes des angles de torsion, comme on le voit par les deuxième, troisième & quatrième essais de l'expérience première; qu'au-dessus de 45^d, les altérations augmentent dans un rapport beaucoup plus grand; que le centre de réaction de torsion ne commence à se déplacer que lorsque l'angle de torsion est à peu-près d'une demi-circonférence; que ce déplacement croît à mesure que l'on tord le fil; qu'il est assez irrégulier jusqu'à 1 cercle 10 degrés; que, passé ce terme de torsion, la

réaction de torsion reste à peu-près la même pour tous les angles de torsion : ainsi, par exemple, en tordant, dans le quatrième essai, de trois cercles, le centre de réaction de torsion se déplace d'un cercle + 300 degrés, en sorte que la réaction de torsion n'a ramené le cylindre que d'un cercle 60 degrés. Dans le septième essai, nous voyons, qu'après avoir déjà éprouvé dans les essais antérieurs, un déplacement de plus de huit cercles, que six nouveaux cercles de torsion déplacent le centre de réaction de torsion de 4 *C* + 260 degrés, en sorte que pour plus de quatorze cercles de torsion, la réaction de torsion n'est encore que d'un cercle plus 100 degrés ; ainsi elle ne diffère que d'un dixième de la réaction de torsion pour trois cercles de torsion que le quatrième essai nous a donnés d'un cercle + 60 degrés : les expériences qui vont suivre éclairciront cette remarque.

XXIV.

Deuxième Expérience.

Fil de fer, n.° 7, *longueur*, *6 pouces 6 lignes.*

L'on a cherché, dans la première partie de cette expérience, de combien les amplitudes des oscillations diminuoient à chaque oscillation, lorsque le centre de torsion n'étoit pas encore deplacé.

Premier essai, angle de torsion	180^d perd 10^d en...		$3\frac{1}{2}$ oscillat.
Deuxième essai.............	90.............		12.
Troisième essai.............	45.............		27.
Quatrième essai.............	$22\frac{1}{2}$.............		54.

Suite de cette deuxième Expérience.

Dans cette deuxième partie de la même expérience, l'on a cherché le déplacement du centre de torsion.

Premier essai, en tordant de	3 cercles	le centre de réaction de torsion déplacé de		300^d
Deuxième essai	4		1 C +	180.
Troisième essai	6		3 +	90.
Quatrième essai	8		5 +	90.
Cinquième essai	12		9 +	40.
Sixième essai	20		16 +	310.
Septième essai	30		26 C +	180.
Huitième essai	50		46 +	20.

Neuvième essai, au dix-septième cercle de torsion le fil a cassé.

XXV.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de fer, n.° *12*, *longueur*, *6 pouces 6 lignes.*

La première partie de cette expérience a été faite sous le même point de vue que la première partie des deux expériences qui précèdent.

Premier essai, angle de torsion	360^d perd..	10^d en..	1 oscillat.
Deuxième essai	180	10	2.
Troisième essai	90	10	5.
Quatrième essai	45	10	11.
Cinquième essai	22$\frac{2}{2}$	10	25.

Suite de cette troisième Expérience.

Déplacement du centre de torsion.

Premier essai, en tordant de	4 cercles	le centre de réaction de torsion déplacé de		300^d.
Deuxième essai	6		2 C +	40.

Troisième essai, aux six autres tours le fil a cassé.

XXVI.

LES expériences précédentes ont été continuées avec des fils de laiton, employés aux expériences de la première section.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 1, *longueur*, 6 *pouces* 6 *lignes.*

Premier	*essai*, en tordant de	180^d perd..	12^d en....	2 oscillat.
Deuxième	*essai*..........	90......	10.......	6.
Troisième	*essai*..........	45......	10.......	16.
Quatrième	*essai*..........	$22\frac{1}{2}$.....	10.......	40.
Cinquième	*essai*..........	$11\frac{3}{4}$.....	10.......	80.

Suite de la quatrième Expérience.

Déplacement du centre de torsion.

Premier	*essai*, en tordant de	2 cercles	{ le centre de torsion a été déplacé de.. }	160^d.
Deuxième	*essai*..........	4..........		2 *C* + 0.
Troisième	*essai*..........	6..........		3 *C* + 300.
Quatrième	*essai*..........	10..........		7 *C* + 300.
Cinquième	*essai*..........	20..........		17 *C* + 340.

Sixième *essai*, au vingt-huitième cercle de torsion le fil s'est rompu.

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Fil de laiton, n.° 7, *longueur*, 6 *pouces* 6 *lignes.*

Diminution des amplitudes dans les oscillations.

Premier	*essai*, en tordant de	360^d perd..	10^d en...	$2\frac{1}{2}$ oscillat.
Deuxième	*essai*..........	180......	10......	6.
Troisième	*essai*..........	90......	10......	13.
Quatrième	*essai*..........	45......	10......	31.
Cinquième	*essai*..........	$22\frac{1}{2}$.....	10......	72.

Suite de la cinquième Expérience.

Déplacement du centre de torſion.

En tordant de quatre cercles, le centre s'eſt déplacé de 220 degrés ; mais en voulant tordre de ſix cercles, le fil a caſſé.

XXVII.

DANS le fil employé à cette dernière expérience, la torſion altère moins les oſcillations, & par conſéquent la force élaſtique, que dans toutes les autres ; c'eſt ce qui réſulte du grand nombre d'oſcillations qui a lieu ici avant que le mouvement oſcillatoire ſoit détruit ; c'eſt ce qui réſulte également de la rupture ſoudaine de ce fil, ſans pouvoir déplacer d'un cercle ſon centre de réaction. J'ai généralement trouvé que les fils de laiton, répandus dans le commerce, entre les *n.os 5* & *8*, étoient ceux dont l'élaſticité de torſion étoit la moins imparfaite : en comparant les fils de fer & de laiton ſous les *mêmes numéros*, l'on trouve également que les fils de laiton ont une amplitude d'élaſticité beaucoup plus étendue que les fils de fer.

Au ſurplus, l'expérience préſente beaucoup d'irrégularités dans les réſultats : deux bobines du même fil & du même numéro, ne donnent pas toujours le même déplacement au même angle de torſion, ce qui ne peut être attribué qu'à la manière dont les fils ſont manufacturés, qu'à la plus ou moins grande preſſion qu'ils éprouvent en paſſant ſous la lèvre de la filière, qu'au recuit qu'on leur fait éprouver pour réduire ſucceſſivement le diamètre de numéro en numéro, du gros au petit.

XXVIII.

Première Remarque.

MALGRÉ l'incertitude qui règne dans les expériences des oſcillations pour les amplitudes des étendues, il paroît

qu'en dedans de certaines limites, ces altérations ſont à peu-près proportionnelles à l'amplitude de l'oſcillation, comme nous l'avons annoncé dans les remarques ſur la première expérience, & comme toutes les autres le confirment. La réſiſtance de l'air ne peut altérer que très-peu, dans nos expériences, l'amplitude des oſcillations, je m'en ſuis aſſuré par le moyen ſuivant. Le poids de deux livres, qui a ſervi aux expériences de cette ſection, avoit 26 lignes de hauteur & 19 lignes de diamètre; j'ai formé avec un papier très-léger, une ſurface cylindrique du même diamètre que ce poids, mais qui avoit 70 lignes de hauteur: je faiſois entrer une partie du cylindre de plomb dans mon enveloppe de papier, & je formois ainſi un cylindre de 78 lignes de hauteur, ou trois fois plus long que le premier, ce qui auroit dû tripler, dans le mouvement oſcillatoire, les altérations dûes à la réſiſtance de l'air; mais je n'ai jamais trouvé que ces altérations fuſſent d'un dixième plus conſidérable dans ce ſecond cas que dans le premier, le plus ſouvent elles étoient égales; ainſi la réſiſtance de l'air n'entre dans nos expériences, que pour des quantités que l'on peut négliger.

XXIX.

Seconde Remarque.

POUR former une balance de torſion, il faut toujours choiſir les fils qui ont l'elaſticité la moins imparfaite; les fils de laiton ſont de beaucoup préférables à ceux de fer: le choix de la groſſeur dépend des forces que l'on veut meſurer. J'ai une balance magnétique, qui ſera décrite dans nos Mémoires, où je me ſuis ſervi alternativement d'un fil de laiton de 3 pieds de longueur, des *n.os 12* & *7*; la force élaſtique de torſion eſt telle, qu'en tenant ces fils tordus de huit cercles, pendant trente heures, il n'y avoit pas un degré d'altération ou de déplacement dans le centre de torſion.

XXX.

Troisième Remarque.

DANS tous les fils de métal, la réaction de l'élasticité n'a qu'une certaine étendue: l'isochronisme des oscillations nous apprend que dans les premiers degrés de torsion, la force élastique est presque parfaite; mais au-delà de l'angle de torsion qui sert, pour ainsi dire, de mesure à la force élastique, le centre de réaction de torsion se déplace presque en entier de tout l'angle de torsion qui excède celui de la réaction de l'élasticité. Cependant, comme on peut le remarquer dans les expériences qui précèdent, l'amplitude de la réaction élastique n'est pas une quantité constante pour tous les angles de torsion, elle croît à mesure que la torsion augmente; moins l'élasticité première, dans le fil soumis à l'expérience, a d'étendue, plus cet accroissement est grand. Un fil de laiton, *n.° 1,* de 6 pouces & demi de longueur, rougi au feu, pour lui faire perdre par le recuit, la plus grande partie de son élasticité, ne donnoit après cette opération, pour le premier cercle de torsion, que 50 degrés de réaction d'élasticité; mais il avoit acquis, après 90 cercles de torsion, une étendue d'élasticité de près de 500 degrés dans cet intervalle; du 2 au 3.me cercle de torsion, la réaction de l'élasticité s'étoit accrue de 12 degrés; du 40 au 41.me cercle de torsion, la même réaction s'étoit accrue de 6 degrés; & du 90 au 91.me cercle de torsion, à peu-près d'un degré, en sorte que l'accroissement de la réaction élastique, après que le centre de réaction a été déplacé d'un certain angle, étoit à peu-près en raison inverse de l'angle de déplacement. Il faut avertir qu'après ces 90 cercles de torsion, j'ai voulu tordre de 50 autres cercles le même fil, mais qu'il s'est rompu au 49.me, en sorte que ce fil, avant de se rompre, pouvoit être tordu de 140 cercles. Si l'on

compare ce résultat avec la suite de la première expérience, où le même fil, *n.° 1,* n'avoit pas été recuit, l'on trouvera qu'après 25 cercles de torsion, la réaction de l'élasticité étoit de 480 degrés, qu'en tordant de 15 nouveaux cercles, le fil s'est cassé; ce dernier fil ne pouvoit donc éprouver, sans se rompre, que 40 cercles de torsion. En suivant dans cette expérience la marche de la réaction élastique, l'on en déduira qu'au point de rupture, cette réaction étoit à peu-près égale à celle du fil recuit dans le même point de rupture; d'où il paroîtroit que l'on est en droit de conclure que par la seule torsion l'on peut donner à un fil recuit toute l'élasticité dont il peut être susceptible, & que l'écrouissement ne peut rien y ajouter; en sorte que réciproquement, si en passant à la filière, ou par un autre moyen quelconque, l'on avoit pu donner à notre fil de laiton un écrouissement tel, que sa réaction d'élasticité eût été de 520 degrés, qui me paroît être celle de nos deux fils au moment de la rupture, pour lors la réaction élastique eût été portée à son *maximum* par cette première opération : il n'y auroit plus eu de déplacement possible dans le centre de réaction de torsion; mais toutes les fois que l'on auroit fait éprouver à ce fil une torsion de plus de 520 degrés, il se seroit rompu.

XXXI.

Quatrième Remarque.

D'APRÈS les expériences qui précèdent, voici, à ce qu'il paroît, comme l'on peut expliquer l'élasticité & la cohérence des métaux. Les parties intégrantes du fil de fer ou de laiton, ou d'un métal quelconque, ont une élasticité que l'on peut regarder comme parfaite, c'est-à-dire, que les forces nécessaires pour comprimer ou dilater ces parties intégrantes, sont proportionnelles aux dilatations ou compressions qu'elles éprouvent; mais elles ne sont liées entre elles

elles que par la cohérence, quantité constante & absolument différente de l'élasticité. Dans les premiers degrés de torsion, les parties intégrantes changent de figure, s'alongent ou se compriment, sans que les points par où elles adhèrent entr'elles, changent de place, parce que la force nécessaire pour produire ces premiers degrés de torsion, est moins considérable que la force d'adhérence ; mais lorsque l'angle de torsion devient tel, que la force avec laquelle ces parties sont comprimées ou dilatées, est égale à la cohérence qui unit ces parties intégrantes, pour lors elles doivent ou se séparer ou glisser l'une sur l'autre. Ce glissement de parties, a lieu dans tous les corps ductiles; mais si par ce glissement de parties les unes sur les autres, le corps se comprime, l'étendue des points de contact augmente, & l'étendue du champ d'élasticité devient plus grand. Cependant comme ces parties intégrantes ont une figure déterminée, l'étendue des points de contact ne peut augmenter que jusqu'à un certain degré, au-delà duquel ce corps se rompt; c'est ce qui explique les effets détaillés dans l'article qui précède. Ce qui prouve encore qu'il faut distinguer la cause de l'élasticité, de l'adhérence, c'est que l'on peut faire varier la cohérence à volonté par le degré de recuit, sans altérer pour cela l'élasticité. C'est ainsi que lorsque je faisois recuire à blanc mon fil de cuivre, *n.° 1* des expériences précédentes, il perdoit une grande partie de sa force de cohérence : avant d'être recuit, il portoit au point de rupture 22 livres, & après le recuit il portoit à peine 12 à 14 livres ; mais quoique l'adhérence fût presque diminuée de moitié par le recuit, & que l'amplitude d'élasticité fût presque diminuée dans la même proportion, cependant dans toute l'étendue de réaction élastique qui restoit au fil recuit, l'élasticité étoit la même, à angle égal de torsion, que dans le même fil non recuit, puisqu'en suspendant à l'un & à l'autre le même poids, le temps d'un même nombre d'oscillations étoit exactement égal dans les deux cas.

XXXII.

UN effet aſſez curieux du rapprochement des parties dans la torſion des fils de métal, c'eſt celui qui a lieu lorſque l'on tord un fil de fer, qui par cette ſeule opération acquiert par le rapprochement des parties, la qualité de prendre le magnétiſme à un plus haut degré qu'il ne l'avoit auparavant. Voici ce que l'expérience m'a appris à ce ſujet; j'ai pris un fil de fer, tel qu'on les trouve répandus dans le commerce, de la groſſeur de ceux qui ſervent pour les petites ſonnettes; une longeur de ſix pouces, peſoit 57 grains; ce fil de ſix pouces, aimanté & ſuſpendu horizontalement par un fil de ſoie détordu & très-fin, faiſoit une oſcillation en 18 ſecondes: ce même fil de ſix pouces de longueur, tordu juſqu'au point de rupture, & aimanté comme la première fois à ſaturation, par la méthode de la double touche, faiſoit une oſcillation en 6 ſecondes; en ſorte que le *momentum* de la force directrice pour deux aiguilles égales & ſemblables, étant comme l'inverſe du carré du temps d'un même nombre d'oſcillations, le *momentum* magnétique de l'aiguille tordue, étoit neuf fois plus conſidérable que celui de l'aiguille non tordue: j'aurai occaſion de revenir ſur cet article dans un autre Mémoire.

XXXIII.

POUR confirmer toute la théorie qui précède relativement à la cohérence & à l'élaſticicité, j'ai fait l'expérience ſuivante.

L'on a fixé, *fig. 4*, au moyen d'une agrafe *CD*, avec une vis *V*, une lame d'acier *AB*, ſur le bord d'une table très-ſolide; cette lame étoit priſe & ſerrée dans ſa partie *Aa*, entre deux plaques de fer *E* & *F*, par la vis *V*: cette lame avoit 11 lignes de large, & demi-ligne d'épaiſſeur; depuis le point *a* juſqu'au point *B*, où étoit ſuſpendu le poids *P*, il y avoit ſept pouces de diſtance: l'on meſuroit ſur la règle verticale *rg*, de combien le poids *P*,

faisoit baisser la lame AB à son extrémité B. Voici le détail des résultats, qui ont eu lieu suivant les différens poids, dont la lame étoit chargée.

L'on a fait rougir la lame à blanc, & on lui a donné une trempe très-roide; ensuite l'on a attaché en B à sept pouces du point a, différens poids. L'extrémité B a baissé,

Avec un poids d'une demi-livre de............ 8 lignes.

Avec un poids d'une livre de................ $15\frac{1}{2}$.

Avec un poids d'une livre & demie de......... $23 +$.

L'on a pris cette même lame, & on l'a fait chauffer jusqu'à ce qu'elle eût pris la couleur violette, & qu'elle fût revenue à la consistance d'un excellent ressort; & l'on a trouvé également, qu'en la chargeant comme la première, l'extrémité B a baissé,

Avec $\frac{1}{2}$ livre de......................... 8 lignes.

Avec 1 livre.............................. $15\frac{1}{2} +$

Avec $1\frac{1}{2}$ livre........................... $23 +$.

Enfin l'on a fait rougir cette même lame à blanc, & on l'a laissé refroidir très-lentement; & l'on a eu, en chargeant l'extrémité B, exactement les mêmes résultats que dans les deux expériences qui précèdent.

Il nous paroît que ces trois expériences prouvent d'une manière incontestable, que dans quelqu'état que se trouve la lame, les premiers degrés de sa force élastique ne sont nullement altérés; puisqu'en tenant compte du bras de lévier, qui diminue à mesure que la lame est chargée, les mêmes poids la fléchissoient dans les trois états également & proportionnellement à la charge; que lorsqu'on ôtoit ces poids, elle reprenoit exactement sa première position horizontale.

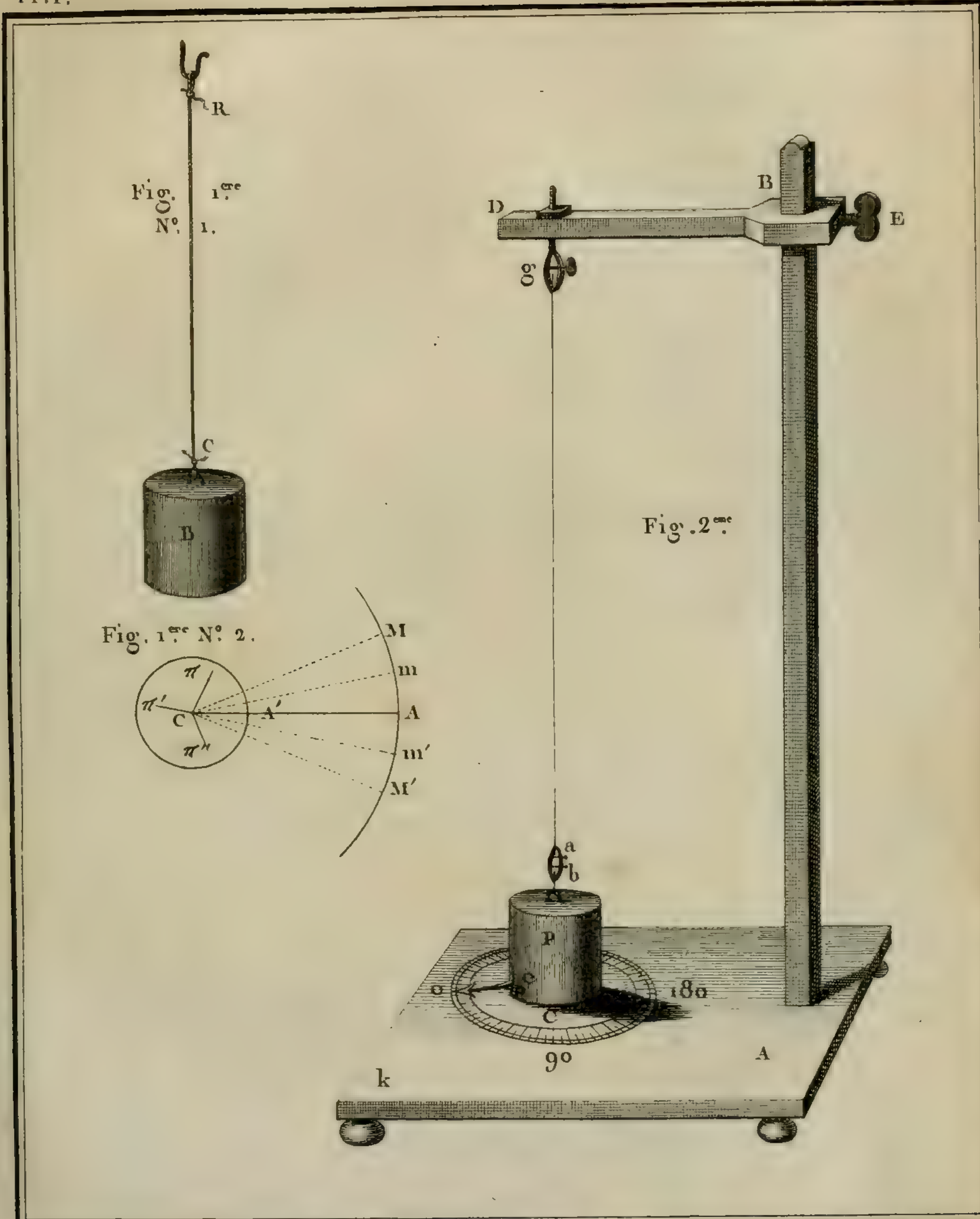
J'ai voulu voir ensuite, quelle étoit la force de cette lame dans ces trois états différens; & dans le cas où le

centre de flexion commenceroit à se déplacer, quel seroit le degré de flexion où la lame commenceroit à être pliée sans revenir à sa première position. Voici le résultat de cette expérience.

J'avois fait tirer d'une planche de tôle d'acier d'Angleterre, trois lames exactement semblables à celle de l'expérience qui précède : une de ces lames avoit été trempée très-roide, la seconde étoit revenue à la consistance d'un excellent ressort, & la troisième avoit été recuite à blanc, & refroidie lentement. J'attachois, *fig. 4*, un peson en *d* à 2 pouces $\frac{1}{2}$ de distance du point *a*, & j'avois soin d'exercer la traction toujours perpendiculairement à la direction de la lame. Voici ce que l'on a observé.

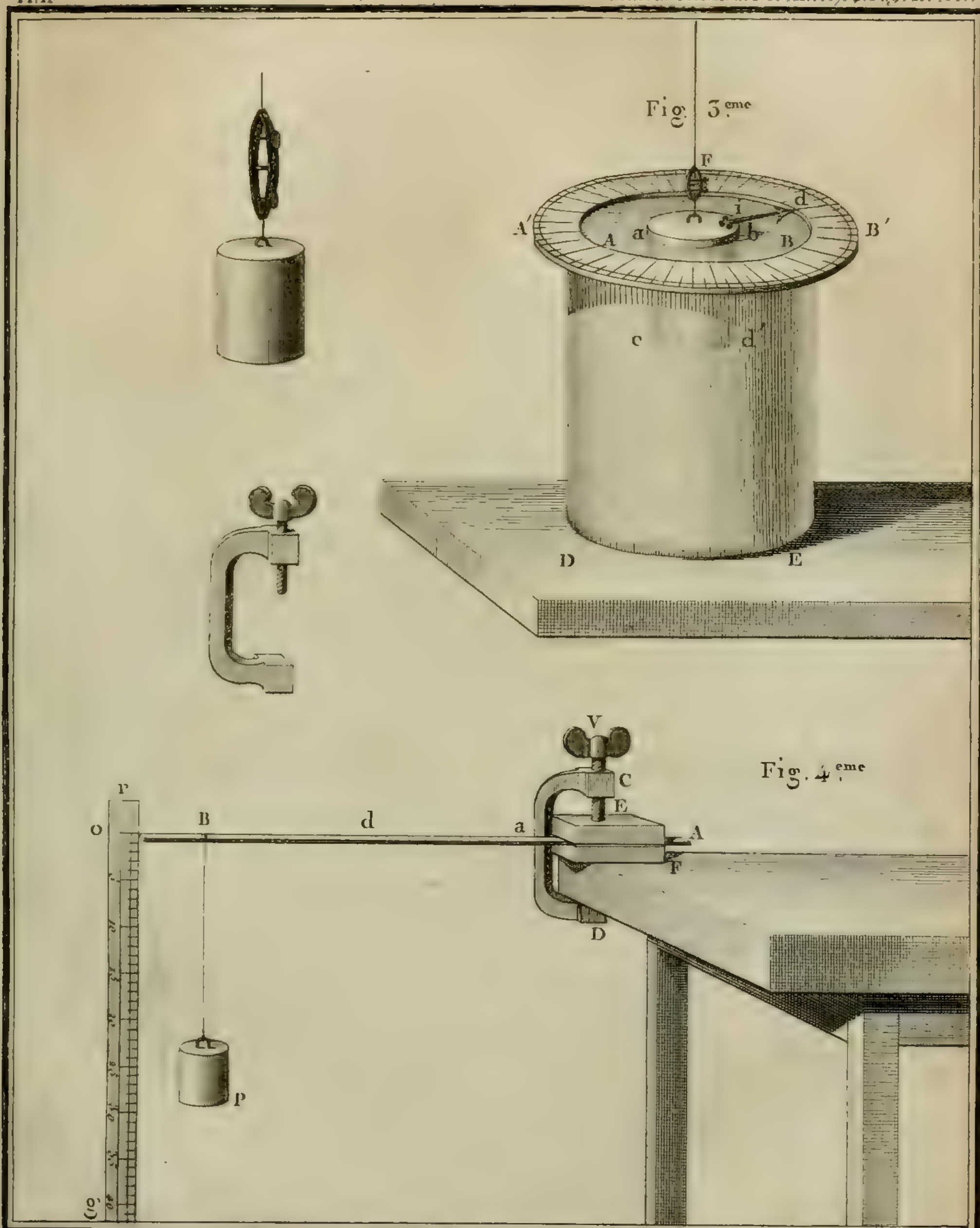
La lame trempée très-roide, se rompoit sous une traction de six livres; mais sous quelqu'angle qu'elle fût fléchie, au-dessous de celui de rupture, elle reprenoit exactement sa première position. La lame revenue couleur violette, formant un excellent ressort, ne se rompoit que sous une traction de dix-huit livres; elle se plioit jusqu'au point de rupture, d'un angle à peu-près proportionnel à l'angle de torsion, & sous quelques angles qu'elle fût fléchie avant celui de rupture, lorsqu'on la lâchoit, elle reprenoit sa première position. La lame recuite à blanc & refroidie lentement, se plioit jusqu'à une traction de cinq à six livres, proportionnellement à cette force de traction, & d'un angle absolument égal sous la même force que dans l'état de trempe & de ressort; mais en tirant ensuite toujours perpendiculairement à la direction de la lame, pour conserver le même lévier, avec une force de sept livres, on la plioit sous tous les angles, sans qu'il fût besoin d'augmenter cette force: en la lâchant, elle se relevoit seulement de la quantité dont elle avoit été primitivement fléchie par une traction de six livres; en sorte que l'angle de réaction de flexion, se trouvoit changé de tout l'angle dont on l'avoit fléchi avec une force plus grande que sept livres.

Mém. de l'Ac. R. des Sc. An. 1784. Pag. 268. Pl. IV.



Fossier del.

Y. le Gouaz sculp.



Fossier del. Y. le Gouaz sculp.

Ces dernières expériences nous ramènent aux mêmes résultats que celles qui ont précédé. Il est clair que pour avoir une idée de ce qui arrive dans la flexion des métaux, il faut distinguer la force élastique des parties intégrantes, de la force d'adhérence qui réunit ces parties entr'elles: la force élastique dépend, comme nous l'avons déjà dit, de la compression ou dilatation que les parties intégrantes éprouvent, & est toujours proportionnelle aux tractions. Ces parties intégrantes ne sont altérées, ni par la trempe ni par le recuit, puisque nous venons de voir que dans ces différens états, l'élasticité est la même sous les mêmes degrés de flexion; mais ces parties intégrantes, ne sont liées entr'elles que par un certain degré d'adhérence qui dépend probablement de leur figure & de la portion respective des différens fluides dont leurs pores sont remplis, ce qui varie suivant la trempe & le recuit. Dans l'acier trempé roide, & dans les bons ressorts, les molécules intégrantes ne peuvent ni glisser l'une sur l'autre, ni éprouver le moindre déplacement, sans que le corps ne se rompe; mais dans les corps ductiles, dans les métaux recuits, ces parties peuvent glisser l'une sur l'autre, & se déplacer, sans que l'adhérence en soit sensiblement altérée.

Ce que nous venons d'expliquer pour les métaux, paroît pouvoir s'appliquer à tous les corps; leurs parties sont toujours d'une parfaite élasticité, mais les corps sont durs, mous ou fluides, suivant l'adhérence de ces parties intégrantes. Si dans les corps durs, elles peuvent glisser l'une sur l'autre, sans que leur distance soit sensiblement altérée, le corps sera ductile ou malléable; mais si elles ne peuvent pas glisser l'une sur l'autre, sans que leur distance respective soit sensiblement altérée, le corps se rompra lorsque la force avec laquelle le corps sera tiré ou comprimé, sera égale à l'adhérence.

OBSERVATIONS SUR LES SCHORLS.

Par M. l'abbé HAÜY.

Lû le 28 Juillet 1784.

ON a donné le nom de *Schorls* à une multitude de ſubſtances très-différentes les unes des autres par leur forme & leur aſpect. La Minéralogie ne fournit aucun caractère extérieur qui puiſſe convenir à toutes ces ſubſtances. Pluſieurs Chimiſtes célèbres, entr'autres M.rs Bergmann & Kirwen, nous ont donné l'analyſe des ſchorls; mais comme ils n'ont point fait connoître par des deſcriptions nettes & préciſes les divers corps ſur leſquels ils ont opéré, on ne peut ſavoir ſi les réſultats de leur analyſe s'étendent à tous les minéraux que l'on a compris ſous le nom de *ſchorls*.

Je me ſuis occupé depuis quelque temps de la ſtructure des criſtaux de ce genre, & quoique je ſois encore éloigné du terme de mon travail, qui exige une longue ſuite de recherches délicates, je crois cependant avoir déjà ſaiſi quelques points fixes pour établir des diſtinctions marquées entre pluſieurs des ſubſtances dont il s'agit. Je me bornerai à en citer ici deux des plus remarquables, ſavoir le ſchorl noir à ſix pans, terminé par des ſommets à trois faces romboïdales; & le ſchorl blanc, qui ſe préſente aſſez communément ſous la forme d'un criſtal à dix pans, terminé par des ſommets à deux faces. Le premier de ces criſtaux ſe diviſe nettement par des ſections parallèles à quatre de ſes pans, dont les inclinaiſons reſpectives ſont de 120d & 60d. Les criſtaux, appelés *ſchorls blancs*, ſe diviſent auſſi parallèlement à quatre de leurs pans, ſous les mêmes angles de 120 — 60d, ce qui ſemble d'abord

rapprocher ces criſtaux du ſchorl noir; mais, 1.° les deux coupes ſont également nettes & brillantes dans ce dernier criſtal, au lieu que dans le ſchorl blanc, l'une des deux réſiſte beaucoup plus que l'autre à l'inſtrument tranchant, & préſente un poli beaucoup plus terne; 2.° on peut faire, dans le criſtal appelé *ſchorl blanc*, des coupes très faciles & d'un poli très-vif, parallèlement à l'une des faces du ſommet, tandis que le ſchorl noir n'admet point de pareilles coupes, ſur quoi je remarquerai que les ſections ne m'ont jamais paru varier dans toutes les ſubſtances d'un même genre dont j'ai examiné la ſtructure, quelque différentes que fuſſent leurs formes.

Ces obſervations m'ont fait préſumer d'abord, que les criſtaux, connus ſous le nom de *ſchorl blanc*, avoient une toute autre ſtructure que les criſtaux de ſchorl noir, d'où il ſuivroit qu'ils ſont auſſi très-vraiſemblablement d'une nature différente. J'ai cherché enſuite s'il n'y avoit point quelque ſubſtance dont la ſtructure eût déjà été expliquée, & à laquelle on pût rapporter les criſtaux dont il s'agit, & j'ai trouvé qu'ils admettoient les mêmes diviſions que les criſtaux de ſpath étincelant, & que leurs formes, dont quelques-unes s'écartent ſenſiblement de celles de ce même ſpath, pouvoient cependant y être ramenées d'après les loix de décroiſſement que j'ai reconnues dans un grand nombre de criſtaux, autant que j'ai pu en juger ſur de petits objets qui n'ont communément qu'une ou deux lignes d'épaiſſeur.

Quant aux autres qualités ſenſibles des criſtaux dont je viens de parler, elles concourent à favoriſer le rapprochement indiqué. Les criſtaux appelés *ſchorls blancs* ont à peu-près la même teinte, la même dureté & le même poli que des fragmens de ſpath étincelant blanchâtre, auxquels je les ai comparés.

Tels ſont les aperçus auxquels m'ont conduit mes premières recherches ſur les ſchorls. Je me propoſe de donner des Mémoires plus détaillés ſur cette matiere, lorſque j'aurai pu me procurer des criſtaux en aſſez grand nombre & d'une forme aſſez prononcée, pour porter dans ce travail la préciſion géométrique, qui ſeule peut imprimer le caractère de la certitude à la nouvelle diſtribution que je propoſe.

MÉMOIRE
SUR LA STRUCTURE DES CRISTAUX DE FELD-SPATH.

Par M. l'Abbé HAÜY.

Lû le 26 Juin 1784.

ON ſait que le Feld-ſpath, ou ſpath étincelant, eſt une des principales parties compoſantes de ces pierres mélangées, connues ſous le nom de *granits*, & répandues ſi abondamment dans la Nature, où l'on croit qu'elles forment le noyau des plus hautes montagnes. Comme ce ſpath ne ſe trouve communément que par fragmens dans le granit, ainſi que dans les porphyres, ſerpentins, &c. on ne lui a reconnu pendant long-temps d'autre forme que celle de ces fragmens dont Vallerius dit qu'ils ſont cubiques ou rhomboïdaux *(a)*, ſans doute parce qu'ils ont des faces rectangles, & d'autres en loſange. Ces figures avoient été remarquées ſur-tout dans les ſerpentins & les ophites travaillés par l'art, où le ſpath forme ſouvent des taches quadrilatères qui tranchent ſur la couleur de la matière enveloppante.

M. Deſmareſt, de cette Académie, parmi pluſieurs productions du règne minéral, inconnues juſqu'alors, qu'il a recueillies dans ſes voyages, rapporta, en 1770, deux variétés très-intéreſſantes du feld-ſpath, dont il avoit trouvé l'une parmi les laves de l'Auvergne, & l'autre dans le Limoſin. M. Deſmareſt a dépoſé au cabinet du Roi un très-beau criſtal de cette dernière variété, qui eſt en priſme à ſix pans; la première variété eſt auſſi priſmatique, mais ſes pans ſont au nombre de dix: l'une &

(a) *Syſtema mineralog.* tom. I, p. 204.

l'autre seront décrites plus au long dans ce Mémoire, comme formes secondaires du feld-spath.

En réunissant les formes dont il s'agit, à celles qui ont été indiquées & décrites par le P. Pini, Professeur d'histoire naturelle à Milan, dans le Mémoire qu'il a publié en 1779, on a l'une des plus nombreuses suites de variétés qui ait été encore observée dans les cristaux d'un même genre. Pour ne point m'engager dans un détail superflu, je réduis toutes les formes du feld-spath, à trois principales, je veux dire celle qui est en prisme à quatre pans, & les deux qui ont été découvertes par M. Desmarest. Il sera aisé, avec un peu d'observation & d'habitude, de ramener les autres à ces deux dernières, dont elles ne s'écartent souvent que par des dimensions respectives différentes, qui font anticiper quelques-unes des faces sur les voisines, & diversifient l'aspect de certains cristaux que l'on reconnoît, par un examen plus approfondi, pour avoir été travaillés en quelque sorte sur un modèle commun.

Outre que les cristaux de feld-spath méritent déjà de fixer l'attention des Naturalistes, pour cette seule raison qu'ils appartiennent à l'une des substances les plus intéressantes du règne minéral, j'ai été encore excité à faire part à l'Académie de mon travail sur cet objet, par les nouvelles preuves qu'il m'a paru fournir des principes que j'ai exposés dans l'essai d'une théorie sur la structure des cristaux, publié vers la fin de l'année 1783.

Je n'ai pas encore vu le feld-spath sous sa forme primitive simple & dégagée de toutes facettes accidentelles. Cette forme seroit celle d'un prisme quadrilatère dont les pans seroient, par leurs inclinaisons respectives, des angles de 120^d — 60^d, & dont les bases seroient perpendiculaires sur deux pans opposés du prisme, & inclinées sur les deux autres pans, de $111^d 29' 30''$, d'une part; & de $68^d 30' 30''$, de l'autre, ainsi que je le prouverai plus bas.

FORMES SECONDAIRES.

Feld-ſpath en priſme oblique, quadrangulaire & rectangle.

Développement. Deux rectangles ſitués aux deux baſes du priſme; deux nouveaux rectangles, formant deux des pans oppoſés du même priſme; deux parallélogrammes obliquangles *MRKL (fig. 1)*, qui en forment les deux autres pans.

Angles des parallélogrammes obliquangles;

$$RML = LKR = 115^d\ 0'\ 8'',$$
$$MRK = MLK = 64^d\ 59'\ 52''.$$

Les priſmes que je viens de décrire, ſe diviſent; 1.° parallèlement à leurs baſes & à ceux de leurs pans qui ſont des rhombes alongés; 2.° parallèlement à deux plans qui feroient avec ces rhombes, des angles de 120^d — 60^d: ces dernières ſections ſont beaucoup plus difficiles à obtenir que les quatre autres, & préſentent un poli beaucoup plus terne & plus mat. Nous verrons bientôt les conſéquences qui réſultent de cette obſervation, relativement aux dimenſions reſpectives des faces de la molécule conſtituante.

Quant à la loi de décroiſſement, qui a lieu dans ce criſtal, il ſera aiſé de la déterminer d'après la ſtructure des variétés ſuivantes.

Feld-ſpath à 10 pans, avec des ſommets à deux faces & deux facettes (b). Fig. 3.

Développement. Deux hexagones irréguliers, tels que *girkme;* quatre trapèzes, *oirn, edqm*, &c. diſpoſés des deux côtés des hexagones *girkme,* de manière que leurs

(b) Je ſupprime ici, pour ne point trop compliquer la deſcription du criſtal, deux autres facettes, que l'on obſerve très-ſouvent à la place des angles ſolides *e, z:* je reviendrai dans la ſuite ſur ces facettes.

angles, reſpectivement égaux, ſont tournés en ſens contraire; quatre autres trapèzes *sonp, dxlq*, &c. diſpoſés pareillement dans des ſituations renverſées; deux pentagones, tels que *zasoc*, ſitués chacun à l'un des ſommets du criſtal & parallèles entr'eux; deux ennéagones, tels que *zbfhxdegc*, formant les facettes en biſeau des ſommets.

Angles de l'hexagone *girkme*, *ige* = *rkm* = 99^d.41'.8".*rig* = *kme* = 115^d.0'.8".*kri* = *gem* = 145^d.18'.44".

Angles des trapèzes *oirn*, *edqm*.*ion* ou *dgm* = 81^d.35' 32".*oir* ou *emq* = 98^d.24' 28".*irn* ou *dem* = 38^d.37'.58".*onr* ou *edq* = 141^d.22'.2".

Angles des trapèzes *sonp*, *dxlq*.*son* ou *dql* = 76^d.52'.28".*osp* ou *xlq* = 103^d.7' 32" *onp* ou *xdq* = 54^d.9' 22".*nps* ou *dxl*.125^d.50' 38".

Angles du pentagone *zasoc*. *aso* = 115^d.0'.8" .*saz* = *soe* 122^d.29' 56".*azc* = *ocz* = 90^d.

Angles de l'ennéagone *zbfhxdegc*. *dxh* = 89^d.10' 32".*edx* = *fhx* = *ged* = *bfh* = 157^d.42'.22" *cge* = *zbf* = 135^d.24'.42".*gcz* = *bzc* = 134^d 35'.18"..

Angles des trapèzes *coig*. *cgi* = 83^d.7' 3".*gio* = 135^d.36'.45".*coi* = 44^d.23'.15".*gco* = 96^d.52'.57".

Les criſtaux de cette forme ſe diviſent parallèlement aux hexagones *girkme*, aux pentagones *zasoc*, & aux trapèzes *dxlq*: ces dernières diviſions ſont les moins nettes. On voit par-là ce qu'il y auroit à faire pour mettre à découvert le noyau priſmatique qui repréſente la forme primitive. Je ne m'arrêterai point ici à décrire la ſtructure des différentes lames que l'on détache à l'aide des ſections indiquées. Il ſera aiſé, d'après ce que je dirai dans la ſuite,

de concevoir que chacune de ces lames n'eſt qu'un aſſemblage de molécules conſtituantes parfaitement ſemblables entr'elles, comme cela a lieu pour tous les autres criſtaux dont j'ai expoſé la ſtructure dans l'ouvrage cité.

Cherchons maintenant les dimenſions reſpectives des molécules & les loix de décroiſſement qu'elles ſubiſſent dans les lames appliquées ſur le noyau. Les plans des hexagones *igcmkr*, & ceux des trapèzes *dxlq*, *fonp*, &c. étant cenſés prolongés juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent, forment une eſpèce de priſme hexagone, dans lequel tous les pans adjacens ont leurs inclinaiſons reſpectives égales entr'elles. De plus, les pans *oirn*, *edqm*, &c. ſont avec les pans voiſins, des angles pareillement égaux de part & d'autre. Cela poſé, ſoit *acdgefmymno* (*fig. 4*), la coupe horizontale géométrique du priſme. Les angles *oac*, *yfe*, & ceux qui ſont formés par *ac*, avec *dg*, par *ao*, avec *nm*, &c. étant tous ſenſiblement égaux entr'eux, auront chacun pour meſure 120 degrés: de plus, puiſque l'on a *acd* = *dge* = *gef*, &c. chacun de ces derniers angles ſera de 150 degrés. D'après ces données, la ſuppoſition la plus naturelle & qui m'a paru la plus propre à expliquer, par des loix regulières de décroiſſement, les poſitions des diverſes faces du criſtal, & en même-temps à rendre raiſon de la différence de poli entre les coupes que l'on peut y faire, eſt celle où le grand côté *su* du rhombe alongé *krus*, eſt double du petit côté *ru*. Dans cette hypothèſe, la poſition des côtés *ca*, *fy*, réſulte d'une loi de décroiſſement par deux rangées de molécules en allant de *f* vers *B*, & de *a* vers *C*; celle des côtés *on*, *ge*, eſt donnée par une ſemblable loi; celle des côtés *cd*, *my*, réſulte d'une loi de décroiſſement double de la précédente, c'eſt-à-dire, par quatre rangées de molécules (*c*). Enfin les côtés

(*c*) J'ai remarqué en général, que ces décroiſſemens moins communs, ſe faiſoient le plus ſouvent ſur les faces latérales des criſtaux: mais le rapport que j'ai adopté ici entre *su* & *ru*, donne

ao, mn, fe, dg, étant parallèles aux faces mêmes des molécules, ne ſont ſujets à aucune loi de décroiſſement. On voit par-là, que tout eſt parfaitement ſemblable dans les parties du criſtal, ſituées ſur les parallélogrammes *fBAa* d'une part, & *fDCa* de l'autre, quoique les décroiſſemens qui donnent les côtés correſpondans entr'eux ſe faſſent ſuivant des loix différentes. L'uniformité qui en réſulte, eſt une ſuite des propriétés des angles de $120^{d'}$ & $60^{d'}$ *(d)*..

En effet, dans le triangle *acp*, nous avons $cap = 60^d$ r.$cp = pa$; d'où il ſuit, que $acp = 60$ degrés: d'ailleurs, on a auſſi $pcx = 60^d$, & $dcx = 30^d$, à cauſe de $cx = 2xd$; donc, l'angle *acd* ſera de $60^d + 60^d + 30^d = 150^d$. On trouvera de même, que les angles *aon, nmy, fym, feg* ſont de 150 degrés, & que les angles *oac, yfe* ſont de 120 degrés, comme les donne l'obſervation.

Il ſuit de-là, que l'épaiſſeur *rc* d'une des molécules, eſt à ſa largeur *ru*, dans le rapport de $\sqrt{(3)}$ à 1, ou de 3 à $\sqrt{(3)}$. Suppoſons que la *figure 2* repréſente cette molécule qu'il faut concevoir ſituée par rapport au criſtal, *fig. 3*, de manière que *GOBR* ſoit parallèle à *zasoc*, *GOAD* parallèle à *igemkr*, & *BOAH* parallèle à *dxlq*; ayant mené les lignes *Gp, pL, CS*, perpendiculaires, l'une ſur *OA*, l'autre ſur *BH*, & la troiſième ſur *GO*, on aura, ſuivant ce qui vient d'être dit, $GP = \sqrt{(3)}$, $CS = 3$, & $PL = 2\sqrt{(3)}$.

Cherchons maintenant la valeur de *CA*, hauteur du parallélogramme *GOAD*. J'ai obſervé que l'angle formé

pour toutes les faces des ſommets, dans les différentes variétés du feld-ſpath, des loix ordinaires de décroiſſement., par une & par deux rangées de molécules.

(*d*) Dans le criſtal de la première variété, la poſition des faces inclinées par rapport aux baſes du priſme, eſt indiquée par la ligne *oc*, perpendiculaire ſur *oy*; d'où l'on conclura aiſément que les décroiſſemens qui donnent ces mêmes faces, ſe font par une rangée de molécules.

par le pentagone *zasoc (fig. 3)* avec le trapèze *coig*, étoit ſenſiblement égal à celui que forme ce même trapèze avec le plan de l'hexagone *girkme*. Suppoſons que les décroiſſemens qui donnent le trapèze *coig*, ſe faſſent par des ſouſtractions d'une ſimple rangée de molécules (nous verrons bientôt cette hypothèſe ſe vérifier par l'accord des calculs avec l'obſervation) : d'après l'égalité des angles cités, il eſt facile de voir que l'on aura la hauteur *CA* du rhombe *GOAD (fig. 2)* égale à la hauteur *CS* du rhombe *GOBR*; donc $CA = 3$.

Il faudroit maintenant connoître un des angles du rhombe *GOAD*, d'où l'on déduiroit tous les autres angles-plans de la molécule conſtituante, ainſi que ceux du criſtal, *fig. 3*. Soit *OGD* l'angle qu'il s'agit de déterminer: cet angle eſt le même que *rig (fig. 3)*; or, d'après les meſures priſes ſur le criſtal, l'angle *rig* eſt ſenſiblement égal à l'angle *osa (fig. 5)* au ſommet du pentagone *zasoc*. Concevons que *aso (fig. 5)* ſoit le même triangle iſocèle que l'on auroit, en faiſant paſſer une droite par les points *a*, *o*, *(fig. 3)*. Le priſme du criſtal étant ſuppoſé dans une ſituation verticale, imaginons un ſecond plan triangulaire iſocèle, dont le ſommet ſoit en *s*, & qui s'abaiſſe au-deſſous du plan *aso*, en prenant une poſition horizontale; ſoit *tsu (fig. 5)* ce dernier plan, dans lequel il faut concevoir *tu* égale à la baſe *ao* du triangle *aso*. Menons les hauteurs *ſy*, *ſk* des deux triangles; menons auſſi *ky*: il eſt aiſé de voir que l'angle *ſyk* eſt égal au ſupplément de *gir (fig. 3)*; donc, cet angle ſera auſſi le ſupplément de *aso (fig. 5)*; donc, ayant prolongé *as* indéfiniment, & mené la perpendiculaire *on*, on aura $syk = osn$: d'ailleurs, les deux triangles *sky*, *son* ſont rectangles; donc, ils ſont ſemblables. Remarquons maintenant que l'angle *ust* étant égal à celui que forment ſur le priſme de la *figure 3*, les pans qui donnent l'hexagone régulier, on a $ns = 2sk$; d'où l'on tire $sk = ku\sqrt{(\frac{1}{3})}$.

Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables *ksy*, *son*,

on a $on : os :: sk : sy$, ou bien $on : os :: ku\sqrt{(\frac{1}{3})} : sy :: \frac{1}{3} ao \sqrt{(\frac{1}{2})} : sy$. De plus, $os = \sqrt{[(on)^2 + (ns)^2]}$; ſubſtituant, & élevant tout au carré, $(on)^2 : (on)^2 + (ns)^2 :: (\frac{1}{12}) . (ao)^2 : (sy)^2$.

D'ailleurs, $(ns)^2 = (os)^2 - (on)^2$: donc, $(on)^2 : (os)^2 :: \frac{1}{12} (ao)^2 : (sy)^2$. Maintenant, $on \times os = sy \times ao$; donc, $(on)^2 = \frac{(sy)^2 \times (ao)^2}{(os)^2}$: ſubſtituant, la proportion deviendra $\frac{(sy)^2 \times (ao)^2}{(os)^2} : os :: \frac{1}{12} (ao)^2 : sy^2$; d'où l'on tire $sy = os \sqrt[4]{(\frac{1}{12})}$.

Maintenant, ſi l'on prend pour le rayon r la ligne os, alors sy ſera le ſinus de l'angle soy; donc log. ſin. soy $=$ log. r $+$ $\frac{1}{4}$. log. $\frac{1}{12}$ $=$ 97302047, qui répond à $32^d . 29' . 56''$; donc, puiſque le triangle aos eſt iſocèle, on aura $aso = 115^d . 0' \; 8''$. Cette valeur ſera auſſi celle de l'angle OGD (*fig.* 2), & l'une & l'autre ſe trouvent confirmées par les meſures priſes ſur le criſtal.

D'après ces données, il ſera facile de trouver le développement de la molécule conſtituante, & l'on aura $OGD = 115^d . 0' \; 8''$. $GOA = 64^d . 59' \; 52''$. $GOB = 122^d . 29' \; 56''$. $OBR = 57^d . 30' \; 4''$ $BOA = 103^d . 7' \; 32''$. $OBH = 76^d . 52' \; 28''$.

Quant aux dimenſions reſpectives des faces de la même molécule, nous avons $GOAD = GO \times AC = GO \times 3$. $RBOG = GO \times CS = GO \times 3$, c'eſt-à-dire, que les deux faces dont il s'agit, ſont parfaitement égales. De plus, $GOAD = AO \times GP = AO \times \sqrt{(3)}$, & $BOAH = AO \times PL = AO \times 2\sqrt{(3)}$; d'où il ſuit que la face $BOAH$ eſt double de chacune des deux autres, ce qui explique la différence des coupes que l'on fait dans le criſtal, parmi leſquelles celles qui répondent aux deux faces égales des molécules ſont nettes & d'un beau poli, tandis que celles qui ſe font parallèlement à la plus grande face n'offrent qu'un poli terne & mat, ainſi que je l'ai dit plus haut, parce que les molécules adhèrent

adhèrent entr'elles de ce côté par un plus grand nombre des points.

Maintenant, ayant mené OK, OT, perpendiculaires sur BO, imaginons un plan coupant qui passe par ces deux lignes ; ce plan interceptera, sur la face de la molécule, un parallélogramme obliquangle, dont OK, OT seront deux côtés. Il faut prouver que OK est double de OT.

$AC \times GO = GP \times AO$; or, $AC = 3.GP = \sqrt{(3)}$; donc, $3\,GO = \sqrt{(3)}AO$; donc, $GO : AO :: \sqrt{(3)} : 3$: d'ailleurs $CS = 3.PL = 2\sqrt{(3)}$: donc, $GO \times CS : AO \times PL :: 3.\sqrt{(3)} : 3.2\sqrt{(3)}$: donc, $AO \times PL = 2\,GO \times CS$; donc, aussi $OK \times BO = 2\,OT \times BO$; donc, $OK = 2\,OT$. Cette propriété nous sera nécessaire dans la suite.

Un plan coupant qui passeroit par GPL, intercepteroit un autre parallélogramme obliquangle, dont le grand côté seroit pareillement double du petit côté ; mais si l'on faisoit passer un troisième plan coupant par ACS, on auroit un carré.

Cherchons maintenant la loi des décroissemens qui donnent l'ennéagone $zbfhxdegc$ (*fig. 3*). Soit $girkme$ (*fig. 6*) le même hexagone que celui de la *fig. 3*, l'angle ige représentera celui que forme le pentagone $zasoc$ (*fig. 3*), par son inclinaison sur l'ennéagone $zbfhxdegc$. Or, l'arête cz étant perpendiculaire sur co & za, il est aisé de voir que les décroissemens se font parallèlement à ro, uz (*fig. 4*), c'est-à-dire, sur les angles des lames composantes. Soit gof (*fig. 6*) le triangle mensurateur ; la ligne gf est plus inclinée sur gk, que ne l'est celle qui fait la même fonction dans un autre variété que nous considérerons plus bas, ce qui annonce des décroissemens par une seule rangée de molécules pour le cristal de la *fig. 3*, & par deux rangées pour l'autre cristal. Dans le triangle fgo, nous avons $go = OA$ (*fig. 2*), & par la supposition, $of = DA$ ou GO. Or, à cause des triangles semblables GOP, CAO; $OA : GO :: CA : GP :: 3 : \sqrt{(3)}$;

donc nous pouvons faire *go (fig. 6)* = 3,0000, & *of* = $\sqrt{(3)}$ = 1,7320. De plus, l'angle *gof* eſt de 64$^{d'}$ 59′ 52″, comme on l'a vu plus haut. D'après ces données, on trouve, pour la valeur de l'angle *ogf*, 34$^{d'}$.41′ 16″; partant, l'angle *igf* qui meſure l'inclinaiſon reſpective de deux faces de chaque ſommet, eſt de 64$^{d'}$. 59′ 52″ + 34$^{d'}$ 41′ 16″ = 99$^{d'}$.41′ 8″, ce qui s'accorde avec l'obſervation.

J'ai dit que les deux angles ſolides, *c*, *z (fig. 3)*, étoient ſouvent remplacés par des facettes, dont une eſt repréſentée par le quadrilatère $\mu\varphi\xi\delta$ *(fig. 7)*. Pour expliquer cette facette, j'obſerve d'abord que la ligne $\mu\varphi$ eſt parallèle au côté *ſa*; or, ce côté étant dans le ſens d'une des diviſions que l'on peut opérer dans le criſtal, il s'enſuit que la facette dont il s'agit, réſulte d'une loi de décroiſſemens ſur les bords des lames compoſantes. Reprenons le priſme de la *fig. 2*, qui repréſente une des molécules conſtituantes. Le parallélogramme *GOBR* eſt cenſé être ſitué parallèlement à la face *zaſoc* du criſtal, *fig. 3*. & le parallélogramme *BOAH* eſt parallèle au pan *dxlq*. De plus, l'angle *TOK* meſure l'inclinaiſon de *GOBR* ſur *BOAH*. Soit *TOKM (fig. 10)*, le parallèlogramme formé par les ſections d'un plan coupant qui paſſeroit par *TO*, *OK*, *fig. 2*. En faiſant uſage des données indiquées ci-deſſus, on trouvera l'angle *TOK* de 68$^{d'}$.30′ 30″. Suppoſons maintenant que les décroiſſemens qui donnent la facette dont il s'agit, ſe faſſent par des ſouſtractions de deux rangées de molécules. Soit *tmz (fig. 8)* le triangle menſurateur dans lequel on aura *tm* = *TM (fig. 10)*, *tmz* = *TMK* = 68$^{d'}$.30′.30″, & par la ſuppoſition *mz* = 2*MK* = *TM*, comme je l'ai prouvé plus haut; donc l'angle *mzt*, ou ſon égal *mtz*, ſera de 55$^{d'}$.44′ 45″. Ajoutant à cet angle la valeur de *TOK (fig. 10)* = 68$^{d'}$.30′ 30″, on a l'angle total de 124$^{d'}$.15′ 15″ pour la meſure de l'inclinaiſon que forme la facette $\mu\varphi\xi\delta$ *(fig. 7)*, ſur le plan *zaſo*μ, ce que confirme l'obſervation.

Quant à l'autre facette qui remplace l'angle solide z, quoiqu'elle soit différemment située par rapport aux molécules intégrantes, elle a cependant, à l'égard du cristal entier, la même position que la facette $\mu\varphi\xi\delta$, à laquelle elle est tout-à-fait semblable. Pour le concevoir, observons que les décroissemens qui donnent la facette $\mu\varphi\xi\delta$, étant apportés au plan horizontal *DCAB (fig. 4)*, se font parallèlement à des lignes *ao*, *it*, *p*ω, qui interceptent entr'elles deux rangées de molécules. Maintenant, si l'on mène *bz* parallèle à *ca*, la portion *cbza* de l'assortiment de rhombes, comprise entre ces deux lignes, sera égale & semblable aux parties *iaot*, *pit*ω, renfermées entre les lignes qui mesurent les décroissemens relatifs à la facette $\mu\varphi\xi\delta$ *(fig. 7)*: d'où l'on conclura que la facette correspondante résulte d'un décroissement sur les angles des lames composantes, qui se fait parallèlement à *ca (fig. 4)*, par des soustractions de deux rangées de molécules, & de plus que cette facette a la même inclinaison que l'autre. Je me borne ici à donner la position des facettes dont il s'agit; je m'abstiendrai aussi de donner le calcul des angles plans du cristal. Ceux qui voudront vérifier les valeurs de ces angles, indiquées ci-dessus dans le développement, trouveront toutes les données nécessaires, parmi celles qui m'ont servi à déterminer les loix de décroissement auxquelles est assujettie la structure du même cristal.

Feld-spath à 6 pans, avec des sommets à deux faces (fig. 9.).

Développement. Deux hexagones irréguliers *octqfh;* quatre trapèzes *osgh*, *trlq*, disposés des deux côtés de chaque hexagone; deux pentagones *zasoc*, formant chacun l'une des faces situées au sommet du prisme; deux autres pentagones *zertc*, formant chacun l'autre face du sommet correspondant.

Angles de l'hexagone *octgfh*. *oct* = *hfq* = 128$^{d'}$

55'.40". *coh* = *fqt* = 115^{d}.0' 8". *ohf*. = *ctq* = 116^{d}.4' 12".

Angles du trapèze *ſohg*. *oſg* = 103 .7' 32". *ſoh* = 76^{d}.52'.28". *ohg* = 76^{d}.15'.17". *ſgh* = 103^{d}.44' 43".

Angles du pentagone *zaſoc*. *aſo* = 115^{d}.0' 8". *ſaz* = *ſoc* = 122^{d}.29' 56". *azc* = *ocz* = 90^{d}.

Angles du pentagone *zertc*. *ert* = 114^{d}.32' 30". *zer* = *ctr*. 122^{d}.43' 45". *ezc* = *tcz* = 90^{d} *(e)*.

Il eſt facile de ſe former une juſte idée de ce criſtal, en le comparant avec celui de la *fig. 3*, qui eſt l'objet de l'*article précédent*. Suppoſons que dans ce dernier criſtal, les biſeaux *coig*, *zavb*, &c. ſe trouvent ſupprimés, ainſi que les trapèzes *oirn*, *edqm*, & les deux qui leur correſpondent dans la partie oppoſée. On aura un ſolide à 6 pans, terminé par des ſommets à deux faces pentagones. Concevons de plus que le pentagone qui remplace l'ennéagone

---

(e) Les angles du trapèze *trlq* ſont diſpoſés dans une ſituation renverſée par rapport à ceux du trapèze *ſohg*, comme cela a lieu pour le criſtal de la *figure 3*, c'eſt-à-dire, par exemple, que l'angle ſupérieur *o* du trapèze *ſohg* eſt égal à l'angle inférieur *q* du trapèze *trlq*. On voit ici que les angles *c*, *h*, ſur la baſe de l'un quelconque des trapèzes dont il s'agit, ne diffèrent guère entr'eux de plus d'un demi-degré: il en eſt de même de quelques autres des angles cités, entre leſquels il ſe trouve des différences ſi légères, qu'il ſeroit difficile de les ſaiſir à l'aide d'un inſtrument; en ſorte qu'il ſemble qu'on auroit pu regarder ces angles comme égaux, & prendre les égalités pour données, ce qui ne laiſſeroit plus ſubſiſter les autres égalités que j'ai adoptées plus haut, comme baſe des calculs. Mais celles-ci m'ont paru s'accorder plus rigoureuſement avec la meſure des autres angles du criſtal, & d'ailleurs nous avons vu qu'une partie de ces égalités conduiſoit à déterminer des étendues égales, relativement à deux des faces de la molécule conſtituante, & une étendue double pour la troiſième; ce qui fournit une raiſon de préférer les égalités dont il s'agit, à celles qui ne ſont relatives qu'à des quantités ſecondaires, telles que des meſures d'angles qu'une nouvelle loi de décroiſſement peut faire varier.

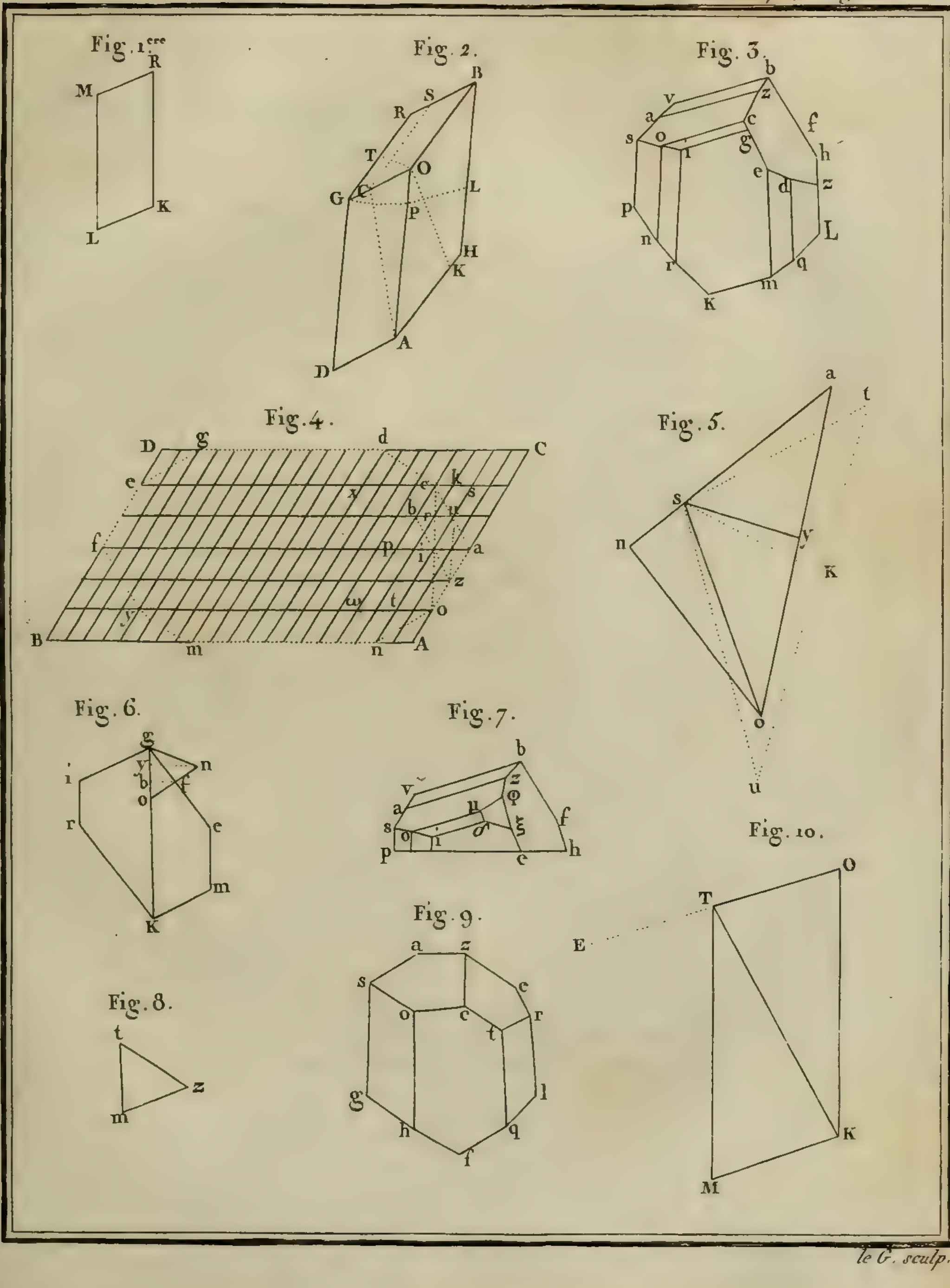
bzcgedxhf, ſoit moins incliné ſur le pentagone adjacent que dans le cas préſent, en ſorte que les décroiſſemens qui donnent le pentagone dont il s'agit, ſe faſſent par deux rangées de molécules, au lieu de ſe faire par une rangée ſeulement; le criſtal qui réſultera de cette modification de ſtructure, ſera parfaitement ſemblable à celui de la *figure 9*.

Il n'y a donc ici autre choſe à faire que de chercher l'inclinaiſon reſpective des deux pentagones *zaſoc*, *zertc*, d'après la loi de décroiſſement indiquée. Soit *ogn* (*fig. 6*) le triangle menſurateur dans lequel nous aurons toujours $go = 3{,}000$. Quant à la ligne *on*, qui meſure la loi des décroiſſemens, elle ſera double de *of*, c'eſt-à-dire, que $on = 2\sqrt{(3)} = 3{,}4640$: d'ailleurs l'angle *gon* $= 64^{d}.\ 59'\ 52''$. Le triangle *ogn*, réſolu d'après ces valeurs, donne pour la meſure de l'angle *ogn*, $63^{d}.\ 55'\ 48''$, & par conſéquent l'angle *ign*, qui meſure l'inclinaiſon des deux faces du ſommet, dans le criſtal dont il s'agit ici, eſt de $64^{d}.\ 59'.\ 52'' + 63^{d}\ 55'\ 48'' = 128^{d}\ 55'\ 40''$, conformément à l'obſervation.

Il y a des criſtaux dans leſquels la partie du pentagone *zertc*, ſituée vers ſon extrémité *r*, eſt remplacée par un triangle qui a préciſément la même inclinaiſon que l'ennéagone *zbfhxdegc* (*fig. 3*). Cette modification qui réunit les deux loix de décroiſſement obſervées dans les criſtaux de forme ſecondaire que nous venons de conſidérer, eſt une des plus intéreſſantes que j'aie rencontrée, parmi les variétés nombreuſes que nous offre le feld-ſpath (*f*).

(*f*) *Nota.* J'ai dit, vers le commencement de ce Mémoire, que les coupes parallèles à *BOAH* (*fig. 2*) étoient très-difficiles à obtenir: on feroit même tenté de croire, d'après l'aſpect de quelques fragmens qui ſe détachent des feld-ſpaths de certains granits, que la face *BOAH* eſt perpendiculaire ſur *GOAD*, & j'ai été moi-même quelque temps dans cette opinion. Mais

ayant depuis répété mes épreuves un grand nombre de fois ſur des criſtaux qui avoient un certain degré de pureté, j'y ai obſervé des lames continues, & qui avoient un poli aſſez ſenſible, ſituées de la même manière que je l'ai indiqué dans l'explication de la *figure 2.* Au reſte, les formes des criſtaux du feld-ſpath ont cette propriété particulière, que la molécule dans laquelle les faces *BOAH, GOAD*, ſeroient perpendiculaires l'une ſur l'autre, ſatisfait elle-même à la théorie; & ſi l'on ſe donne la peine d'en faire le calcul, on trouvera que les criſtaux ſecondaires ſe déduiſent de cette forme, par des loix ſimples & régulières de décroiſſement: mais l'obſervation détermine ici notre choix entre les deux formes dont il s'agit.



le G. sculp.

MÉMOIRE SUR L'EFFET DE L'AIR INFLAMMABLE SUR LES CORPS ORGANISÉS.

Par M. SAGE.

Lû le 24 Mars 1784.

On favoit que l'air inflammable n'étoit point propre à entretenir la vie des animaux, mais on ignoroit qu'il eût la propriété de détruire & de diffoudre le tiffu animal. C'eft à M. Charles que je dois la connoiffance de ce fait : ce Phyficien ayant mis des grenouilles dans des flacons remplis d'air inflammable, elles y perdirent promptement la vie, & au bout de quinze jours ou trois femaines, il les trouva réfoutes en un fluide d'un gris-rougeâtre. Les parties cartilagineufes avoient auffi été détruites, puifque les os étoient tous féparés, comme on peut le reconnoître en regardant le flacon que je mets fous les yeux de l'Académie.

Defirant répéter l'expérience de M. Charles, j'ai mis une grenouille dans un flacon rempli d'air inflammable, le 15 Février de cette année; elle s'eft tuméfiée, & il en fortit une liqueur fanguinolente dont la quantité augmente tous les jours. Si la diffolution de cette grenouille eft beaucoup plus lente que celle de M. Charles, c'eft qu'il a fait fes expériences dans le mois de Juillet.

M. Charles a reconnu que des grenouilles mifes dans des flacons remplis d'air nitreux, d'acide méphitique & d'air déphlogiftiqué, y périffoient, mais confervoient leur forme fans fe réfoudre en fluide.

La diffolution des corps organifés, par le moyen de l'air inflammable, fervira peut-être à faire connoître d'où proviennent les maladies dont on eft attaqué, lorfqu'on habite des pays marécageux, dans des temps chauds.

Je terminerai cette obſervation en haſardant une conjecture ſur le mécaniſme de la digeſtion. Nous avalons, avec les ſubſtances qui nous ſervent d'aliment, une grande quantité d'air atmoſphérique qui ſe décompoſe dans l'eſtomac; l'air déphlogiſtiqué, qui en eſt principe, s'y convertiroit-il en air inflammable, ou modifieroit-il en air inflammable une portion de la matière huileuſe, principe des alimens? dans ce cas, l'air inflammable diſſolvant les viandes & les alimens, ne les rend-il point propres à ſe convertir en chyle?

EXPÉRIENCES

Qui font connoître la néceſſité d'employer une grande quantité de Plomb pour extraire l'Argent contenu dans des terres.

Par M. SAGE.

Lû le 20 Nov. 1784.

DE toutes les opérations métallurgiques, ce ſont celles qui ont pour but l'extraction de l'or ou de l'argent, auxquelles on a porté le plus d'attention, à cauſe de la valeur de ces métaux. Ayant préſidé à une fonte qui a rendu pour quatre cents mille livres d'argent mêlé d'or, on fut obligé de faire uſage de beaucoup de creuſets de Paris, & d'autres de plombagine. Le nitre qui fut employé pour accélérer la fuſion du brûlé, détruiſoit promptement ces creuſets qui retenoient dans leurs pores des grenailles de fin ; pour les extraire, on commença par pulvériſer & laver ces creuſets, enſuite on les paſſa au mercure, il reſta environ dix quintaux de cendrées; les ayant eſſayées, je trouvai qu'elles contenoient encore ſix marcs d'argent par quintal, tandis qu'après avoir paſſé au mercure, elles ne retiennent ordinairement guère plus d'une once de fin.

Ceux qui font métier de fondre ces cendrées, n'ayant offert que deux ou trois louis de ces dix quintaux de cendrées, qui contenoient, d'après mes eſſais, environ pour mille écus d'argent mêlé d'or, je me déterminai à les traiter par la ſcorification & la coupellation.

Pour ſcorifier ces cendrées, j'en fis mêler dix quintaux avec quinze cents livres de chaux de plomb, huit cents livres de ſcories vitreuſes, & cinquante livres de chaux éteinte : je fis fondre ces trois mille cinq cents livres de matière dans un fourneau à manche, qui avoit ſix pieds de haut, huit pouces de large & dix-huit de long. Ce

mélange fut fondu en cinquante heures, & produisit six cents livres de plomb d'œuvre; il y a, comme on voit, plus de moitié de plomb de perdu, dont une partie s'est exhalée pendant la fonte, sous forme de massicot, l'autre s'est combinée avec les terres des creusets, & a déterminé leur vitrification.

Les six cents livres de plomb ayant été coupellées au fourneau allemand, rendirent quarante-huit marcs d'argent; mais ce produit n'étant pas relatif à celui que j'avois obtenu des cendrées, je m'assurai par l'essai, de la quantité de fin que contenoient les scories vitreuses, & je reconnus qu'elles produisoient quatre onces d'argent par quintal.

Les trois mille six cents livres du mélange de la première scorification, m'ayant fourni vingt quintaux de scories, je les fis mêler avec trois cents livres de litharge & quatre cents livres de crasse de plomb; cette seconde scorification fut faite en vingt-quatre heures, & produisit quatre cents livres de plomb d'œuvre : les scories étoient à l'état de verre verdâtre, semblable à celui des bouteilles de Sève.

Ces quatre cents livres de plomb ayant été coupellées, rendirent neuf marcs quatre onces d'argent : ces deux quantités réunies offrent un produit net, conforme à l'essai des cendrées.

Il résulte de ces expériences & de celles que j'ai faites en petit, qu'il faut au moins trois parties de chaux de plomb pour enlever l'argent qui se trouve mêlé avec une partie de terre.

Je dois prévenir qu'il faut préférer dans la scorification, la litharge à la crasse des plombiers, qui est une chaux de plomb souvent mêlée d'étain. Lorsque ce dernier métal se trouve avec le plomb, dans la proportion d'un quart, il est impossible de lithargirer le plomb, parce que la coupelle se hérisse, & quand on enlève la chaux d'étain avec le rincart, elle entraîne toujours une portion d'argent; d'ailleurs, le plomb qui reste sur la coupelle avec l'argent, retient toujours de l'étain qui empêche la coupelle de

passer. M'étant trouvé dans un cas semblable, j'ai affiné l'argent en le fondant à diverses reprises avec du nitre qui a calciné & scorifié le plomb & l'étain qui restoient dans le gâteau d'argent.

ANALYSE

D'une Mine de plomb terreuse, jaunâtre, antimoniale & martiale, en masse formée de différens lits, se trouvant par filons à Bonvillars en Savoie, à six lieues de Chambéri, sur la route de Piémont.

Par M. SAGE.

CETTE mine ayant été exposée au feu dans un têt, n'exhala aucune odeur; après avoir été tenue rouge pendant une demi-heure, elle a perdu dix livres par quintal. Dans cette expérience, il n'y a que l'eau qu'elle contient qui se dégage; on peut l'obtenir si l'on distille cette mine dans une cornue au fourneau de réverbère.

Si l'on mêle cette mine de plomb terreuse antimoniale avec de la poudre de charbon, & si on la calcine ensuite dans un têt, il s'en dégage de l'arsenic sous forme de vapeurs blanches; il s'exhale ensuite de l'acide sulfureux & des fleurs blanches d'antimoine. Cette expérience fait connoître que, dans cette mine, les terres métalliques y sont combinées avec les acides arsenical & vitriolique; acides qui sont fixes au feu, quand ils sont engagés dans des terres, & qu'ils ne sont pas combinés avec du phlogistique.

Ayant distillé de la mine de plomb terreuse antimoniale, avec de la poudre de charbon, il s'est sublimé dans

le col de la cornue un peu de régule d'arſenic mêlé d'orpin.

La mine de plomb terreuſe antimoniale, ayant été réduite avec du flux noir & de la poudre de charbon, a produit, par quintal, cinquante-quatre livres d'un régule gris à facettes; il s'étend un peu ſous le marteau, & s'y pulvériſe.

Ce régule mixte, compoſé d'environ parties égales de plomb & d'antimoine, ayant été coupellé, l'antimoine a été rejeté, & a fait un bourlet d'un jaune-brunâtre * ſur le baſſin de la coupelle où il eſt reſté une minicule d'argent.

* Il doit cette couleur à du fer.

OBSERVATION SUR UNE SUBSTANCE *Ramassée aux pieds de jeunes Peupliers d'Italie.*

Par M. l'abbé TESSIER.

Lû le 28 Février 1784.

LE 4 Juillet dernier, j'allai visiter, sur le soir, une pépinière royale qui est à une demi-lieue de la ville de Tours. En parcourant les différentes sortes d'arbres qu'elle renfermoit, j'aperçus, dans un carré rempli de jeunes peupliers d'Italie, la surface de la terre couverte en partie d'une matière blanche, assez semblable de loin au gresil: c'étoit sur-tout autour des pieds des plus jeunes peupliers que cette matière étoit en plus grande quantité; pour peu qu'on la touchât, ses parties se divisoient & se réunissoient comme des globules de mercure. Je ne lui trouvai qu'une foible odeur de miel, mais elle avoit la saveur sucrée, & s'attachoit aux doigts si on la pressoit.

Les peupliers avoient sept à huit pieds de hauteur au plus; leurs feuilles, à la partie supérieure, étoient pour la plupart enduites de la même matière qui paroissoit luisante. Il s'y étoit formé un grand nombre de gales d'un rouge vermeil extérieurement, & remplies d'insectes vivans, & d'une grande quantité de la matière que j'avois vue aux pieds des tiges.

J'ai remarqué que les rangées de peupliers, qui étoient le plus exposées au soleil, étoient aussi le plus environnées & couvertes de la substance dont il s'agit. Les autres arbres de la pépinière, de jeunes peupliers de la Caroline, des peupliers d'Italie même à tiges élevées, n'en avoient pas autour de leurs pieds.

Le temps ne me permit de ramasser que quelques gros

ou environ de cette ſubſtance; je les enfermai, avec la terre & les feuilles qui s'y étoient jointes, dans du papier qui eſt reſté ſur ma table pendant plus de quatre mois, ſans que la ſubſtance en ait reçu la moindre altération. M. Berthollet a bien voulu l'examiner; après l'avoir gardée auſſi quelque temps, il l'a fait diſſoudre dans l'eau & évaporer à petit feu. Sa couleur blanche, moins ſenſible dans le papier, où elle étoit mêlée à de la terre & à des inſectes, qu'aux pieds des arbres & ſur leurs feuilles, s'eſt perdue entièrement par l'évaporation, en ſorte que la matière qui en a réſulté eſt d'un brun-foncé: la concentration a rendu l'odeur de miel plus forte & la ſaveur plus douce. C'eſt une ſubſtance ſucrée, mêlée, à ce qu'il paroît, d'un peu de gomme; mais cette ſubſtance ſucrée a les caractères du véritable miel. On aperçoit quelquefois pendant l'été, ſur les feuilles de diverſes plantes, une matière blanche, pareille à celle qui fait l'objet de cette obſervation; on lui a donné le nom de *miellat.* Les melons & autres cucurbitacées élevées ſur des couches, y ſont particulièrement ſujets, comme j'ai eu occaſion de le voir, ſur-tout le matin; mais je ne crois pas que cette matière ſe rencontre en auſſi grande abondance que je l'ai trouvée dans la pépinière de Tours, ſur les feuilles & aux pieds des peupliers d'Italie, puiſque les feuilles de ces arbres, & la terre qui environnoit leurs tiges, en étoient pour ainſi dire couvertes.

C'eſt à la chaleur ſans doute qu'on doit attribuer cette extravaſion de la matière ſucrée des peupliers d'Italie; car elle a paru dans un pays dont la latitude eſt propre à cauſer une chaleur aſſez forte. La Touraine, comme on ſait, produit des fruits plus ſucculens que n'en produiſent les provinces qui s'écartent de ſa poſition; l'alberge & les prunes y ſont meilleures qu'ailleurs; le cardon, le choux-fleur & l'anis, plantes originaires des pays chauds, y donnent de bonnes graines: d'ailleurs, c'étoit au mois de Juillet, & dans une année regardée comme plus chaude que beaucoup d'autres. La matière ſucrée s'eſt trouvé mêlée à une

partie gommeuſe, ce qui n'eſt pas étonnant, vu l'analogie & les rapports de ces ſubſtances contenues dans les vaiſſeaux des arbres. Des inſectes, aſſurés d'une nourriture convenable pour leurs petits, ayant piqué les feuilles des peupliers en cet état, ont formé les gales que j'y ai vues.

Les abeilles ſont très-avides de la matière ſucrée qui s'extravaſe & s'amaſſe ſur les feuilles des végétaux; c'eſt un miel tout fait qui leur coûte moins à recueillir que celui qu'elles pompent dans les nectaires des fleurs. Auſſi voit-on, dans les momens où cette matière eſt abondante, leur activité au travail ſe renouveler; alors elles vont aux champs de grand matin, & ne ceſſent d'y aller que très-tard, comme ſi elles avoient du regret de ne pas tout ramaſſer. Les perſonnes qui ſoignent des ruches s'en aperçoivent, & ont ſoin d'y mettre des hauſſes que les abeilles rempliſſent en peu de temps. C'eſt ſans doute dans une circonſtance favorable par l'abondance du miellat répandu ſur les plantes, que le Curé du Tillay-le-Péleux, au rapport de M. Duhamel, retira quatre cents livres de miel d'un ſeul eſſaim, dont la ruche étoit poſée ſur un cuvier percé qui ſe trouva tout rempli de gâteaux.

OBSERVATION

Sur les ſuites d'une Grêle tombée le 25 Mai 1783, dans un canton de la Beauce.

Par M. l'Abbé TESSIER.

Lû en 1784.

LA grêle eſt un des fléaux que les cultivateurs redoutent le plus; elle leur enlève en un inſtant le fruit de leurs peines, les moyens de ſubſiſter & d'entretenir leurs beſtiaux; elle les met dans l'impuiſſance de ſatisfaire à leurs engagemens. C'eſt au vigneron, propriétaire de vignes, qu'elle fait le plus grand tort, parce que les vignes frappées de grêle, ſont quelquefois pluſieurs années ſans rapporter, ou ne rapportent que très-peu les années ſuivantes: le laboureur y perd ſeulement ſa récolte de l'année, perte toujours trop conſidérable pour lui. Les orages qui lancent la grêle, ont lieu le plus ſouvent, un mois ou environ avant le temps de la moiſſon, parce que c'eſt la ſaiſon des plus grandes chaleurs. Les grains, à cette époque, ſont formés dans les épis, les tiges fortes & capables de réſiſtance; auſſi la grêle les coupe-t-elle preſque toutes, ſi elle n'eſt pas accompagnée de beaucoup de pluie, & réduit des campagnes belles & riches, à l'état le plus triſte & le plus malheureux.

L'année dernière, qui fut remarquable par ſes brouillards, le fut encore par les orages multipliés & funeſtes qu'ils occaſionnèrent: on vit même avant que les brouillards paruſſent, la grêle exercer ſes ravages dans différens pays. Celle qui fait l'objet de cette obſervation, tomba le 25 Mai, dans un canton de la Beauce, que j'habite ſouvent; elle étoit groſſe & abondante; en quelques minutes, la plus grande partie des ſeigles & des fromens fut détruite entièrement: il ne reſta que quelques débris de paille,

comme

comme après la récolte faite. Les autres grains, tels que les avoines, les orges, & ceux des prairies artificielles, n'étoient pas assez avancés pour en souffrir.

Les premières idées qui se présentèrent, furent de labourer les champs grêlés, & d'y semer des grains d'une végétation rapide; mais en y réfléchissant, on pensa que la terre, fortement battue par la grêle & par la pluie qui la suivit, ne pourroit être assez-tôt ameublie pour être ensemencée avec avantage: quelques particuliers seulement le tentèrent. Les laboureurs qui avoient de grandes exploitations, abandonnèrent ce projet, & préférèrent de ne point interrompre leurs autres travaux, espérant d'ailleurs que l'année suivante ils en seroient dédommagés en partie par une augmentation de produit en avoine dans ces mêmes champs.

Bientôt après on vit de nouvelles tiges s'élever à la place de celles qui avoient été détruites, & en plus grand nombre même que les premières. En un mois elles parvinrent à la hauteur ordinaire, & l'on ne s'aperçut plus des effets de la grêle dans les champs de froment, où elle n'avoit rien épargné; dans ceux où une partie des tiges avoit été conservée, les repousses formoient avec elles un contraste de vert & de jaune, capable d'étonner le voyageur. Il n'y avoit pas une seule repousse dans les champs de seigle, trop avancés quand la grêle survint, pour fournir de nouvelles tiges; on sait d'ailleurs que le seigle a moins de facilité pour taller, que le froment.

Le temps fut favorable à la végétation des repousses de froment; de fréquens orages amenèrent des pluies chaudes très-avantageuses; chaque souche produisit trois ou quatre tiges, plus fines que les premières. Il s'y forma des épis aussi beaux, qui fleurirent à la fin de Juin & au commencement de Juillet, c'est-à-dire, un mois après le terme ordinaire de la floraison du froment.

Ce seroit ici le lieu de peindre la satisfaction du laboureur, dont l'espérance renaissoit à la vue d'une récolte inattendue: on se la représente facilement, & je dois m'occuper

plus particulièrement des faits phyſiques. Les laboureurs, dont les champs avoient été le plus maltraités, ſe regardoient comme les mieux partagés, parce que tout ayant repouſſé, ils ne devoient pas craindre, en attendant la maturité des nouveaux épis, de perdre le grain contenu dans les anciens, plus hâtifs de beaucoup; c'étoit ce que craignoient avec raiſon ceux dont les champs n'avoient été grêlés qu'à moitié ou au quart.

Tout ſe paſſa bien juſqu'au 1.er Août; ce jour-là, & les ſuivans, il fit une chaleur conſidérable, accompagnée d'un vent du ſud, qui en accélérant trop promptement la deſſiccation des tiges de repouſſes, échauda les grains, qui reſtèrent petits & retraits. On commença à les couper vers le 18 Aout.

Perſuadé qu'il ſeroit intéreſſant de ſuivre juſqu'au bout cette obſervation que je me ſuis trouvé à portée de faire, j'ai comparé entr'eux les produits des récoltes des champs de même nature, dont les uns ont repouſſé de nouvelles tiges, après avoir été ravagés par la grêle, & les autres ont été à l'abri de ce fléau.

Un arpent de terre qui n'a point été expoſé à la grêle, communément l'année dernière, année moins abondante qu'on ne l'a cru, a produit vingt douzaines de gerbes, qui ont rendu par douzaine deux boiſſeaux de froment, meſure de Paris, ou trois ſetiers & un tiers de ſetier. Un arpent de terrein grêlé a fourni à peu-près la même quantité de gerbes, mais on n'en a obtenu qu'un boiſſeau de froment par douzaine, ou un ſetier & demi & un ſixième de ſetier par arpent.

Chaque gerbe d'un champ non grêlé, contenoit environ neuf livres de paille; chaque gerbe d'un champ grêlé, n'en contenoit que ſept: celle-ci étoit beaucoup plus fine, plus tendre & plus agréable aux beſtiaux. J'obſerverai ici que les bêtes à laine ne veulent ni la paille de blé, ni les herbes des prairies hachées par la grêle, quelque ſoin qu'on prenne pour les y forcer.

Quatre boiſſeaux & un quart de froment non grêlé, peſoient quatre-vingt-cinq livres, ou vingt livres par boiſſeau; la même meſure de froment grêlé, étoit du poids de quatre-vingt-deux livres, c'eſt-à-dire, peſoit trois livres de moins; ce qui fait par ſetier une différence de ſept à huit livres: ce dernier froment étoit plus petit & plus maigre.

J'ai fait moudre, avec toute l'attention poſſible, les quatre-vingt-cinq livres de froment non grêlé; ils ont produit cinquante-ſix livres de farine blanche, huit livres & demie de farine biſe, huit livres de recoupe & huit livres de ſon. Le froment grêlé, peſant quatre-vingt-deux livres, a auſſi été moulu de la même manière; on en a retiré cinquante-ſix livres de farine plus blanche que la précédente, huit livres de farine un peu plus biſe que la précédente, dix livres de recoupe & ſept livres de ſon: les gruaux des farines blanches ont été moulus deux fois, & ceux des farines biſes une fois.

Les pains que j'ai fait faire avec deux livres de chacune de ces quatre farines & ſix onces de levain, étoient, pour la blancheur, conformes à celle des farines dont ils avoient été formés. La farine blanche du blé grêlé eſt celle qui, au pétriſſage, a abſorbé le plus d'eau; il lui en a fallu une once & demie & un demi-gros de plus, c'eſt-à-dire, une livre ſix onces & cinq gros & demi, au lieu d'une livre cinq onces & un gros qu'on a employés pour chacune des autres. Je ne ſuis pas aſſez ſûr du poids des pains pour en faire mention ici; ils étoient bien levés & de bon goût: les deux blancs m'ont paru avoir une ſaveur égale.

Cette obſervation n'a rien ſans doute de très-important en ſoi, mais elle offre un fait phyſique obſervé avec attention, & mieux ſuivi peut-être qu'il ne l'a encore été; ſous ce point de vue, j'ai cru qu'il méritoit d'être conſervé. On en peut conclure que, quand la grêle ravage des champs avant l'époque où les grains ſont formés dans les épis, il y a lieu d'eſpérer que ſi le temps eſt favorable, il repouſſera d'autres tiges qui produiront du grain de bonne qualité: alors les vaiſſeaux des racines ne ſont pas encore oblitérés,

& peuvent élever de la terre les ſucs ou l'humidité néceſſaires à la formation de nouvelles tiges; ce qui ne peut avoir lieu que dans un bon terrein comme celui dont il s'agit dans cette obſervation, un terrein de mauvaiſe qualité ſeroit trop épuiſé pour procurer le même avantage. Il faut encore ſe rappeler que l'année dernière a été ſingulièrement favorable à une ſeconde végétation, par les pluies chaudes & fréquentes qui ſont tombées; en ſorte que dans une année sèche, telle que celle-ci, par exemple, où, dans quelques endroits du pays Chartrain, on n'a pas eu de pluie depuis plus de quatre mois, les repouſſes euſſent été foibles, & n'euſſent vraiſemblablement porté que des épis imparfaits. Des particuliers ont retourné leurs champs immédiatement après la grêle, pour y ſemer de l'orge, ils n'en ont preſque pas récolté, parce que la ſaiſon étoit trop avancée; d'autres ont préféré d'y ſemer de la veſce, qu'ils ont fait manger en herbe à leurs beſtiaux; mais ceux qui ont tout abandonné à la Nature, me paroiſſent avoir gagné davantage, puiſque indépendamment du fourrage, ils ont retiré une certaine quantité de froment.

EXAMEN

DE LA DERNIÈRE RÉVOLUTION DE JUPITER, *Et des élémens actuels de son orbite.*

Par M. DE LA LANDE.

Lû le 24 Nov. 1784.

DEPUIS l'impreſſion de mes Tables aſtronomiques, en 1771, j'ai continué d'examiner les oppoſitions des Planètes, pour conſtater les élémens que j'avois adoptés, ou reconnoître les variations qui pourroient y arriver. Jupiter & Saturne, ſont les deux Planètes les plus ſuſceptibles de dérangement à cauſe de la lenteur de leur mouvement; il y faudra joindre la planète de Herſchel, lorſque nous l'aurons obſervée aſſez long-temps pour apercevoir ſes inégalités. Celles de Jupiter, produites par l'action de Saturne, ont été calculées par M. Euler *(Prix de 1752)*, & par Mayer, *(Connoiſſance des Temps, 1763 & 1764*)*. M. Wargentin, avoit employé dans ſes Tables de Jupiter, ces inégalités, & en les publiant dans mon *Aſtronomie*, en 1771, j'avois adopté, comme M. Wargentin, une augmentation de 2′ 15″ par ſiècle, dans l'équation de l'orbite de Jupiter, avec des perturbations produites par l'action de Saturne, dont la plus forte étoit de 4′ 38″, & dont la ſomme va juſqu'à 10′ 14″; mais je vois que tout cela ne ſauve point les inégalités, & je trouve encore 5′ d'erreur dans l'oppoſition de 1784. Je crois donc qu'il eſt plus naturel de laiſſer encore aux Tables leur ancienne ſimplicité, & de chercher les élémens de l'orbite de Jupiter en la ſuppoſant purement elliptique; mais en variant & combinant un grand nombre d'oppoſitions dans les divers

* Dans le volume de 1763, *page 128*, il faut changer les ſignes des Tables II & III.

points de l'orbite, & les différentes configurations avec Saturne. La méthode que j'ai donnée dans les *Mémoires de 1775, page 232*, eſt ſi ſimple, ſi courte & ſi commode, elle donne tous les élémens de l'orbite en ſi peu de temps, que l'on ne doit pas négliger de repaſſer ſouvent les orbites des Planètes; c'eſt ainſi que l'on parviendra à déterminer les valeurs moyennes des élémens, indépendamment des perturbations, & qu'on reconnoîtra les dérangemens qui pourroient y ſurvenir.

Celui que j'ai indiqué dans le mouvement de Saturne, (*Mémoires de l'Académie, 1765, page 361*), eſt ſi conſidérable, qu'il eſt à craindre que nous n'en trouvions par la ſuite un pareil dans le mouvement de Jupiter; c'eſt ce que M. Wargentin me paroiſſoit ſoupçonner dans une lettre qu'il m'écrivit le 12 Janvier 1781, où il me diſoit: *une irrégularité dans le lieu de Jupiter lui-même, qui a lieu depuis 1773, eſt en partie cauſe de l'irrégularité apparente des Satellites.* Ceſt ce que j'ai voulu vérifier par les recherches dont je rendrai compte dans ce Mémoire, où l'on verra que l'irrégularité eſt peu ſenſible.

Voici trois oppoſitions obſervées dans les deux apſides, & dans un des points de la plus grande équation.

ANNÉES.	MOIS & JOURS.	TEMS MOYEN de l'oppoſit.	LONGITUDE ſur L'ÉCLIPTIQUE.	Réduct.	CORRECT. des TABLES.	ANOMALIE moyenne des TABLES.	MOUVEMENS OBSERVÉS.
		H. S	*S. D. M. S.*	*S.*	*M. S.*	*S. D. M. S.*	*S. D. M. S.*
1773.	Sept. 26	15. 17	0. 4. 16. 49	+ 4	+ 0. 52	5. 24. 5. 33	3. 15. 55. 51.
1777.	Janv. 9	12. 28	3. 20. 12. 33	+ 11	— 1. 13	9. 3. 52. 11	3. 2. 0. 57.
1780.	Avril 11	1. 40	6. 22. 13. 54	— 13	— 4. 2	0. 12. 32. 20	
							6. 17. 56. 48.

A la ſuite des longitudes obſervées par rapport à l'écliptique, j'ai mis les réductions qu'il faut employer pour les réduire à l'orbite de Jupiter; enſuite la correction de mes Tables, ou la quantité qu'il faut y appliquer pour avoir les longitudes obſervées, mais ſans avoir égard aux perturbations, ni à l'augmentation de l'équation, depuis 1760.

J'ai mis enſuite l'anomalie moyenne de Jupiter, ſuivant mes Tables, pour ſervir à mes différentes hypothèſes; enfin les mouvemens obſervés, ou les différences des longitudes vraies ſur l'orbite, qui doivent être repréſentées exactement, & ſervent à vérifier mes hypothèſes.

Première hypothèſe. Avec les anomalies & les équations qui ſont dans mes Tables, je trouve le mouvement total de 1773 à 1780, trop fort de 4′ 54″, comme on le voit par la ſomme des erreurs des Tables qui ſont en ſens contraire.

En diminuant l'aphélie, ou augmentant les anomalies moyennes, de 20′, je trouve cet excès diminué de 3′ 51″.

Ainſi, pour le faire diſparoître en entier par le ſeul changement de l'aphélie, il faut ajouter 25′ 27″ aux anomalies; la plus grande équation étant ſuppoſée comme dans mes Tables, de 5ᵈ 34′ 1″.

Seconde hypothèſe. Avec les anomalies augmentées de 25′ 27″, & les Tables d'équations qui ſont dans Halley, je ne trouve plus le mouvement trop fort que de 12″, entre 1773 & 1780. Pour corriger cet excès, je trouve qu'il ſuffit d'ajouter encore 1′ 2″ de plus aux anomalies, c'eſt-à-dire, en total, 26′ 29″; la plus grande équation étant comme dans Halley, 5ᵈ 31′ 36″.

Troiſième hypothèſe. Ayant calculé la ſeconde obſervation, ou la longitude pour 1777, dans chacune de ces deux hypothèſes qui ſatisfont au mouvement total, 6ˢ 17ᵈ 56′ 48″; je trouve dans la première hypothèſe, que le mouvement de 1773 à 1777, feroit trop petit de 51″,

& dans la ſeconde hypothèſe, de 3′ 36″, ce qui fait 2′ 45″ de plus. Ainſi ces deux hypothèſes qui diffèrent de 1′ 2″ pour les anomalies, & de 2′ 23″ pour la plus grande équation, produiſent 2′ 45″ de différence pour le mouvement de 1773 à 1777. Par le moyen de deux petites proportions, je trouve que, pour augmenter de 51″, ce mouvement, & corriger l'erreur de la première hypothèſe, il faut augmenter l'équation de 45″, & diminuer de 19″ la correction de l'aphélie; & par-là on ſatisfera au mouvement 3ſ 15d 55′ 51″, comme au mouvement total, 6ſ 17d 56′ 48″.

Pour calculer les trois longitudes avec des anomalies augmentées de 25′ 8″, & avec la plus grande équation 5d 34′ 46″, il faut augmenter les trois équations de 5″, de 45″ & de 9″, à proportion de la différence qu'il y a entre les Tables de Halley & les miennes. C'eſt le moyen le plus facile d'avoir promptement les équations comme on le voit dans la Table ci-deſſous, où j'ai mis pour trois degrés d'anomalie moyenne, les équations de Jupiter, ſuivant mes Tables & ſuivant celles de Halley.

ANOMAL. MOYENNE.	ÉQUATIONS. Mes TABLES.	ÉQUATIONS. HALLEY.	POUR 45 ſecondes de DIFFÉRENCE.
S. D.	D. M. S.	D. M. S.	S.
5. 24	0. 37. 9	0. 36. 52	5.
9. 4	5. 31. 14	5. 28. 51	45.
0. 13	1. 10. 54	1. 10. 26	9.

Par les quantités dont ces équations diffèrent, on trouve aiſément de combien différeroient celles qui ſuppoſeroient

pour

pour la plus grande équation 45″ de plus que ma Table; par exemple, pour $5^{s}\ 24^{d}$, les équations diffèrent de 17″ dans les deux Tables, ou la plus grande équation diffère de 2′ 23″; donc pour 45″, il y auroit 5″, & l'équation feroit 37′ 14″ dans une nouvelle Table que l'on auroit dreſſée d'après cette plus grande équation, 5^{d} 34′ 46″.

Ayant ainſi calculé les trois longitudes, je les trouve plus grandes de 1′ 39″ que celles qui ont été obſervées; c'eſt ce qu'il faudroit ôter des époques de Jupiter, dans mes Tables, pour ſatisfaire aux trois oppoſitions que je viens d'employer, en même temps qu'on ajouteroit 45″ à la plus grande équation, & qu'on ôteroit 24′ 57″ de l'aphélie.

Voici trois autres oppoſitions de Jupiter, dont les lieux ſont aſſez voiſins des apſides & du point de la plus grande équation, pour pouvoir donner aſſez bien les mêmes élémens.

ANNÉES.	MOIS & JOURS.	TEMPS MOYEN de l'oppoſit.	LONGITUDE ſur L'ÉCLIPTIQUE.	REDUCT.	CORRECT. des TABLES.	ANOMALIE moyenne de JUPITER.
		H. M.	S. D. M. S.	S.	M. S.	S. D. M. S.
1779.	Mars 12	12. 31	5. 22. 18. 37	+ 14	— 4. 0	11. 9. 40. 28.
1782.	Juin 14	17. 14	8. 24. 6. 40	— 14	— 0. 31	2. 18. 33. 49.
1784.	Août 25	2. 21	11. 2. 54. 4	+ 26	+ 2. 37	4. 25. 13. 51.
		2. 10½	11. 2. 53. 40.	M. MALLET.		

En faiſant les mêmes calculs avec ces trois longitudes, j'ai trouvé qu'il faudroit ôter 47″ des époques de mes Tables, 1′ 6″ de la plus grande équation, & 33′ 12″ du lieu de l'aphélie.

Si l'on prend un milieu entre ces deux réſultats, on aura les élémens qui répondent le mieux à la dernière

révolution de Jupiter, en ôtant 1′ 12″ des époques de mes Tables, 11″ de la plus grande équation & 29′ de l'aphélie. Cette dernière correction est un peu forte; elle peut produire trois minutes d'erreur sur le lieu de Jupiter; mais on ne peut guère assurer, quant à présent, que ce soit une irrégularité survenue dans le mouvement de Jupiter, puisque les meilleures Tables ne représentoient pas les révolutions précédentes avec une plus grande exactitude.

Les deux principales corrections de mes Tables, sont en sens contraire de celles de Halley, comme on le peut voir par la comparaison suivante; d'où il résulte que mes Tables sont plus exactes pour Jupiter, que celles de ce grand Astronome, en négligeant comme lui les perturbations de cette Planète.

	LONGITDUE MOYENNE en 1780.	APHÉLIE.	ÉQUATION.
	S. D. M. S.	S. D. M.	D. M. S.
Dans les Tables de Halley. .	6. 15. 4. 14	6. 11. 10	5. 31. 36.
Dans mes Tables.	6. 15. 2. 1	6. 10. 54	5. 34. 0.
Suivant ce Mémoire.	6. 15. 0. 49	6. 10. 24	5. 33. 49.

Je prouverai ailleurs la même supériorité pour mes Tables des autres Planètes; cela n'est pas surprenant, puisque j'ai été à portée d'employer des observations plus nombreuses & plus récentes.

Pour qu'on puisse mieux juger des inégalités de Jupiter, je vais donner ici la comparaison de mes Tables, avec les quatre-vingt-quinze oppositions observées depuis un siècle, c'est-à-dire, la quantité qu'il faut appliquer au calcul pour l'accorder avec l'observation. J'y ai joint l'anomalie de Jupiter & sa distance vraie à Saturne. Par ce moyen, l'on

verra l'influence que peuvent avoir ſur le progrès de ces erreurs, & les élémens de l'orbite de Jupiter, & l'attraction de Saturne. Cette Table eſt le premier ſecours qu'on doit ſe préparer pour diſcuter les élémens de la Planète qui nous occupe.

ERREURS des Tables de Jupiter, en négligeant les perturbations.

ANNÉES.	ERREURS.	ANOMALIES de JUPITER.	DISTANCES de JUPITER à Saturne.
	M. S.	S. D. M.	S. D. M.
1680.	— 2. 13	7. 27. 25	10. 23. 41.
1682.	— 2. 6	9. 0. 31	11. 13. 1.
1683.	— 1. 4	10. 3. 29	0 0. 12.
1684.	+ 0. 36	11. 6. 21	0. 16. 34.
1685.	+ 1. 6	0. 9. 13	1. 2. 41.
1686.	+ 1. 2	1. 12. 9	1. 19. 24.
1687.	— 0. 17	2. 15. 2	2. 7. 32
1688.	— 2. 34	3. 18. 26	2. 27. 38.
1689.	— 4. 46	4. 21. 50	3. 21. 2.
1690.	— 5. 7	5. 25. 18	4. 14. 15.
1691.	— 4. 33	6. 28. 43	5. 8. 41.
1692.	— 1. 22	8. 1. 59	6. 2. 9.
1694.	+ 0. 55	9. 5. 4	6. 23. 46.
1695.	+ 2. 39	10. 8. 1	7. 13. 32.
1696.	+ 2. 46	11. 10. 53	8. 2. 1.
1697.	+ 1. 56	0. 13. 45	8. 19. 53.
1698.	+ 1. 27	1. 16. 41	9. 7. 51.
1699.	— 0. 50	2. 19. 46	9. 27. 2.
1700.	— 3. 17	3. 23. 2	10. 17. 35.
1701.	— 2. 1	4. 26. 26	11. 9. 50.
1202.	— 0. 27	5. 29. 55	0. 3. 0.
1703.	+ 0. 40	7. 3. 19	0. 25. 47.
1704.	+ 1. 58	8. 6. 33	1. 16. 53.
1706.	+ 2. 27	9. 9. 37	2. 5. 44.
1707.	+ 1. 30	10. 12. 32	2. 23. 35.
1708.	+ 0. 25	11. 15. 24	3. 8. 14.

ANNÉES.	ERREURS.	ANOMALIES JUPITER.	DISTANCES de JUPITER à Saturne.
	M. S.	S. D. M.	S. D. M.
1709.	+ 0. 16	0. 18. 16	3. 23. 3.
1710.	+ 0. 22	1. 21. 14	4. 8. 48.
1711.	+ 2. 6	2. 24. 20	4. 25. 50.
1712.	+ 3. 31	3. 27. 38	5. 14. 59.
1713.	+ 4. 39	5. 1. 4	6. 6. 16.
1714.	+ 5. 57	6. 4. 32	6. 29. 1.
1715.	+ 3. 3	7. 7. 54	7. 21. 47.
1716.	+ 2. 17	8. 11. 7	8. 13. 32.
1718.	+ 0. 48	9. 14. 9	9. 3. 38.
1719.	− 1. 51	10. 17. 4	9. 22. 20.
1720.	+ 2. 7	11. 19. 55	10. 10. 14.
1721.	+ 4. 16	0. 22. 48	10. 28. 8.
1722.	+ 2. 55	1. 25. 47	11. 16. 43.
1723.	+ 4. 8	2. 28. 55	0. 6. 46.
1724.	+ 2. 10	4. 2. 13	1. 8. 43.
1725.	+ 6. 8	5. 5. 40	1. 22. 33.
1726.	+ 1. 37	6. 9. 8	2. 17. 4.
1727.	− 3. 12	7. 12. 29	3. 11. 2.
1728.	− 0. 57	8. 15. 40	4. 3. 13.
1730.	− 2. 50	9. 18. 41	4. 23. 10.
1731.	− 2. 20	10. 21. 35	5. 11. 13.
1732.	− 1. 13	11. 24. 26	5. 27. 59.
1733.	+ 0. 14	0. 27. 20	6. 14. 18.
1734.	+ 3. 3	2. 0. 20	7. 1. 4.
1735.	+ 4. 14	3. 3. 29	7. 18. 53.
1736.	+ 2. 39	4. 6. 49	8. 8. 23.
1738.	− 0. 19	6. 13. 43	9. 21. 12.
1739.	− 0. 56	7. 17. 4	10. 12. 23.
1740.	− 1. 22	8. 20. 13	11. 2. 4.
1742.	− 1. 8	9. 23. 13	11. 20. 0.
1743.	− 0. 9	10. 26. 7	0. 6. 46.
1744.	+ 0. 28	11. 28. 58	0. 23. 30.
1745.	+ 1. 3	1. 1. 52	1. 9. 32.
1746.	− 1. 36	2. 4. 53	1. 27. 12.
1747.	− 5. 0	3. 8. 3	2. 16. 45.

ANNÉES.	ERREURS.	ANOMALIES de JUPITER.	DISTANCES de JUPITER à Saturne.
	M. S.	S. D. M.	S. D. M.
1748.	− 7. 19	4. 11. 24	3. 8. 34.
1749.	− 8. 49	5. 14. 52	4. 2. 20.
1750.	− 7. 17	6. 18. 19	4. 27. 50.
1751.	− 5. 33	7. 21. 38	5. 21. 27.
1752.	− 0. 51	8. 24. 47	6. 13. 8.
1754.	+ 1. 34	9. 27. 45	7. 3. 28.
1755.	+ 1. 46	10. 0. 38	7. 22. 14.
1756.	+ 1. 4	0. 3. 30	8. 10. 9.
1757.	− 0. 19	1. 6. 24	8. 28. 2.
1758.	− 2. 49	2. 9. 26	9. 16. 58.
1759.	− 5. 30	3. 12. 38	10. 6. 35.
1760.	− 6. 37	4. 16. 0	10. 28. 14.
1761.	− 4. 8	5. 19. 29	11. 21. 9.
1762.	4. 19	6. 22. 55	0. 14. 5.
1763.	− 1. 52	7. 26. 13	1. 5. 43.
1765.	− 0. 56	8. 29. 19	1. 25. 10.
1766.	− 1. 3	10. 2. 17	2. 12. 30.
1767.	− 1. 58	11. 5. 9	2. 28. 19.
1768.	− 2. 54	0. 8. 1	3. 13. 23.
1769.	− 3. 31	1. 10. 56	3. 28. 46.
1770.	− 3. 52	2. 14. 0	4. 15. 20.
1771.	− 2. 9	3. 17. 14	5. 3. 49.
1772.	− 0. 9	4. 20. 37	5. 24. 45.
1773.	+ 0. 55	5. 24. 6	6. 17. 6.
1774.	+ 0. 18	6. 27. 31	7. 10. 10.
1775.	+ 0. 40	8. 0. 47	8. 2. 27.
1777.	− 1. 4	9. 3. 54	8. 23. 7.
1778.	− 2. 45	10. 6. 49	9. 12. 19.
1779.	− 3. 58	11. 9. 40	10. 0. 23.
1780.	− 4. 11	0. 12. 32	10. 18. 15.
1781.	− 2. 24	1. 15. 31	11. 7. 37.
1782.	− 0. 32	2. 18. 34	11. 27. 6.
1783.	− 3. 24	3. 21. 54	0. 17. 37.
1784.	+ 2. 37	4. 25. 14	1. 10. 49.
1785.	+ 0. 43	5. 28. 42	2. 5. 21.

J'ai ſuppoſé 20′ d'erreur dans la longitude de 1727, rapportée par M. Caſſini, comme l'indique le temps de l'oppoſition.

En comparant les années 1725 & 1784, dans leſquelles Jupiter & Saturne étoient à peu-près à pareilles ſituations, on voit que l'erreur des Tables a diminué de 4′, ce qui indiqueroit une diminution à faire ſur le moyen mouvement de Jupiter, employé dans mes Tables.

En comparant 1690 & 1749, 1714 & 1773, on trouve auſſi une différence de 4′; ainſi depuis un ſiècle, le mouvement de Jupiter paroît toujours le même. Il n'y a qu'une ſeule erreur qui paſſe 7′, c'eſt celle de 1749; il eſt vrai qu'il n'y a pour cette oppoſition, qu'une ſeule obſervation du paſſage de Jupiter *(Mém. de 1754, p. 326)*. Mais l'erreur ſurpaſſe à peine de 4′ celle qui avoit lieu cinquante-neuf ans auparavant; ainſi elle diminueroit ſi l'on faiſoit le mouvement plus petit. Cependant, on augmenteroit par-là celle de 1725, qui eſt déjà très-forte, mais elle ſeroit au moins la ſeule. Ainſi cela n'empêche pas que je ne regarde le mouvement de Jupiter comme étant réellement plus petit que dans mes Tables, du moins dans ce ſiècle-ci, quoique Halley l'ait fait un peu plus grand.

Enfin, on ne voit rien dans ces erreurs, qui ne puiſſe être attribué, ſoit au défaut dans les élémens de Jupiter, ſoit à l'attraction de Saturne, & rien n'indique une altération ſenſible dans le mouvement de Jupiter, dans la dernière révolution, ni même dans ce ſiècle-ci.

Depuis la lecture de ce Mémoire, M. de la Place a reconnu, en 1786, par la théorie, une équation d'environ vingt minutes, dont la période eſt de huit cents ſoixante-dix-ſept ans, & qui eſt produite par l'action de Saturne. Elle ſervira probablement à expliquer, non-ſeulement, l'équation ſéculaire de Jupiter, mais encore une partie des inégalités qu'on aperçoit dans la Table précédente.

Je terminerai ce Mémoire, en rapportant le calcul que

j'ai fait des anciennes obſervations de Jupiter, qui ſont dans l'Almageſte, pour en conclure le mouvement moyen de Jupiter, en faiſant aux obſervations les corrections que j'ai expliquées *(Mémoires de 1766, page 467.)* J'y ai ajouté la parallaxe annuelle & l'équation de l'orbite, afin d'avoir la longitude moyenne déduite de l'obſervation & la quantité dont elle diffère de celle des Tables. Cette quantité que l'on a appelée juſqu'ici *équation ſéculaire*, eſt produite, ſuivant M. de la Place, par cette équation de 20′, dont la période eſt d'environ huit cents ſoixante-dix-ſept ans; mais en attendant qu'on puiſſe appliquer cet élément aux obſervations anciennes, j'ai mis dans la dernière colonne de la Table ſuivante, le nombre de ſecondes qu'il faudroit ôter du mouvement annuel de mes Tables, $30^{d}\,20'\,37'',68$, ſuivant chacune de ces obſervations.

ANNÉES.	MOIS & JOURS.	TEMPS moyen à PARIS.	LIEU OBSERVÉ corrigé.	Parallaxe annuelle.	ÉQUAT. de l'ORBITE.	LONGIT. MOYENNE déduite de l'Obſervation.	DIFF. des Tables	Chang. du mouv. ann.
		H. M.	S. D. M.	D. M.	D. M.	S. D. M.	D. M.	S.
Av. J. C. 240	Sept. 3	13. 45	3. 7. 6	— 9. 25	— 4. 31	2. 23. 10		
Ap. J. C. 133	Mai 17	9. 8	7. 24. 13	+ 0. 4	+ 4. 45	7. 29. 2	3. 9	5,67.
136	Août 31	8. 8	11. 8. 57	— 0. 28	+ 0. 20	11. 8. 49	2. 10	4,79.
137	Oct. 7	15. 8	0. 15. 26	— 0. 20	— 2. 35	0. 12. 31	1. 55	4,23.
139	Juill. 10	15. 8	2. 16. 49	— 5. 34	— 4. 57	2. 6. 18	2. 34	5,66.

Le milieu, entre les cinq réſultats eſt $5'',02$, ce qui donne pour le mouvement annuel moyen $1^{f}\,0^{d}\,20'\,32'',66$, plus petit de $1''\,\frac{1}{3}$ ſeulement, que dans les Tables de M. Caſſini.

Le mouvement annuel que j'ai conclu de ces obſerva-

tions, exigera quelques corrections relativement aux perturbations, mais c'eſt du moins la quantité qu'il faut employer d'abord pour connoître la période de la nouvelle équation; ſauf à rectifier le moyen mouvement lorſqu'on connoîtra les changemens de l'aphélie, de l'excentricité & de la longitude moyenne, que l'action de Saturne a dû produire dans le mouvement de Jupiter.

J'ai fait de ſemblables calculs pour le mouvement annuel de Saturne, que j'ai trouvé par les anciennes obſervations, $12^d\ 13'\ 34'',48$. Cinq fois ce mouvement & deux fois celui de Jupiter, donnent des quantités qui ne diffèrent que de $26'\ 47''$, ce qui ne feroit 360^d qu'au bout de huit cents ſix ans; telle eſt à peu-près la période de l'équation qui peut réſulter de cette configuration des deux Planètes, ou de cinq fois le mouvement de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter. Ce n'eſt-là qu'un premier eſſai, puiſque l'équation dont il s'agit eſt le réſultat de pluſieurs autres, & qu'elle dépend de l'excentricité, qui eſt variable, du mouvement de l'aphélie, qui n'eſt pas uniforme; mais les obſervations que je viens de rapporter avec les corrections que j'y ai faites, ſont les données auxquelles il faudra tâcher de ſatisfaire par la théorie.

MÉMOIRE

MÉMOIRE
CONTENANT LES OBSERVATIONS DE LA PREMIÈRE COMÈTE DE 1784,
Obſervée à Paris, de l'obſervatoire de la Marine (a); & de la ſeconde Comète obſervée à Malte (b).

Par M. MESSIER.

M. LE COMTE DE CASSINI découvrit cette Comète à la ſimple vue, le 24 Janvier, vers les 6 heures & demie du ſoir, près de la queue de la Baleine, formant un triangle à peu-près iſocèle avec β & l'étoile ι de la queue : elle paroiſſoit alors dans le voiſinage de la Lune, qui étoit dans ſon premier quartier. La Comète avoit une queue de deux degrés environ de longueur ; le diamètre du noyau avoit une demi-minute.

Le lendemain 25, M. le Comte de Caſſini me fit part de la découverte de cette Comète, & des circonſtances que je viens de rapporter.

Le mouvement de la Comète, le 24, par une ſeule obſervation, n'avoit pu ſe reconnoître, de manière qu'on ignoroit la direction de la route qu'elle devoit tenir dans le ciel.

Depuis le 24, jour où elle fut découverte, juſqu'au 3 Février ſuivant, le ciel fut conſtamment couvert le jour & la nuit d'un brouillard très-épais : pendant cet intervalle

(a) C'eſt la vingt-deuxième des Comètes que j'ai obſervées de l'obſervatoire de la Marine, à l'hôtel de Clugny ; & la ſoixante-neuvième Comète, dont l'orbite ait été calculée, en ſuivant la Table des Comètes, qui eſt rapportée dans l'Aſtronomie de M. de la Lande, *tome III, page 366 ;* & *tome IV, page 704.*

(b) Qui eſt la ſoixante-dixième dont l'orbite a été calculée.

de temps, il tomba une aſſez grande quantité de neige, le froid avoit également augmenté. Le 31 Janvier, à 7 heures 30′ du matin, le thermomètre, à mon obſervatoire, marquoit onze degrés 3 quarts au-deſſous de zéro ou de la glace, & le 1.er Février au matin, la rivière fut gelée en pluſieurs endroits.

Le 3 Février, le ciel s'éclaircit pendant la journée, le ſoir, il n'y avoit plus qu'un peu de brouillard dans l'air, & la Lune, qui approchoit de ſon plein, répandoit une grande lumière. La Comète n'avoit pas été vue depuis le 24 Janvier, à cauſe du mauvais temps, & comme on ignoroit ſon mouvement & le lieu du ciel où il falloit la chercher, je plaçai ma grande lunette achromatique dans le plan du méridien, & je lui fis parcourir une grande partie du ciel, dans tout l'eſpace où la Comète pouvoit ſe trouver, ſi par ſon mouvement depuis le 24 Janvier elle s'étoit élevée au-deſſus de l'horizon. Après bien des recherches, je la découvris, vers 5 heures 54 minutes du ſoir, ſur le parallèle de l'étoile λ des Poiſſons, cinquième grandeur; je la comparai trois fois à cette Étoile, une fois à la 506.e du catalogue zodiacal de feu M. l'Abbé de la Caille, & à deux Étoiles de ſeptième grandeur, dont les lieux n'avoient pas encore été déterminés; mais je les comparai à λ des Poiſſons.

A cauſe du brouillard qui étoit répandu dans l'air, & de la grande lumière de la Lune, la Comète ne pouvoit ſe voir à la ſimple vue, mais elle ſe voyoit très-bien avec une petite lunette de nuit de 15 pouces de foyer: en la voyant dans la grande lunette achromatique, on lui ſoupçonnoit une queue fort courte, & dirigée vers la partie du ciel E. S. E.

Je meſurai, au moyen du micromètre à fils qui étoit adapté à la lunette, le diamètre du noyau de la Comète, qui avoit beaucoup de lumière; je le trouvai de 40 ſecondes, & celui de l'atmoſphère qui environnoit le noyau, de 1′31″.

La comparaiſon de la Comète avec l'étoile λ des Poiſſons,

m'a donné sa position. Le 3 Février, à $6^h\ 5'\ 9''$ de temps vrai, la Comète suivoit l'Étoile au fil horaire du micromètre, de $1^d\ 46'\ 30''$; la Comète étoit plus au nord que l'Étoile, de 13 secondes : ainsi l'ascension droite de la Comète étoit de $354^d\ 32'\ 14''$, & sa déclinaison $35'\ 57''$, boréale.

Je ne rapporte ces détails que pour la première observation; on trouvera les autres positions de la Comète, & celles des Étoiles qui ont servi à sa détermination, dans deux Tables que je rapporte à la suite de ce Mémoire. La première contient les déterminations de la Comète en ascension droite & en déclinaison pour chaque jour d'observation, avec les différences de passage entre la Comète & les Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée, ainsi que les différences en déclinaison. La seconde Table contiendra la position des Étoiles, soit celles qui étoient déjà connues, soit celles que j'ai déterminées par de nouvelles observations : la plupart de ces Étoiles ont été employées à la détermination des lieux de la Comète, à chaque jour où elle a été observée.

Le 4 Février au soir, le ciel qui avoit été couvert toute la journée d'un brouillard élevé, s'éclaircit vers les quatre heures du soir, les Étoiles parurent; mais la Lune qui approchoit de son plein, répandoit une lumière qui empêchoit de bien juger des apparences de la Comète; on la voyoit cependant un peu plus belle, & la queue plus sensible que le 3, ce qui pouvoit provenir de ce que la Lune étoit plus éloignée de la Comète que le jour précédent. Je déterminai le lieu de la Comète par trois étoiles des Poissons; les positions sont rapportées dans la première Table, & celles des trois Étoiles dans la seconde.

Depuis le 4 Février jusqu'au 10 du même mois, le ciel fut couvert les soirs d'un brouillard épais & constant; le 10 au soir, le ciel s'éclaircit en grande partie, il étoit sans Lune; la Comète se faisoit voir à la simple vue, avec une queue de 2 degrés $\frac{1}{2}$ de longueur, d'une lumière très-

foible; le noyau étoit brillant, environné de nébulosité. Auprès de la Comète étoit une Étoile de septième grandeur, qui n'avoit pas encore été déterminée; je trouvai sa position, en la comparant directement à l'étoile C^2 des Poissons, ainsi qu'une autre Étoile de même grandeur: la Comète fut comparée à ces deux nouvelles Étoiles & aux étoiles connues C^1, C^2 des Poissons. Les positions de la Comète, qui ont résulté de ces observations, sont rapportées dans la première Table, & celles des Étoiles dans la seconde.

Les 11, 12 & 13 Février, il ne fut pas possible de voir la Comète, à cause du brouillard. Le 14, vers les sept heures du soir, le ciel s'éclaircit en partie, mais l'horizon étoit tellement couvert de brouillard, qu'il ne fut pas possible de voir la Comète. Le ciel continua d'être couvert jusqu'au 23, qu'il commença à s'éclaircir, le Soleil parut le matin & l'après-midi; après son coucher, le ciel se couvrit d'un léger brouillard qui affoiblissoit la lumière des Étoiles. Je cherchai la Comète assez long-temps dans l'endroit du ciel où elle devoit se trouver d'après mes précédentes déterminations; je la vis enfin, mais près de l'horizon où le ciel étoit devenu le plus clair: on la voyoit assez bien à la lunette; mais le peu de temps qui me restoit, ne me permit d'en faire qu'une observation. J'observai le passage de la Comète au fil horaire du micromètre, & j'attendis, après ce passage, celui de quelqu'Étoile. Il en passa une qui ne m'étoit pas connue, & sa lumière se trouvoit fort affoiblie par le brouillard; elle laissa une petite incertitude à son passage au fil horaire, de manière que cette détermination de la Comète doit être regardée comme un peu douteuse. Je recherchai ensuite l'Étoile, & je la comparai, le 7 Mars, à la soixante-seizième de Pégase, suivant Flamstéed; ayant obtenu sa position, je déterminai celle de la Comète: on la trouvera dans la première Table qui est à la suite de ce Mémoire.

Depuis le 23 Février jusqu'au 29, le ciel couvert ne

permit pas de revoir la Comète; mais le 29, le ciel devint parfaitement beau toute la journée: ce jour sembloit être le seul de l'hiver qui fût presque sans brouillard. Je cherchai, malgré un grand crépuscule, l'étoile γ (algenib) de l'aile de Pégase, qui me servit à trouver la Comète; ses apparences étoient bien diminuées depuis ma dernière observation; on ne faisoit plus que lui soupçonner une queue bien foible; on distinguoit encore fort bien la nébulosité, le noyau étoit très-apparent. La Comète paroissoit entre les deux étoiles δ & φ de Pégase, j'estimai cette dernière Étoile de cinquième grandeur; Flamstéed, dans son Catalogue, la rapporte de la sixième. Je comparai la Comète à ces deux Étoiles, & à deux autres Étoiles de septième grandeur, qui n'étoient pas connues; leurs positions furent déterminées en les comparant à l'étoile δ. De ces observations j'ai conclu le lieu de la Comète en ascension droite & en déclinaison; on les trouvera dans la première Table.

Le 1.er Mars au soir, le ciel étoit assez beau au couchant. Je cherchai avec la grande lunette l'étoile φ de Pégase, près de laquelle la Comète étoit le jour précédent; je ne tardai pas à voir la Comète, elle fut comparée trois fois à cette Étoile: les positions en sont rapportées dans la première Table. Les apparences de la Comète étoient bien affoiblies, soit par les vapeurs de l'horizon, soit par la grande lumière de la Lune; le noyau avoit encore de la lumière, il étoit environné d'une nébulosité sensible, mais sans aucune apparence de queue.

Le 2 Mars au soir, je vis la Comète un moment sans pouvoir l'observer; elle étoit près de l'horizon & dans les vapeurs.

Depuis le 2 jusqu'au 8, je ne pus revoir la Comète, à cause du mauvais temps; mais le 8 au soir, le ciel fut très-beau. Pour trouver la Comète, je cherchai les étoiles φ & r de Pégase, la Comète devoit être sur le parallèle de cette dernière; mais le crépuscule alors étoit encore

trop confidérable pour l'apercevoir, il fallut attendre beaucoup plus tard que la vue des Étoiles pour l'obferver; fa lumière étoit très-foible & fon mouvement très-ralenti. Je la comparai aux étoiles r^1 & r^2 de Pégafe, & à une troifième Étoile de feptième grandeur, qui n'étoit pas déterminée; je trouvai fon lieu, en la comparant à r^2; de la comparaifon de la Comète à ces Étoiles, je conclus fa pofition qu'on trouvera dans la première Table, & celle des Étoiles dans la feconde. L'étoile r^1, fixième grandeur, fe trouve placée fur les Cartes de Flamftéed, mais fa pofition n'eft pas rapportée dans fon grand Catalogue; j'ai été obligé de déterminer fon lieu par r^2.

Le 11 Mars, beau temps le foir; je cherchai la Comète près de l'horizon, dans le crépufcule, fur le parallèle de l'étoile *y* de Pégafe; j'obfervai trois fois le paffage de cette Etoile au fil horaire du micromètre, comptant y voir paffer enfuite la Comète, mais il ne fut pas poffible de la voir: l'Étoile defcendit derrière une maffe de cheminées. Je commençai alors à voir la Comète qui ne devoit pas tarder, de même que l'Étoile, à fe perdre derrière la maffe de cheminées; mais j'obfervai fon paffage au fil horaire du micromètre, & j'attendis enfuite celui de quelques Étoiles; il en paffa deux de feptième grandeur, qui ne fe trouvent pas dans les Catalogues. Comme ces deux Étoiles fe rencontroient fur le parallèle de l'étoile *y* de Pégafe, les jours fuivans je les recherchai & les comparai à l'étoile *y*; & de leurs déterminations, j'ai conclu le lieu de la Comète, que l'on trouvera dans la première Table. L'obfervation fut un peu douteufe, à caufe du crépufcule, du voifinage de la Comète à l'horizon, & de la grande foibleffe de fa lumière. Cette obfervation eft la dernière que j'aie pu faire avant l'entrée de la Comète dans les rayons du Soleil.

Les élémens de fon orbite, que M. Méchain avoit déduits de fes premières obfervations, avoient fait reconnoître le temps & le lieu du ciel où on devoit la

recherche le matin après sa conjonction. M. Méchain commença à la revoir le 10 du mois de Mai, peu de minutes après minuit; je l'observai le 16 du même mois par un très-beau temps; la lumière de la Comète étoit extrêmement foible ; il fallut employer une excellente lunette, & la moindre lumière employée pour éclairer les fils du micromètre, étoit presque suffisante pour la faire disparoître. Cependant je comparai la Comète à trois Étoiles qui étoient de la constellation d'Andromède, rapportées dans le Catalogue de Flamstéed; je les ai réduites au temps présent, & on les trouvera dans ma seconde Table; la position de la Comète, qui en a résulté, est dans la première.

Le 18 Mai au matin, le ciel parfaitement beau, j'observai la Comète, sa lumière étoit toujours très-foible; je la comparai aux étoiles, *n.os 2, 6, 13,* & *1* d'Andromède, suivant Flamstéed; j'en conclus la position de la Comète, que l'on trouvera dans la première Table.

Le 21 au matin, le ciel parfaitement beau & pur, la Comète fut comparée directement à l'étoile $\varkappa$ d'Andromède, de quatrième grandeur, & à quatre autres Étoiles qui n'étoient pas encore connues; je déterminai leurs positions en les comparant à l'étoile $\varkappa$; & de la comparaison de ces Étoiles avec la Comète, j'ai déduit la position de celle-ci en ascension droite & en déclinaison.

Le 23 au matin, le ciel également beau & pur, les apparences de la Comète étoient encore diminuées, la moindre lumière employée pour éclairer les fils du micromètre, étoit suffisante pour la faire disparoître; sa lumière étoit d'une nuance claire & presque égale, on voyoit à peine le noyau. Je la comparai avec l'étoile onzième du Lézard, cinquième grandeur, suivant Flamstéed; avec $\varkappa$ d'Andromède, de la quatrième, & plusieurs Étoiles qui n'avoient pas encore été déterminées, mais que je déterminai en les comparant à des Étoiles connues: la position

de la Comète qui a résulté de ces observations, est rapportée dans la première Table, celles des Étoiles sont dans la seconde.

Le 26 de Mai au matin, par un beau temps, le ciel pur, j'observai la Comète pour la dernière fois; elle avoit perdu depuis la dernière observation presque toute sa lumière, on ne faisoit plus que la soupçonner dans le champ de la lunette, quoique les fils du micromètre ne fussent point éclairés; ce n'étoit plus qu'une tache de lumière très-foible & égale, sans aucune apparence de noyau; son passage au fil horaire du micromètre ne fut qu'estimé. L'observation fut répétée plusieurs fois avec des Étoiles, & j'ai pris un milieu pour avoir sa position; on la trouvera dans la première Table, & celles des Étoiles dans la seconde: cette observation est la dernière que j'aie pu faire sur cette Comète. Mes observations vont depuis le 3 Février au soir jusqu'au 26 de Mai au matin, ce qui fait cent quatorze jours. Pendant cet intervalle de temps, j'ai eu huit jours d'observations le soir, avant que la Comète entrât dans les rayons du Soleil; & cinq le matin, après sa conjonction, ce qui fait treize jours: ces treize jours d'observations m'ont donné cinquante-sept déterminations du lieu de la Comète, en ascension droite & en déclinaison; elles sont rapportées dans la Table qui suit.

La première Table contient les lieux de la Comète en ascension droite & en déclinaison, avec les différences de passage entre la Comète & les Étoiles au fil horaire du micromètre, & les différences en déclinaison entre la Comète & l'Étoile, à laquelle elle a été comparée. Ces différences sont marquées des signes + & —; le premier, indique qu'il faut ajouter ces différences observées, aux positions des Étoiles, avec lesquelles la Comète a été comparée, pour avoir celles de la Comète; le second qu'il faut ôter, & l'on aura l'ascension droite & la déclinaison de la Comète.

La seconde Table renferme les ascensions droites & les déclinaisons

déclinaiſons des Étoiles qui ont été employées à la détermination du lieu de la Comète, tant celles qui ont été priſes en différens Catalogues, que les nouvelles Étoiles que j'ai déterminées : ces nouvelles Étoiles ſont au nombre de vingt-quatre. Leurs poſitions ſont réduites au temps des obſervations ; je n'y ai fait d'autre réduction que celle qu'on trouve dans les Catalogues, ſous le titre de *Variation annuelle.*

Je joins auſſi à ce Mémoire une Carte céleſte que j'ai conſtruite d'après mes obſervations. Cette Carte eſt diviſée en degrés d'aſcenſion droite & de déclinaiſon ; j'y ai rapporté les poſitions & la route apparente de la Comète parmi les Étoiles fixes : à l'inſpection de cette Carte, il ſera aiſé de juger de la poſition de la Comète obſervée & de celles des Étoiles qui ont ſervi à ſa détermination ; je les ai renfermées dans un cercle. J'ai rapporté auſſi, ſur cette Carte, la première obſervation, de M. le Comte de Caſſini, du 24 Janvier. On verra par cette Carte, que la Comète a commencé à paroître près de la queue de la Baleine ; qu'elle a traverſé l'Écliptique & l'Equateur dans les premiers jours de Février ; qu'elle a paſſé dans les Poiſſons, traverſé Pégaſe, & qu'elle a ceſſé de paroître entre le Lézard & la main droite d'Andromède.

Cette Comète avoit été vue, à l'Iſle-de-Bourbon le 15 Décembre 1783 ; au Cap de Bonne-eſpérance, le 10 Janvier ſuivant ; le 16, à la Guadeloupe, par M. Tondu ; le 20, à Malte, par M. le Chevalier d'Angos : aucune de ces obſervations ne m'eſt parvenue.

M. Méchain a calculé les élémens de l'orbite de cette Comète, d'après ſes obſervations, depuis le 24 Janvier juſqu'au 26 de Mai : les voici comme il les a donnés dans la Connoiſſance des Temps de 1788, *page 334.*

Lieu du nœud aſcendant.	1^s 26^d $49'$ $21''$
Inclinaiſon de l'orbite.	51. 9. 12.
Lieu du périhélie.	2. 20. 44. 24.
Logarithme de la diſtance périhélie.	9,849946.

Paſſage au périhélie, 21 Janv. 1784, à 4^h $56'$ $47''$, t. moyen à Paris.
Sens du mouvement, rétrograde.

TABLE I.

Des Lieux apparens de la première Comète de 1784, comparée aux Étoiles fixes.

1784.	TEMPS VRAI.	ASCENSION droite de la Comète obſervée.	DÉCLINAIS. de la Comète obſervée. Boréale	DIFFÉRENCE en aſcenſ. dr. de la Comète avec les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinaiſ. entre la Comète & les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec leſquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Février 3	6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	+ 1. 46. 30	+ 0. 13	5	λ	des Poiſſons.
	6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	+ 0. 5. 45	— 24. 51	7	17	déterminée.
	6. 5. 9	354. 32. 14	0. 35. 57	— 0. 28. 37	— 26. 12	7	19	déterminée.
	6. 36. 13	354. 32. 14	0. 37. 1	+ 1. 46. 30	+ 1. 17	5	λ	des Poiſſons.
	6. 36. 13	354. 32. 21	0. 37. 1	— 0. 58. 15	— 17. 22	6	506	de la Caille.
	6. 36. 13	354. 32. 14	0. 37. 14	+ 0. 5. 45	— 23. 29	7	17	déterminée.
	6. 36. 13	354. 32. 6	0. 37. 16	— 0. 28. 45	— 24. 53	7	19	déterminée.
	7. 3. 55	354. 32. 14	0. 38. 29	+ 1. 46. 30	+ 2. 45	5	λ	des Poiſſons.
4	6. 19. 12	354. 32. 26	1. 40. 52	+ 0. 41. 52	— 36. 23	5	501	de la Caille.
	6. 23. 18	354. 32. 26	1. 40. 44	+ 0. 41. 52	— 36. 31	5	501	la même.
	6. 57. 10	354. 32. 18	1. 42. 32	+ 8. 2. 45	— 23. 54	4	γ	des Poiſſons.
	7. 1. 24	354. 32. 41	1. 42. 40	+ 0. 42. 7	— 34. 35	5	501	de la Caille.
	7. 6. 37	354. 32. 34	1. 42. 43	+ 0. 42. 0	— 34. 32	5	501	
	7. 6. 37	354. 32. 34	1. 42. 43	— 0. 41. 30	— 1. 23	6	22	des Poiſſons.
10	6. 39. 31	354. 23. 24	7. 1. 26	+ 0. 6. 0	— 1. 30	7	16	déterminée.
	6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	— 3. 28. 30	— 15. 27	5.6	c²	des Poiſſons.
	6. 47. 13	354. 23. 47	7. 1. 45	— 3. 26. 30	— 43. 10	6	c¹	
	6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	— 1. 44. 45	0. 0	7	20	
	6. 47. 13	354. 23. 16	7. 1. 36	+ 0. 5. 52	— [illegible]. 20	7	16	déterminées.
	7. 17. 33	354. 23. 1	7. 2. 56	+ 0. 5. 37	0. 0	7	16	
	7. 17. 33	....	7. 2. 49	....	— 14. 14	5.6	c²	des Poiſſons.
23	6. 14. 11	353. 47. 59	14. 45. 7	— 4. 3. 45	— 17. 57	7	23	déterminée.
29	6. 46. 38	353. 29. 42	17. 20. 54	+ 1. 45. 0	+ 9. 18	6	δ	de Pégaſe.
	6. 46. 38	353. 29. 46	17. 20. 58	+ 0. 37. 0	— 6. 19	7	13	déterminée.
	6. 55. 40	353. 30. 4	17. 20. 58	+ 1. 45. 22	+ 9. 22	6	δ	de Pégaſe.
	6. 55. 40	353. 30. 1	17. 21. 0	+ 0. 37. 15	— 6. 18	7	13	déterminées.
	6. 55. 40	353. 30. 4	17. 20. 58	+ 1. 10. 30	+ 20. 18	7	12	
	6. 59. 53	353. 30. 10	17. 21. 59	— 1. 51. 30	— 32. 55	5	φ	
	7. 9. 36	353. 29. 55	17. 22. 9	— 1. 51. 45	— 32. 45	5	φ	de Pégaſe.
Mars... 1	6. 37. 25	353. 27. 10	17. 45. 11	— 1. 54. 30	— 9. 43	5	φ	

Suite de la Table des Lieux apparens de la première Comète, &c.

1784.	TEMPS vrai.	ASCENSION droite de la Comète observée.	DÉCLINAIS. de la Comète observée. Boréale.	DIFFÉRENCE en ascens. dr. de la Comète avec les Étoiles.	DIFFÉRENCE en déclinais. de la Comète avec les Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	Lettres & N.° des Étoiles.	ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.			
Mars... 1	6. 46. 49	353. 27. 33	17. 45. 17	— 1. 54. 7	— 9. 37	5	φ	
	6. 56. 17	353. 27. 40	17. 45. 23	— 1. 54. 0	— 9. 31	5	φ	
8	6. 54. 22	353. 12. 8	20. 21. 56	— 2. 12. 37	— 10. 7	6	r^2	de Pégase.
	6. 54. 22	353. 12. 8	20. 21. 56	— 2. 8. 37	— 5. 38	6	r^1	
	6. 54. 22	353. 12. 12	20. 21. 52	— 0. 19. 45	+ 10. 32	7	15	déterminée.
	7. 6. 54	353. 11. 45	20. 22. 14	— 2. 13. 0	— 9. 49	6	r^1	de Pégase.
	7. 6. 54	353. 11. 45	20. 22. 8	— 2. 9. 0	— 5. 26	6	r^2	
	7. 6. 54	353. 11. 42	20. 22. 18	— 0. 20. 15	+ 10. 58	7	15	
11	7. 13. 20	353. 6. 30	21. 25. 20	— 1. 29. 0	— 14. 13	7	18	déterminées.
	7. 13. 20	353. 6. 30	21. 25. 13	— 3. 19. 0	— 1. 46	7	22	
Mai... 15	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	+ 3. 22. 15	+ 18. 5	3.4	0	
	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	+ 3. 12. 0	— 7. 46	6	2	
	14. 9. 39	346. 22. 33	41. 28. 20	— 1. 2. 0	+ 34. 15	6	10	
17	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	+ 2. 37. 37	— 28. 35	6	2	d'Andromède.
	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	— 6. 5. 30	+ 0. 8	4	1	
	14. 3. 41	345. 47. 49	42. 5. 5	+ 0. 40. 45	— 18. 29	6.7	6	
	14. 3. 41	345. 48. 10	42. 4. 41	— 3. 23. 15	+ 20. 59	6	13	
20	13. 24. 46	344. 49. 21	42. 59. 26	— 0. 25. 7	+ 29. 36	7	6	déterminée.
	14. 10. 20	344. 48. 49	42. 59. 54	— 0. 18. 15	+ 36. 20	6.7	6	d'Andromède.
	14. 34. 17	344. 48. 19	42. 59. 50	— 0. 18. 45	+ 36. 16	6.7	6	
22	13. 32. 27	344. 6. 35	43. 36. 5	+ 6. 22. 0	+ 26. 13	5	11	du Lézard.
	13. 42. 41	344. 7. 20	43. 36. 32	— 0. 25. 30	+ 12. 13	8	5	déterminées.
	13. 50. 10	344. 7. 28	43. 36. 33	— 0. 25. 22	+ 12. 14	8	5	
	14. 0. 2	344. 7. 35	43. 36. 58	— 8. 18. 45	+ 28. 6	4	χ	
25	13. 11. 11	342. 59. 53	44. 30. 13	— 1. 27. 45	— 43. 44	6	4	d'Andromède.
	13. 58. 19	342. 59. 38	44. 30. 14	— 1. 28. 0	— 43. 43	6	4	
	14. 19. 36	342. 59. 46	44. 30. 17	— 1. 27. 52	— 43. 40	6	4	

TABLE II.

Des Ascensions droites & des Déclinaisons des Étoiles avec lesquelles la première Comète de 1784 a été comparée.

Leurs positions sont réduites au temps de l'Observation.

Ascension droite des Étoiles. D. M. S.	Déclinaison Boréale des Étoiles. D. M. S.	Grandeur des Étoiles.	N.° des Étoiles.	Noms des Étoiles. qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
337. 44. 35	43. 9. 52	5	11	du Lézard, comparée à l'Étoile nouvelle *n.° 5*. Comète comparée le 22 Mai.
339. 8. 5	43. 26. 22	6	1	nouvelle, comparée à la onzième du Lézard.
340. 58. 35	43. 36. 49	6	2	nouvelle, déterminée par la onzième du Lézard.
342. 42. 38	44. 13. 53	8	3	nouvelle, dét. la Comète en étoit près le 25 Mai.
343. 0. 18	41. 10. 15	3.4	o	d'Andromède, déduite de la Caille. Comète comparée le 15 Mai.
343. 10. 33	41. 36. 6	6	2	d'Andromède, comparée à *o*. Comète comparée les 15 & 17 Mai.
344. 22. 8	44. 54. 46	7	4	nouvelle, déterminée par le *n.° 4* d'Andromède.
344. 27. 38	45. 13. 57	6	4	d'Andromède, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 25 Mai.
344. 32. 50	43. 24. 19	8	5	nouvelle, déterm. par κ d'Andromède. Comète comparée le 22 Mai.
345. 7. 4	42. 23. 34	6.7	6	d'Andromède, comparée au *n.° 2*. Comète comp. les 17 & 20 Mai.
345. 14. 28	42. 29. 50	7	6	nouvelle, déterminée par κ d'Andromède. Comète comparée le 20 Mai.
346. 15. 53	45. 21. 26	7	7	nouvelle, comparée à l'Étoile *n.° 4* d'Andromède.
346. 29. 33	2. 6. 26	4	γ	des Poissons, déduite de Mayer. Comète comparée le 4 Février.
347. 24. 33	40. 54. 5	6	10	d'Andromède, comp. à *o*. Com. comp. le 15 Mai.
347. 37. 20	42. 55. 52	7	8	nouvelle, comparée à la nouvelle Étoile *n.° 6*.
349. 11. 25	41. 43. 42	6	13	d'Andromède, comparée au *n.° 2*. Comète comp. le 17 Mai.
349. 47. 23	45. 17. 4	6	9	nouvelle, déterm. par l'étoile *n.° 4* d'Andromède.
350. 40. 0	21. 18. 56	6	*y*	Pégase, déterminée par son passage au Méridien.
350. 51. 30	45. 29. 52	6	10	nouvelle, déterm. par l'Étoile *n.° 4* d'Andromède.
351. 44. 28	43. 14. 42	5	11	nouvelle, déterminée par l'Étoile κ d'Andromède.
351. 44. 42	17. 11. 36	6	*S*	Pégase, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 29 Février.
351. 53. 40	42. 4. 33	4	*ι*	d'Andromède, déd. de l'étoile *n.° 2* d'Andromède. Comète comparée le 17 Mai.
352. 19. 34	17. 0. 40	7	12	nouvelle, comparée à *S* de Pégase. Comète comparée le 29 Février.

Suite de la Table des Ascensions droites, &c.

ASCENSION droite des Étoiles.	DÉCLINAISON Boréale des Étoiles.	Grandeur des Étoiles.	N.° des Étoiles.	NOMS DES CONSTELLATIONS qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète.
D. M. S.	D. M. S.			
352. 26. 20	43. 8. 52	4	κ	d'Andromède, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 22 Mai.
352. 45. 44	0. 35. 44	5	λ	Poissons, déduite de Mayer. Comète comparée le 3 Février.
352. 52. 46	17. 27. 18	7	13	nouvelle, déterminée par $\mathfrak{S}$ de Pégase. Comète comparée le 29 Février.
352. 55. 44	15. 8. 1	6	76	de Pégase, déduite du catalogue de Flamstéed.
353. 30. 27	42. 33. 36	7	14	nouvelle, déterminée par l'Étoile κ d'Andromède.
353. 31. 57	20. 11. 20	7	15	nouvelle, déterminée par r^2 de Pégase. Comète comparée le 8 Mars.
353. 50. 34	2. 17. 15	5	501	de la Caille, milieu pris avec Mayer. Comète comparée le 4 Février.
354. 17. 24	7. 2. 56	7	16	nouvelle, déterminée par c^2 des Poissons. Comète comparée le 10 Février.
354. 26. 29	1. 0. 48	7	17	nouvelle, déterminée par λ des Poissons. Comète comparée le 3 Février.
354. 35. 30	21. 39. 33	7	18	nouvelle, déterminée par y de Pégase. Comète comparée le 11 Mars.
355. 0. 51	1. 2. 9	7	19	nouvelle, déterminée par λ des Poissons. Comète comparée le 3 Février.
355. 14. 4	1. 44. 6	6	22	Poissons, Flamstéed, comp. à la cinq cent-unième de la Caille. Comète comparée le 4 Février.
355. 20. 45	20. 27. 34	6	r^1	de Pégase, déterm. par r^2. Com. comp. le 8 Mars.
355. 21. 40	17. 54. 54	5	φ	Pégase, déduite de Flamstéed. Comète comparée les 20 Février & 1.er Mars.
355. 24. 45	20. 32. 3	6	r^2	Pégase, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 8 Mars.
355. 30. 36	0. 54. 23	6	506	de la Caille, milieu avec Flamstéed. Comète comparée le 3 Février.
356. 8. 1	7. 1. 36	7	20	nouvelle, déterminée par c^2 des Poissons. Comète comparée le 10 Février.
356. 14. 7	19. 52. 20	6	21	nouvelle, déterminée par r^1 de Pégase.
356. 25. 30	21. 26. 59	7	22	nouvelle, déterminée par y de Pégase. Comète comparée le 11 Mars.
357. 50. 17	7. 44. 55	6	c^2	Poissons, déduite de Flamstéed. Comète comparée le 10 Février.
357. 51. 44	15. 3. 4	7	23	nouvelle, déterminée par la soixante-seizième de Pégase. Comète comparée le 23 Février.
357. 51. 46	7. 17. 3	5.6	c^3	Poissons, déduite de Flamstéed & de la Caille, milieu. Comète comparée le 10 Février.
1. 46. 4	2. 35. 25	7	24	nouvelle, déterminée par l'Étoile cinq cent unième de la Caille.

Nota. L'étoile r^1 de Pégase, sixième grandeur, ne se trouve pas dans le grand catalogue de Flamstéed, mais il l'a rapportée sur ses Cartes : j'ai déterminé sa position par r^2. Pour l'étoile *o*, la première d'Andromède, dans le catalogue de Flamstéed, la distance au Pôle est rapportée de 40^d 19' 30"; on doit lire 49^d 19' 30": l'ascension droite de cette Étoile est bonne quoique j'aie mis (*Mém. de l'Acad. année 1775, page 458*) qu'il y avoit 12' 15" d'erreur.

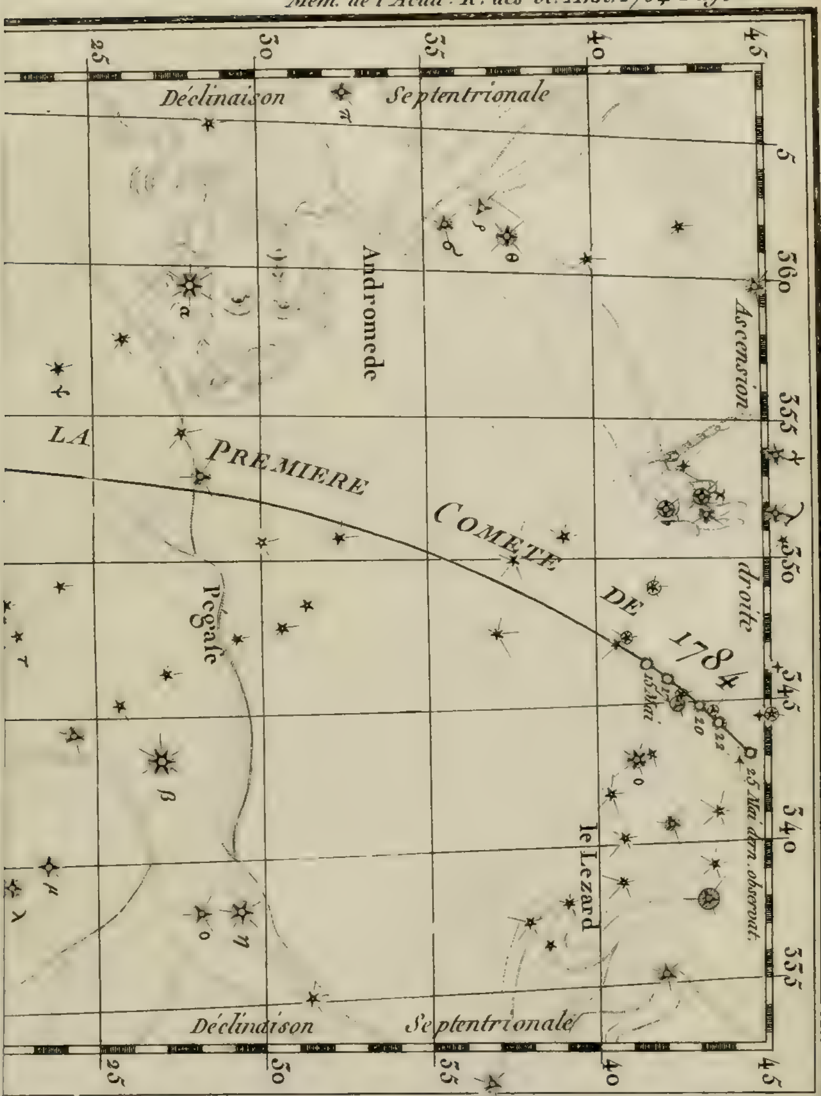
SECONDE COMÈTE *de* 1784.

CETTE seconde Comète, de 1784, fut découverte à Malte, dans la constellation du Renard, le 11 Avril, par M. le chevalier d'Angos.

Le 14 du mois de Mai suivant, je reçus une Lettre, datée de Malte, le 15 Avril, dans laquelle il me l'annonçoit : voici l'extrait de sa Lettre.

« J'ai découvert une nouvelle Comète, le 11 Avril, » dans la constellation du Renard; elle est fort petite, sans » queue, & n'a qu'une légère apparence de nébulosité : je la » pris pour une nébuleuse ; cependant je déterminai exac- » tement sa position. Je ne pus la voir le lendemain à cause » du brouillard. Le 13 je fus assuré que c'étoit une Comète, » mais les nuages m'empêchèrent de l'observer : le 14 je ne » fus pas plus heureux, je vis seulement à peu-près la direc- » tion de son mouvement; mais je l'ai bien observée aujour- » d'hui 15, je l'ai jugée un peu plus lumineuse; peut-être » cela vient-il de ce que l'atmosphère étoit plus pure; voici mes premières observations de chaque jour ».

ANNÉE 1784.	TEMPS VRAI.	ASCENSION. DROITE.	DÉCLIN. BORÉALE.
	H. M.	*D. M.*	*D. M.*
Avril 11	2. 31	315. 18	22. 21.
15	3. 18	307. 55	15. 28.


Déclinaison Septentrionale
Andromede
Ascension droite
LA PREMIERE COMETE DE 1784
Pegase
le Lezard
15 Mai
20
22
25 Mai dern. observat.
Déclinaison Septentrionale
25
30
35
40
45
5
360
355
350
345
340
335



Gravé par Y. le Gouaz, d'après le Dessin de Mr. Messier

Le lendemain de la réception de ſa Lettre, le 15 Mai, par un ciel parfaitement beau & pur, je cherchai cette Comète avec ma grande lunette achromatique; je parcourus non-ſeulement toute la conſtellation du Renard, mais auſſi une grande partie du ciel. Je fis ces recherches non-ſeulement le 15, mais pluſieurs autres nuits, & il ne me fut pas poſſible de l'apercevoir; je ne trouvai, dans le Renard, que la belle nébuleuſe, ſans étoile, & ſous une forme ovale que j'avois découverte le 12 Juillet 1764, qui avoit alors $297^d\ 21'\ 41''$ d'aſcenſion droite, & $22^d\ 4'$ de déclinaiſon boréale. Cette nébuleuſe eſt rapportée dans mon Mémoire imprimé dans le volume de l'Académie, *année 1771, page 435*, ſous le *N.° 27*. C'eſt dans le voiſinage de cette belle nébuleuſe, que M. le chevalier d'Angos a découvert cette Comète.

Cette Comète a été ſans doute très-petite & de peu de durée, & il ne paroît pas qu'aucun Aſtronome de l'Europe l'ait obſervée. Il n'en eſt parvenu aucune obſervation à l'Académie, ni à ma connoiſſance, & M. le chevalier d'Angos paroît être le ſeul qui l'ait obſervée. Il a eu aſſez d'obſervations pour calculer les élémens de ſon orbite: les voici comme il me les a envoyés, & comme M. Pingré les a donnés à l'Académie, le 7 Décembre 1784.

Lieu du nœud aſcendant.	$2^s\ 26^d\ 52'\ 9''$
Inclinaiſon de l'orbite.	47. 55. 10.
Lieu du périhélie.	10. 28. 54. 57.
Logarithme de la diſtance périhélie.	9,8132683.

Paſſage par ſon périhélie, le 9 Avril 1784, à $21^h\ 16'\ 46''$, temps moyen, méridien de Paris.

Sens du mouvement. . . . . rétrograde.

M. le chevalier d'Angos ne nous a envoyé d'autres obſervations de cette Comète, que les deux déterminations de ſon lieu, que je viens de rapporter.

OBSERVATION DE L'ÉCLIPSE DE LUNE,

Faite à l'obſervatoire de la Marine, hôtel de Clugny, la nuit du 6 au 7 Mars 1784.

Par M. MESSIER.

LA Lune, avant le commencement de l'éclipſe, paroiſſoit à travers des nuages rares, & ſa lumière en étoit affoiblie ; ces nuages continuèrent d'exiſter, de manière que le commencement de l'éclipſe fut douteux, on ne pouvoit juger des limites de l'ombre que très-imparfaitement. Les obſervations du commencement de l'éclipſe, des immerſions des taches, & la meſure de la grandeur de l'ombre, furent incertaines juſqu'à $14^h 45' 27''$, que la Lune ſe découvrit; l'ombre alors ſur la Lune, paroiſſoit belle, brune & bien terminée : on obſervoit que l'ombre étoit plus foncée au bord, que dans la partie intérieure qui couvroit déjà une partie de la Lune. Les obſervations qui furent faites pendant le temps que la Lune parut claire, durèrent juſqu'à $15^h 31' 50''$; des nuages alors très-épais s'élevèrent de l'horizon, pouſſés par un vent aſſez fort du Sud-eſt, & couvrirent la Lune entièrement : vers 16^h, il commença à pleuvoir. La Lune ayant reparu dans un intervalle de nuage, j'obſervai la grandeur de l'ombre; enſuite des nuages épais la couvrirent de nouveau juſqu'à la fin ; la pluie augmenta, & elle tomboit très-fort à 6 & à 7 heures du matin, le 7.

J'ai employé à cette obſervation, une grande lunette achromatique de 40 lignes d'ouverture, & un groſſiſſement de quarante fois; elle étoit garnie d'un micromètre à fils, qu'on pouvoit incliner dans tous les ſens.

L'éclipſe

L'éclipſe commença entre les taches de *Ariſtarchus* & *Harpalus*.

TABLE des Obſervations des Taches.

TEMPS VRAI.	N.os des Taches.	TACHES OBSERVÉES.
H. M. S.		
14. 16. 1	....	Pénombre foible.
14. 22. 0	....	Pénombre plus forte.
14. 25. 0	....	Commencement de l'éclipſe, douteux.
14. 31. 53	7	*Harpalus* au bord de l'ombre.
14. 36. 13	8	*Heraclides* au bord de l'ombre.
14. 38. 32	12	*Helicon* au bord de l'ombre.
14. 39. 48	3	*Ariſtarchus* au bord de l'ombre.
14. 45. 27	17	*Plato* au bord de l'ombre.
14. 46. 36	17	*Plato* entré.
15. 2. 2	....	Tache entre *Copernicus* & *Helicon*, au bord de l'ombre.
15. 2. 34	2	*Galileus* au bord de l'ombre.
15. 3. 34	4	*Keplerus* au bord de l'ombre.
15. 5. 23	*F*	*Mare-Serenitatis* entre dans l'ombre.
15. 16. 56	27	*Poſſidonius* au bord de l'ombre.
15. 17. 1	*G*	*Mare-Imbrium* entré dans l'ombre.
15. 19. 15	27	*Poſſidonius* à moitié dans l'ombre.
15. 20. 41	27	*Poſſidonius* dans l'ombre.
15. 21. 55	11	*Copernicus* au bord de l'ombre.
15. 24. 41	*F*	*Mare-Serenitatis* à moitié dans l'ombre.
15. 25. 50	2	*Galileus* s'éloigne de l'ombre, elle étoit reſtée au bord de l'ombre.
15. 31. 50	....	La Lune diſparoît dans un nuage très-épais.

Il eſt tombé de la pluie enſuite qui a continué. *Keplerus*

n'eſt entré dans l'ombre que de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$. *Copernicus* étoit reſté juſqu'à ce moment au bord de l'ombre.

La fin de l'écliple n'a pu être obſervée à cauſe du mauvais temps.

OBSERVATION de la grandeur de l'ombre, & du diamètre de la Lune.

TEMPS. VRAI.	GRANDEUR obſervée.	
H. M. S.	M. S.	
14. 34. 38	3. 21	Grandeur de l'ombre.
14. 41. 21	4. 39	Grandeur de l'ombre.
14. 48. 30	7. 17	Grandeur de l'ombre.
14. 50. 56	30. 24	Diamètre de la Lune, perpendiculaire à ſon parallèle.
14. 55. 28	8. 13	Grandeur de l'ombre.
15. 7. 0	10. 16	Grandeur de l'ombre.
15. 23. 16	12. 7	Grandeur de l'ombre.
16. 7. 34	10. 13	Grandeur de l'ombre.

Nota. Une minute après cette dernière obſervation de la grandeur de l'ombre, la Lune entra dans un nuage très-épais, & ce que je viens de rapporter, eſt tout ce que j'ai pu obſerver de cette éclipſe.

Pendant tout le temps de ces obſervations, j'avois toujours vu le bord éclipſé de la Lune à travers l'ombre.

VÉRIFICATION (a)

DES NOUVELLES DÉCOUVERTES

Faites en Angleterre, ſur les Étoiles fixes.

Par M. CASSINI.

LORSQUE le célebre Huygens eut fait connoître en 1655, un ſatellite auprès de Saturne, on crut pendant long-temps qu'il ne pouvoit plus reſter d'autre planète à découvrir. Cette opinion étoit en partie fondée ſur l'idée aſſez ſingulière, que le nombre des ſatellites, qui ſe trouvoit alors de ſix, ne pouvoit ſurpaſſer celui des planètes principales du même ſyſtème. Mais les découvertes de Jean-Dominique Caſſini, prouvèrent par la ſuite, que la Nature n'eſt point aſſervie à de ſuperſtitieuſes loix de nombre & d'égalité.

Après les dernières découvertes de Caſſini, on devoit croire, à bien plus juſte titre, que notre ſyſtème planétaire étoit complet, & qu'à l'exception des Comètes, nous pouvions nous flatter de connoître toutes les planètes compagnes de la Terre, & ſoumiſes comme elle à l'empire du Soleil; en effet, les plus grandes lunettes & les recherches des plus infatigables obſervateurs, pendant un ſiècle, n'avoient pu rien découvrir de nouveau. On fut donc bien étonné d'apprendre, dans ces derniers temps, environ cent années après la découverte du dernier ſatellite de Saturne, qu'il exiſtoit encore une planète du premier ordre, mue autour du Soleil, comme Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter & Saturne, ſuivant les mêmes loix, & décrivant une orbite également peu inclinée au plan de l'écliptique.

(a) L'Extrait de ce Mémoire a été lû à la rentrée publique de la Saint-Martin de l'année 1784.

Cette découverte, si inattendue, eut d'ailleurs des circonstances singulières. En effet, elle ne fut pas dûe à un Astronome, & le télescope merveilleux qui perça jusque dans la retraite éloignée de ce nouvel astre, ne fut point l'ouvrage d'un Opticien; enfin, ce fut M. Herschell, Musicien Allemand, à qui l'on dut la connoissance de cette septième planète principale, qui depuis tant de milliers d'années se promenoit en silence dans l'immense étendue d'une sphère reculée, ignorée & confondue avec les plus petites étoiles.

Dans l'usage ordinaire de l'Astronomie, lorsqu'il s'agit d'observer les éclipses des satellites de Jupiter, de distinguer leurs ombres, d'apercevoir les bandes & les taches qui se remarquent sur le disque de plusieurs planètes; la distinction parfaite de l'image, sa netteté, sa clarté, sont les effets les plus essentiels à obtenir dans l'exécution d'une lunette ou d'un télescope. Mais dans d'autres circonstances, comme celle où il s'agit principalement de découvrir & de percer dans les régions du ciel les plus reculées, de rapprocher de soi & de rendre plus visible un corps infiniment éloigné ou très-petit, c'est au grossissement alors qu'il convient particulièrement de s'attacher. Renonçant à la parfaite distinction, qui n'est plus la première condition, il faut, sans s'embarrasser des règles & des proportions prescrites, chercher à procurer à son télescope le plus grand pouvoir amplifiant, aux dépens même, jusqu'à un certain point, de la netteté des images. Qu'importe en effet que cette distinction soit moins parfaite, pourvu qu'elle permette de distinguer entr'eux les objets, & de s'assurer de leur existence.

On n'avoit point osé, avant M. Herschell, pousser plus loin qu'à trois ou quatre cents fois le grossissement des plus forts télescopes. M. Herschell franchit cette limite, il travailla lui-même avec un soin, des peines & une adresse infinies, des miroirs de télescope, dont il porta le grossissement jusqu'à trois mille fois. Quelle que fut la perfection

du travail de ces miroirs, un tel pouvoir amplifiant ne pouvoit certainement avoir lieu avec une parfaite diſtinction des images; mais cette diſtinction toutefois fut ſuffiſante pour diſtinguer dans le ciel & faire connoître un nombre conſidérable d'Étoiles fixes, que l'on n'avoit point encore remarquées, doubles, triples, quadruples, offrant par leurs différens groupes, leur diverſité de grandeur & de couleur, l'aſpect le plus ſingulier & le plus curieux.

L'annonce de ces nouveautés devoit faire, & fit en effet une grande ſenſation parmi les Savans. La nouvelle planète avoit à peine été annoncée, que tous les Aſtronomes avoient fixé ſur elle leurs regards. Leurs inſtrumens, à la vérité, n'ayant point la force & la perfection de celui de M. Herſchell, ils ne l'avoient aperçue que comme une étoile fort petite, n'ayant rien d'abord qui pût la faire diſtinguer des fixes qui l'environnoient; mais le mouvement propre qu'ils lui reconnurent, & ſa conformité aux loix que ſuivent les autres planètes, les forcèrent bientôt de l'admettre dans notre ſyſtème. Il n'en fut pas tout-à-fait de même par rapport aux étoiles doubles, triples & quadruples, annoncées par M. Herſchell; comme perſonne n'avoit, ou ne croyoit avoir d'inſtrument aſſez fort pour diſtinguer ces merveilles, il fallut y croire ſur ſa parole, & les Savans, comme l'on ſait, ne ſont point crédules: c'eſt-là, & ce doit être leur caractère diſtinctif, de celui de l'ignorant & de l'enthouſiaſte, qui croyent tout ſans examen, admettent tout ſans preuve, & finiſſent toujours par rougir d'avoir été les jouets de l'erreur. M. Herſchell annonçoit dans les Étoiles doubles une variété de couleur aſſez ſingulière, ce qui fit penſer à pluſieurs que cette apparence n'étoit produite que par une illuſion optique, & que ces Étoiles paroiſſoient doubles, de la même façon que Vénus avoit paru anciennement accompagnée d'un ſatellite. Il étoit donc bien important pour la gloire de M. Herſchell, & pour l'intérêt de la vérité, de pouvoir vérifier ces nouvelles découvertes, & c'eſt ce que j'ai eſſayé de faire.

Il exiſtoit à Paris, depuis deux ans environ, chez M. Sykes, un téleſcope de 5 pieds de foyer, ſupérieurement exécuté, parfaitement monté, tel, en un mot, qu'ont coutume de ſortir des mains de M. Dollond, tous les ouvrages de cet illuſtre artiſte: j'avois anciennement eſſayé ce téleſcope ſur Jupiter & ſur Saturne, avec un pouvoir amplifiant de 460 fois, & l'avois trouvé très-bon. Je fus averti au mois d'Août de cette année, que M. Dollond, encouragé par l'exemple & les eſſais de M. Herſchell, venoit d'envoyer d'Angleterre, à M. Sykes, pour le téleſcope qui étoit à Paris, ſix nouveaux oculaires, dont le moindre devoit groſſir ſept cents cinquante fois, & le plus fort trois mille. Je fus infiniment curieux de connoître l'effet de ces nouveaux oculaires, de voir, ſur-tout, comment de pareils groſſiſſemens ſeroient ſupportés par un miroir fait ſur les principes ordinaires, & ſans intention d'y appliquer des oculaires d'une ſi grande force. M. Sykes eut l'honnêteté de me confier ſon inſtrument pour le ſoumettre aux différens eſſais que je jugerois à propos d'en faire *(b)*.

J'eſſayai d'abord ſucceſſivement ces oculaires ſur Saturne, & comme je m'y attendois bien, Saturne, avec le groſſiſſement de trois mille, ne me parut que comme une maſſe de lumière. Avec celui de deux mille, je commençai à diſtinguer un peu l'anneau d'avec le globe; avec celui de mille, j'obtins plus de diſtinction dans l'image; mais il faut l'avouer, ſi je n'euſſe été prévenu, mon œil, peu ſatisfait de ces premiers eſſais, eût dès-lors mis au rebut tous ces oculaires, ſur-tout après les avoir eſſayés ſur Jupiter, dont aucun ne put me faire voir les bords terminés.

Je paſſai enſuite aux Étoiles, & me propoſant de parcourir ſucceſſivement toutes celles que M. Herſchell annonce comme remarquables, dans ſon catalogue imprimé dans les *Tranſactions Philoſophiques de 1782*, j'engageai M. Méchain, membre de cette Académie, a vouloir bien ſe

(b) Ce téleſcope a depuis été acquis pour l'Obſervatoire royal.

joindre à moi dans mes premières recherches; le témoignage d'un si bon observateur ne devant laisser aucun doute au public & à moi-même, sur ce que nous allions observer & remarquer de particulier.

Dans un Mémoire imprimé dans le soixante-douzième volume des *Transactions Philosophiques pour l'année 1782*, M. Herschell, rendant compte de ses découvertes, a divisé en six classes les Étoiles qu'il a observées avec son excellent télescope, & qu'il a trouvées dignes d'être distinguées par leur rapprochement entr'elles, leur position respective, leur petitesse, leur couleur.

On connoissoit bien déjà dans le ciel quelques Étoiles que l'on avoit appelées *doubles*, c'est-à-dire, qui à la vue ou avec de foibles lunettes, n'offrant l'apparence que d'une seule Étoile, se trouvoient composées de deux Étoiles séparées, sitôt qu'on les observoit avec des lunettes un peu fortes: telles sont les étoiles ζ de la Lyre, γ du Bélier, α des Gémeaux, γ de la Vierge, α de l'Hydre, &c. M. Herschell a appelé pareillement *étoiles doubles, triples & quadruples*, celles qui, observées avec son nouveau télescope, lui ont présenté un groupe de deux, trois & quatre Étoiles; il en a même remarqué qu'il appelle *doubles-doubles, doubles-triples*, parce qu'elles offrent l'assemblage de deux groupes peu éloignés, composés chacun de deux ou trois étoiles.

Dans la première classe, M. Herschell a rassemblé les Étoiles les plus difficiles à voir, parce qu'elles sont infiniment proches l'une de l'autre, & ne paroissent séparées qu'en faisant usage de très-forts grossissemens; il en compte 24 de cette espèce, savoir, 19 doubles & 5 triples *(c)*. La seconde classe composée de 38, renferme les Étoiles un peu plus séparées entr'elles, comme d'environ 5″. La troisième

(c) Depuis la lecture de ce Mémoire, M. Herschell, en 1785, a fait imprimer un nouveau catalogue d'Étoiles doubles, où la première classe se trouve portée à 97 Étoiles; la seconde, à 102; la troisième, à 114; la quatrième, à 132; la cinquième à 137; & la sixième à 121.

classe comprend celles encore plus éloignées entr'elles, depuis 5 jusqu'à 15 secondes; elles sont au nombre de 46. La quatrième, composée de 44 étoiles, comprend celles qui sont distantes de 15 à 30". La cinquième, celles qui sont distantes depuis 30 secondes jusqu'à une minute; elles sont au nombre de 51. Enfin, la sixième classe renferme les étoiles distantes entr'elles, depuis une minute jusqu'à deux: M. Herschell en rapporte 66.

Ce fut dans les mois d'Août, Septembre & Octobre, que profitant d'une saison & d'un ciel favorables, je me livrai à la recherche & à la vérification de ces Etoiles. Pour mieux accoutumer mon œil à ces observations, & connoître mon télescope, je commençai par observer les Étoiles les moins difficiles à voir, telle que la Polaire, qui est de la quatrième classe, & que M. Herschell désigne ainsi, *double, extrêmement inégale, la plus grosse Étoile de couleur blanche, la petite de couleur rouge.* En effet, la Polaire nous offrit l'assemblage de deux Étoiles, dont l'une très-brillante & blanche, l'autre au-dessus sur la droite, distante de la première d'environ 20 secondes, infiniment petite, de couleur plutôt bleuâtre que rouge: nous employames divers grossissemens qui nous présentèrent la même apparence.

Je ne rapporterai point ici toutes les Étoiles que j'observai pendant le cours de deux mois où je passai en revue toutes les Étoiles du catalogue de M. Herschell, visibles alors. M. Méchain s'étant joint plusieurs fois à moi, nous observions alternativement la même Étoile, & portant chacun séparément notre jugement sur la grandeur, la couleur & la distance, nous composions, de nos opinions réunies, la description de chaque Étoile, que nous comparions ensuite à celle de M. Herschell. Or nous devons dire que nous avons toujours trouvé exactement les Étoiles annoncées par M. Herschell, telles qu'il les a décrites, à quelques différences près sur les couleurs, différences qui peuvent tenir à la constitution momentanée de l'air, ou

ou à d'autres circonſtances. Il eſt, nous l'avouerons, quelques-unes de ces Étoiles qui ont certainement une couleur marquée & particulière, par exemple, plus ou moins rouge, quelquefois orangée, d'autres fois bleuâtre; mais ces couleurs ne nous ont paru remarquables & diſtinctes que dans les plus groſſes des Étoiles doubles. Il nous a ſemblé que les couleurs de bleu-de-ciel & de bleu-obſcur, que M. Herſchell attribue ſouvent aux plus petites Étoiles, n'étoient qu'une apparence dûe à leur petiteſſe: quant à nous, cette petiteſſe, la plupart du temps, ne nous a permis de leur diſtinguer aucune couleur.

La viſite générale que ces obſervations me donnèrent lieu de faire dans tout le ciel, me fit découvrir une quantité conſidérable d'Étoiles doubles & triples que M. Herſchell n'avoit point rapportées dans ſon catalogue. J'avois même commencé à en noter un certain nombre, mais voyant qu'il augmentoit à meſure que je parcourois de nouvelles conſtellations, & de plus ne doutant pas que M. Herſchell occupé de cette recherche, n'eût, depuis deux ans que ſon catalogue étoit imprimé, reconnu & fait la deſcription de ces mêmes Étoiles, je jugeai ce travail inutile, & crus même devoir reſpecter en cela l'eſpèce de propriété que M. Herſchell ſembloit avoir acquiſe ſur ces recherches. J'avouerai en outre, que je ne regardai comme vraiment curieuſes que les Étoiles renfermées dans les deux premières claſſes du catalogue, leſquelles, par leur extrême proximité, peuvent ſeules réellement mériter le titre d'*Étoiles doubles,* qui même n'eſt qu'un terme fort impropre: en effet, ces Étoiles doubles ne ſont autre choſe qu'un groupe de deux Étoiles fort proches l'une de l'autre, dont preſque toujours l'une eſt fort brillante, l'autre infiniment petite. Les triples offrent un groupe de trois Étoiles, dont communément l'une eſt groſſe, & les deux autres beaucoup plus petites; l'une eſt ordinairement très-proche de la plus groſſe, & l'autre plus éloignée. Ces petites Étoiles ſont, la plupart du temps, comme des points,

ſouvent d'une lumière aſſez obſcure : mais cette petiteſſe n'eſt peut-être dûe qu'à leur ſeul éloignement; la proximité réciproque, à leur ſeule direction par rapport à nous. Il peut donc y avoir des intervalles immenſes entre ces deux, trois & quatre Étoiles que nous réuniſſons en une ſeule, ſous la dénomination d'*Étoiles doubles, triples & quadruples* : or, vouloir étendre ces dénominations à des Étoiles ſéparées de pluſieurs minutes, ce ſeroit, ce me ſemble, vouloir d'une conſtellation entière faire une ſeule Étoile. On peut donc ſe borner à diſtinguer celles dont la diſtance n'excède pas 5 à 6 ſecondes; ces Étoiles ſont véritablement difficiles à voir, demandent un œil exercé, un très-bon inſtrument, de forts groſſiſſemens & des circonſtances favorables : c'eſt en plein air qu'il eſt plus facile de les obſerver, cependant on peut le faire du dedans des appartemens, en ayant ſoin d'ouvrir les fenêtres avant de ſe mettre à la lunette, un temps aſſez conſidérable pour que l'air extérieur & l'air intérieur puiſſent ſe mettre en équilibre & devenir uniformes. En mettant l'œil à la lunette, on ne voit rien d'abord, ou plutôt on ne voit qu'une ſeule & principale Étoile; mais petit-à-petit l'œil s'accoutume & parvient bientôt à diſtinguer la petite Étoile voiſine, dont on rend la diſtance ou l'écartement de la groſſe plus ſenſible, en augmentant ſucceſſivement le groſſiſſement des oculaires.

Il ne faut pas croire cependant qu'il ſoit néceſſaire d'appliquer aux téleſcopes des oculaires de la plus grande force; je n'en ai employé que deux d'un groſſiſſement peu commun; l'un groſſiſſoit 460 fois, l'autre 1350, & il n'eſt pas une ſeule des Étoiles doubles les plus difficiles à voir, que je n'aie aperçu avec le groſſiſſement de 460. M. Herſchell n'a eu même beſoin que d'un pouvoir amplifiant de 227 pour les voir preſque toutes; il appliquoit enſuite un groſſiſſement de 460, pour rendre l'intervalle plus ſenſible & plus grand : d'où l'on conclura facilement que ce n'eſt pas, comme bien des perſonnes ont pu le penſer,

à des grossissemens extraordinaires que M. Herschell a dû la découverte de ces Étoiles singulières; car nous l'avons déjà dit plus haut, on avoit poussé jusqu'à 400 fois le grossissement des télescopes, il y en avoit plusieurs de cette force entre les mains de quelques observateurs, suffisans par conséquent pour apercevoir tout ce que M. Herschell a découvert, même la nouvelle Planète, dont le disque est assez sensible avec un grossissement de 250. Mais osons le dire, la découverte des lunettes achromatiqnes, est jusqu'à présent un service important que l'Optique a rendu plutôt aux Astronomes qu'à l'Astronomie: en effet, elle a procuré à ceux-ci plus de commodités, de facilité, d'agrément, pour ainsi dire, dans les observations; mais d'un autre côté elle les a peut-être un peu trop dégoûtés de l'usage pénible & plus difficile des gros télescopes & des longues lunettes, les seuls cependant à qui l'on doive les grandes découvertes qui ont été faites. Il ne sera pas impossible sans doute de pousser un jour beaucoup plus loin la perfection des lunettes achromatiques; mais en attendant, & dans l'état actuel des choses, il est toujours vrai de dire que le pouvoir de ces lunettes est très-limité, que non-seulement on n'a rien découvert avec elles, au-delà de ce que les lunettes simples ont fait connoître, mais même qu'elles ne font pas l'effet des lunettes de moyenne grandeur. Profitons donc, à l'exemple de M. Herschell, des forces & des moyens que nous prêtent les télescopes, & n'en négligeons plus tant l'usage.

Il n'est pas encore possible aujourd'hui de prononcer sur l'utilité & les conséquences que l'Astronomie peut tirer de la découverte de ces Étoiles doubles & triples, qui nous laissent même de grands doutes & de grandes difficultés à résoudre. En effet, que peuvent être ces petites Étoiles, foibles & obscures compagnes de plus grandes? en sont-elles voisines ou dépendantes? sont-elles d'un autre ordre, d'une autre nature? doit-on les comparer à des Satellites vis-à-vis de leur Planète principale? ou sont-

elles ſeulement des Étoiles d'une ſphère infiniment plus reculée, que leur direction ſeule fait paroître proches d'autres Étoiles plus brillantes, parce qu'elles ſont plus rapprochées de nous? Enfin la poſition reſpective de ces Étoiles reſtera-t-elle toujours la même? leur grandeur n'éprouvera-t-elle pas des variations? parmi ces nombreuſes Étoiles ne ſe trouvera-t-il pas encore quelque nouvelle Planète? Voilà ce qui mérite d'être ſuivi long-temps, voilà ce qui ſera intéreſſant à obſerver dans les ſiècles futurs, & rend cette découverte digne de notre curioſité. M. Herſchell, uniquement occupé de cet objet de recherches, a acquis ſans doute plus que perſonne, une pratique de ces ſortes d'obſervations, & des connoiſſances qui doivent lui mériter la confiance des Savans, ſur toutes les découvertes qu'il annonce. Néanmoins je n'ai pas cru inutile d'aller ſur ſes traces me livrer à une vérification qui m'a mis dans le cas de confirmer ces découvertes, & de rendre à leur auteur la juſtice & l'hommage qui lui ſont dûs.

Je joins à ce Mémoire une Table des Étoiles les plus curieuſes à obſerver *(voyez Tranſact. Phil. 1782, 1785)*.

ÉTOILES doubles de la première Classe.

Aigle, précéd. γ π 24.e préc. 62.e Androm. préc. 56.e — Balance, *N.* 11.e Baleine, suiv. 54.e Bélier, précéd. 6.e préc. 39.e Baleine, suiv. 54.e Bouvier........ ε ι 31.e 39.e 51.e — Cancer...... 11.e 57.e Capricorne, préc. 29.e Cassiopée...... σ précéd. β préc. 25 Céphée, suiv.... λ suiv. 32 précéd. 6	Petit Cheval, préc. 1.e suiv. 2 *S.* γ Cigne......... δ 18.e suiv. 33 Cocher, précéd. μ *S.* 50.e préc. nébul. Coupe, *N.*...... α Couronne, θ — δ Petit Chien, la cuisse — Dragon, préc... β *h* ε 16 *N.* 31 39 48 — La Flèche, suiv. β Hercule........ ζ suiv. φ 46 *N.* 105	Linx, suiv.... 36 38 39 — 41 préc. 44 la poitrine Lion.......... γ ω préc. 44 Lyre, suiv..... δ suiv. γ 18.e — β — Ophiucus...... λ τ 69 73 Orion......... *n* préc. τ pr. 10 25 préc. 26 30 32 52 — Grande Ourse... ζ	G.de Ourse, préc. 44 65 — Persée, préc... 18 — Sagittaire...... β Serpentaire.... 38 Serpent....... δ π 49 — Taureau, préc.. ζ préc. 8 Triangle....... ε — Verseau, préc.. λ préc. β 4 Vierge....... 81 — *Double-doubles.* Balance........ ξ Persée........ 37 — *Triple-double-double.* Lyre.......... ε

ÉTOILES triples de la première & de la seconde Classe.

Aigle....... 37.e — Balance...... 51 Bélier......... π — Cancer........ ζ Cassiopée..... 55 Coupe, *N.*..... 4 Cigne, suiv.... η préc. 64 Couronne...... σ — Flèche, *S.*..... 15	Licorne...... 11 Linx......... 12 Lion......... 90 Lyre, pr....... ρ — Orion, suiv... 47 — Verseau, suiv.. 13 72 — *Double-triples.* Aigle....... 33.e	Cassiopée...... *d* Orion......... σ 44 — *Quadruples.* Cigne, préc.. 25.e préc. 77 Lyre.......... β Lézard........ 8 Monoceros, préc. 25	Orion......... λ θ — *Quintuple.* Gémeaux, préc. *H* — *Multipliées.* Cocher...... 15.e *S.* 58 Gémeaux...... β

Nota. Les Étoiles de cette Table sont désignées par les lettres de Bayer ou les numéros du catalogue de Flamstéed; *suiv.* signifie *suivante; préc. précédente; N.* au *Nord; S.* au *Sud; pr. proche;* θ — δ, entre θ & δ.

MÉMOIRE SUR UN NOUVEAU GENRE DE PLANTE *Nommé* Brucea, ET SUR LE FAUX BRESILLET D'AMÉRIQUE.

Par M. le Chevalier DE LA MARCK.

21 Janvier 1784.

ON donne le nom de *Brucea*, en Angleterre, à un arbrisseau qui y a été apporté de l'Abyssinie, par M. le Chevalier Bruce, que l'on cultive depuis quelques années au Jardin du Roi, où il fleurit tous les ans, & dont nous croyons qu'aucun Botaniste n'a encore donné la description. Nous le nommerons

Brucé anti-dysentérique; *Brucea anti-dysenterica; Brucea floribus tetrandris, racemis simplicibus.*

Cet arbrisseau, dont la figure approche de celle d'un petit noyer, s'élève à la hauteur de 5 ou 6 pieds en Europe, & peut-être une fois davantage dans son pays natal. Sa tige est droite, recouverte d'une écorce grisâtre, un peu ridée, & se divise, dans sa partie supérieure, en quelques rameaux lâches, redressés, & feuillés à leur sommet : ces rameaux ont leur superficie raboteuse, couverte de tubercules épars, qui proviennent des cicatrices un peu saillantes qu'ont laissé les anciennes feuilles après leur chute, & sont garnis, sur-tout vers leur extrémité, d'un duvet court & roussâtre. Les feuilles sont grandes, rapprochées les unes des autres, & éparses autour des sommités des rameaux, où elles forment de belles rosettes étalées & terminales, qui donnent à cet arbrisseau un aspect assez agréable. Chaque feuille est longue d'un pied ou même davantage, ailée avec impaire, &

composée de onze ou treize folioles ovales-lanceolées, pointues, entières, molles, d'un vert-jaunâtre, & glabres, excepté en leurs bords & sur leurs nervures qui sont chargés, de même que les pétioles, de poils courts & roussâtres; ces folioles sont soutenues chacune par un pétiole court, ont environ trois pouces de longueur sur une largeur d'un pouce ou un peu plus, & sont opposées par paires, à l'exception de celles qui sont terminales.

Les fleurs de cet arbrisseau sont d'un seul sexe sur chaque pied, ou *divïques*, selon l'expression de M. Linné. L'individu mâle de l'espèce dont nous traitons, est peut-être le seul que l'on posséde en Europe; il porte des fleurs fort petites, verdâtres, rougeâtres avant leur développement, & ramassées par petits paquets séparés & presque sessiles, sur de longs péduncules communs, grêles & velus: ces péduncules forment des grappes simples, linéaires, axillaires, solitaires dans chaque aisselle, un peu moins longues que les feuilles, & qui ressemblent en quelque sorte à des chatons longs & très-menus. Les paquets de fleurs sont à des distances inégales entr'elles, & vont toujours en se rapprochant d'autant plus les uns des autres, qu'ils sont plus près du sommet des grappes.

Chacune des fleurs dont il s'agit, consiste, 1.° en un calice velu en dehors, & profondément divisé en quatre découpures ovales-pointues, ouvertes & comme glanduleuses à leur sommet; 2.° en quatre pétales ovales-pointus, velus ou ciliés, alternes avec les divisions du calice, auxquelles ils ressemblent beaucoup, & ouverts en étoiles; 3.° en quatre étamines, une fois moins longues que les pétales, opposées aux divisions du calice, & dont les filamens insérés dans les échancrures ou sinuosités du disque qui occupe le centre de la fleur, portent chacun une anthère arrondie, rouge avant de s'ouvrir, blanchâtre dès qu'elle a répandu sa poussière, & divisée en deux loges; 4.° en un disque plane, charnu, ayant quatre échancrures latérales, qui lui donnent la forme d'une croix

de Malte, & occupant le centre de la fleur, à la place du piſtil qui ne s'y rencontre pas.

Voilà tout ce que nous ſavons de poſitif ſur la fructification de cet arbriſſeau ; il commence à fleurir tous les ans dès l'entrée du printemps, & développe ſes fleurs avec une lenteur ſi conſidérable, que dans l'été il s'en épanouit encore ; mais il en tire peu d'éclat, à cauſe de leur petiteſſe & de leur peu d'apparence : ſon bois eſt blanc, & ſes rameaux contiennent une moelle aſſez abondante. On donne à cet arbriſſeau le nom de *Brucé anti-dyſentérique*, parce qu'on prétend que les habitans du pays où il croît, ſe ſervent de ſes feuilles pour ſe guérir de la dyſſenterie.

M. Smeathman, Anglois, diſtingué par ſes connoiſſances en Hiſtoire Naturelle, & qui a voyagé en Afrique, a rapporté, de *Siera-Leona*, des morceaux ſecs d'un autre arbriſſeau qui paroît être du même genre que celui dont nous venons de traiter, & auquel, par cette raiſon, on a donné, en Angleterre, le nom de *Brucea paniculata*, ou Brucé à panicules. Il diffère principalement de celui qui précède, en ce que ſes grappes de fleurs ſont rameuſes & paniculées. Ses fleurs, que nous n'avons vues que ſur des morceaux ſecs en très-mauvais état, nous ont paru toutes mâles ſeulement, & à étamines un peu plus longues que les pétales.

Il ſuit de ce que nous venons d'expoſer ſur le genre du *Brucea*, que la privation où nous ſommes des individus femelles des eſpèces de ce genre, nous laiſſant ignorer & la forme des fleurs femelles, & la nature des fruits qu'elles produiſent, nous n'avons pu établir qu'un caractère générique incomplet. Mais on trouve en Amérique, des arbriſſeaux qui nous paroiſſent avoir de ſi grands rapports avec les *Brucea* d'Afrique, que nous préſumons qu'ils ſont de la même famille, & d'un genre qui en eſt très-voiſin par ſes rapports. Or, comme ces arbriſſeaux ne ſont pas encore bien connus des Botaniſtes, nous allons

allons expoſer en peu de mots ce que nos obſervations & nos recherches nous ont appris à leur ſujet.

Des Bréſillots, ou *faux Bréſillets d'Amérique.*

Le P. Plumier, dans la portion de ſes Découvertes botaniques qui n'a point encore vu le jour, fait mention, ſous le nom de *Pſeudo-Braſilium*, de deux arbriſſeaux des Antilles, qui lui paroiſſent avoir tant de rapports entr'eux, qu'il les réunit dans ſa deſcription, regardant l'un comme une ſimple variété de l'autre. Nous allons néanmoins les diſtinguer & en traiter ſéparément, en connoiſſant un que l'on cultive au Jardin du Roi, où nous l'avons vu fleurir, & qui nous paroît différent de l'autre.

Le premier eſt le *Bréſillot* velu ; *pſeudo-braſilium hirſutum*, Plum. mſſ. C'eſt auſſi vraiſemblablement le *tariri guianenſis*, Aubl. guian. ſuppl. pag. 37, tab. 390 ; & le *tariri arbor tinctoria, foliis alternis, obſcurè violaceis*, Barr. Franc. Equin. 106.

C'eſt un arbriſſeau qui s'élève à la hauteur de huit à dix pieds ſur une tige droite, de près de 2 pouces de diamètre, recouverte d'une écorce finement gercée & d'un brun-griſâtre. Cette tige ſe diviſe, à ſon ſommet, en pluſieurs rameaux alternes, couronnés chacun de grandes feuilles éparſes & rapprochées en roſettes terminales ; ſon bois eſt d'un rouge-brun, ou au moins prend cette couleur quelque temps après qu'il a été expoſé à l'air. Ses feuilles ſont longues preſque d'un pied & demi, ailées avec impaire, & compoſées de quinze à dix-neuf folioles ovales-pointues, entières ou legèrement anguleuſes, liſſes, vertes & luiſantes en deſſus, velues dans leur contour, d'un vert-pâle en deſſous, tantôt oppoſées par paires, & tantôt diſpoſées alternativement, & ſoutenues par un petiole commun, pubeſcent & rougeâtre. Ces folioles ont trois à quatre pouces de longueur, & ſont portées chacune ſur un petiole propre fort court ; elles prennent une couleur pourpre-noirâtre en ſe deſſéchant.

Les fleurs ſont très-petites, d'un rouge-obſcur, d'un

ſeul ſexe ſur chaque individu, & viennent ſur des grappes rameuſes & terminales. Celles qui ſont mâles ne nous ſont pas connues : les fleurs femelles conſiſtent en un calice velu en dehors, perſiſtant, & profondément diviſé en cinq découpures pointues; en cinq pétales lancéolés & un peu plus longs que le calice; & en un ovaire ſupérieur, ovale, glabre, dépourvu de ſtyle, & ſurmonté d'un ſtigmate ſeſſile, à deux lobes planes, ouverts & pubeſcens.

A ces fleurs ſuccèdent des fruits mous, pulpeux, de la forme de nos olives, mais un peu plus petits, d'un rouge de corail dans leur maturité, légèrement acides, & qui contiennent chacun un noyau oſſeux, de même forme & uniloculaire.

On trouve cet arbriſſeau à Saint-Domingue, à la Jamaïque & dans la Guiane. Lorſqu'on entame ſes rameaux, ou ſon tronc, dit le P. Plumier, il en ſort un ſuc qui noircit, & qui, par ſa cauſticité, forme une tache preſque ineffaçable s'il tombe ſur quelque partie du corps; ſon bois teint comme le bréſillet, mais d'une couleur qui eſt plus brune que rouge. Aublet dit, que ſes feuilles écraſées toutes vertes, & preſſées dans un morceau de coton, lui communiquent d'abord une teinture verte, qui peu après devient de couleur violette.

Le ſecond, eſt le bréſillot glabre; *pſeudo-braſilium glabrum.* Plum. mſſ.

A la vérité, ce bréſillot a de très-grands rapports avec le précédent; mais il paroît qu'il en diffère, 1.° en ce qu'il eſt plus petit, ne s'élevant qu'à la hauteur de 5 à 6 pieds ſeulement; 2.° que ſon bois eſt d'un blanc-pâle & moins propre à teindre; 3.° que ſes feuilles ſont tout-à-fait glabres, moins grandes, & n'ont que onze à treize folioles, dont les ſupérieures ſont plus longues & lancéolées.

Cet arbriſſeau croît naturellement à Saint-Domingue; on en cultive un individu femelle au Jardin du Roi, qui y fleurit vers le commencement de Novembre; ſes grappes de fleurs ſont rameuſes, terminales & longues de quatre ou

cinq pouces; les péduncules, communs & particuliers ſont un peu pubeſcens: les fleurs, dans tout le reſte, ne paroiſſent pas différer de celles du bréſillot velu.

Quoique d'une part nous ne connoiſſions pas les fleurs femelles & les fruits des *Brucea*, & que de l'autre nous ignorions les caractères des fleurs mâles des *pſeudo-braſilium*, ces divers arbriſſeaux nous paroiſſent néanmoins devoir être tous rapportés à la même famille que le comoclade, les ſumacs, le mollé, l'anacarde, &c. genres de plante avec leſquels ils ont des rapports très-marqués.

Obſervation. On trouve en Amérique, un arbriſſeau encore peu connu, nommé par le P. Plumier, *dodonæa aquifolii folio tricuſpidato* (Burm. amer. t. 118, f. 1), & qui ſemble avoir auſſi quelques rapports avec le *Brucea.* Néanmoins cet arbriſſeau ſe rapproche encore plus du *comocladia* de Linné, dont il eſt ſans doute une eſpèce; car ſes fleurs ont de même un calice à trois diviſions, trois pétales, trois étamines, & un ovaire ſupérieur qui ſe change en une baie oblongue, contenant un noyau bifide ou à deux lobes. Nous croyons qu'on peut le nommer

Comocladia (tricuſpidata) foliis pinnatis; foliolis ovatis tricuſpidatis, racemis ſubſimplicibus.

RECHERCHES SUR LE CALCUL INTÉGRAL.

Par M. CHARLES.

SOIT entre les trois variables x, y, z, l'équation en différences partielles $Mp + Nq + L = 0$; $(dz = pdx + qdy)$; je dis que quand la proposée sera homogène entre x, y & z, son intégrale générale dépendra de l'intégration de deux équations ordinaires, chacune entre deux variables.

DÉMONSTRATION.

Multipliant la proposée par dx, l'équation hypothétique par M, & ajoutant, on a

$$Mdz + Ldx = q\,(Mdy - Ndx);$$

multipliant cette dernière équation par A, & ajoutant de part & d'autre la même quantité $q\,(Mdz + Ldx)$, on a

$$(Mdz + Ldx)\,(q + A) = q\,[Mdz + Ldx + A(Mdy - Ndx)].$$

Je rappelle d'abord que toutes les fois que les équations $Mdz + Ldx = 0$, & $Mdy - Ndx = 0$, pourront s'intégrer, séparées ou combinées ensemble, l'équation en différences partielles sera intégrée, comme l'a observé M. de la Grange, *dans les Mémoires de Berlin, pour l'année 1779*; car dans ce cas, on pourra trouver le facteur A qui rend le coéfficient de q multiple R, d'une différentielle exacte; & alors soit dv, cette différentielle exacte, on aura $(Mdz + Ldx)\,(q + A) = qRdv$. Puisqu'on a $v = F\,(x, y, z)$; (F indiquant une fonction

connue), on a $y = \gimel(x, v, z)$; ($\gimel$ indiquant une fonction renversée). Substituant cette valeur de y dans M, L, &c. on a $M' dz + L' dx = \frac{q' R'}{q' + A'} dv$, & z est maintenant une fonction cherchée de x & de v. Ainsi, si on fait v constant, dz deviendra une différence partielle relativement à x, & on aura $M' \delta z + L' dx = 0$, (δ étant le signe de la différence partielle); il n'y a donc qu'à intégrer, en faisant v constant, & prendre, pour arbitraire, une fonction de v, c'est-à-dire, de $F(x, y, z)$.

La question se réduit donc à intégrer l'équation

$$M dz + A M dy + (L - AN) dx = 0,$$

quel que soit M, N & L.

Supposons les homogènes, pour revenir au théorème que je dois démontrer. Soit A une fonction de dimension nulle des trois variables x, y, z, & faisons $x = rz$ & $y = sz$; nous aurons

$$-\frac{dz}{z} = \frac{amds + (l - an)\, dr}{m + lr + a(ms - nr)},$$

équation dont le second membre doit être une différentielle complète: a est la transformée de A, & les petites lettres l, m, n sont les transformées des majuscules L, M, N divisées par une puissance de z, dont l'exposant indique la dimension de ces majuscules. Maintenant, soit

$$m + lr + a(ms - nr) = \frac{1}{\psi} \;\&\; \frac{m - (m + lr)\, m\psi}{ms - nr} = \theta;$$

nous aurons

$$-\frac{dz}{z} = \theta ds + (e - \theta f)\, dr,$$

e & f sont des fonctions connues de r & s, θ une fonction des mêmes variables qu'il faut déterminer pour que la fonction $\theta ds + (e - \theta f)\, dr$ soit une différentielle complète: donc,

$$\frac{\delta \theta}{dr} + f \frac{\partial \theta}{ds} + \theta f' - e' = 0:$$

δ & ∂ indiquent des différences partielles; f' & e' ſont les coéfficiens de ds dans la différenciation de f & e: donc

$$d\theta + (\theta f' - e')\,dr = \frac{\partial\theta}{ds}\,(ds - f\,dr).$$

Il faut donc intégrer complètement l'équation

$$ds - f\,dr = 0,$$

entre les deux variables r & s, pour avoir l'équation $s = F(r, v)$, v étant l'arbitraire; ſubſtituer pour s cette valeur dans l'équation $d\theta + (\theta f' - e')\,dr = 0$, & ſatisfaire á cette dernière en faiſant v conſtant.

Diſons un mot des équations à un plus grand nombre de variables.

Soit entre les quatre variables x, y, v & z, l'équation linéaire en différences partielles

$$Mp + Nq + Or + L = 0 \;(dz = p\,dx + q\,dy + r\,dv).$$

Chaſſant p, on aura

$$Mdz + Ldx = q(Mdy - Ndx) + r(Mdv - Odx);$$

multipliant tout par A, enſuite ajoutant & retranchant différentes quantités, on aura

$$(Mdz + Ldx)(A + r) = (Aq - rB)(Mdy - Ndx)$$
$$+ r[Mdz + AMdv + BMdy + (L - AO - BN)dx].$$

Suppoſons qu'on puiſſe rendre la fonction à quatre variables, coéfficient de r multiple S d'une différentielle exacte, par le moyen des coéfficiens, juſqu'à préſent indéterminés A & B, & ſoit dv', cette différentielle; on aura $v' = F(x, y, v, z)$, & par conſéquent $v = \varphi(x, y, v', z)$. Subſtituant cette valeur de v dans la propoſée, on aura

$$(M'dz + L'dx)(A' + r')$$
$$= (A'q' - r'B')(M'dy - N'dx) + r'S'dv'.$$

Donc, si on fait v' constant, on aura

$$M'dz + L'dx = \frac{A'q' - r'B'}{A' + r'}(M'dy - N'dx),$$

équation linéaire ou qui du moins peut se traiter comme telle.

Supposons maintenant que les coéfficiens M, N, O, L sont homogènes entre les quatre variables x, y, v, z; regardons A & B comme des fonctions de dimension nulle de ces variables, & faisons $x = x'z$; $y = y'z$; $v = v'z$; l'équation

$$Mdz + AMdv + BMdy + (L - AO - BN)dx = 0,$$

qui doit être possible, deviendra

$$M'dz + A'M'(v'dz + zdv') + B'M'(y'dz + zdy') + \&c.$$

A' & B' représentent les transformées de A & B, & M', N', &c. les transformées des lettres non accentuées correspondantes, divisées par une puissance de z, dont l'exposant indique la dimension des lettres M, N, &c.; donc

$$-\frac{dz}{z} = \frac{A'M'dv' + B'M'dy' + (L' - A'O' - B'N')dx'}{M' + A'M'v' + B'M'y' + (L' - A'O' - B'N')x'},$$

équation, dans le second membre de laquelle z est évanoui. Maintenant si on fait différentes transformations indiquées par la nature de la question, pour rendre la recherche des indéterminées, plus facile, on trouvera facilement qu'on peut faire

$$-\frac{dz}{z} = \theta dv' + \lambda dy' + (A + B\theta + P\lambda)dx';$$

A, B, P étant des fonctions connues de v', y', & x'; θ & λ des fonctions inconnues des mêmes variables, qu'il faut déterminer, pour que le second membre de l'équation soit une différentielle exacte, d'où on peut conclure ce théorème.

Pour réduire une équation linéaire homogène en différences partielles du premier ordre, entre un nombre

quelconque de variables, à une équation auſſi linéaire & du premier ordre, où le nombre des variables ſeroit moindre d'une unité, il faut rendre différentielle exacte la fonction

$$\theta\, dx + \lambda\, dy + \varkappa\, dv + \&c. + (A + B\theta + D\lambda + E\varkappa + \&c.)\, ds,$$

le nombre des variables $x, y, v, \ldots s$ étant moindre d'une unité que dans la propoſée; A, B, D, E, &c. étant des fonctions données de ces variables; θ, λ, $\varkappa$, &c. des fonctions inconnues.

MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR LA DISPARITION DE L'ÉTOILE
De la conſtellation du Taureau, que Flamſtéed a placée dans ſon Catalogue, pour 1690, à 51^{d} 46′ 50″ de longitude, avec une latitude de 0^{d} 5′ $\frac{1}{3}$ méridionale.

Par M. LE MONNIER.

Lû le 15 Déc. 1784.

IL y a huit jours que l'Académie a été informée par une lettre écrite de Limoges, au Préſident de l'Académie, qu'on ne voyoit plus l'étoile du Taureau, de la ſixième grandeur, qui eſt la huitième de cette même conſtellation. De plus, l'auteur de cette remarque importante, M. Montaigne, ajoute qu'il a fait cette recherche, ſoupçonnant, & peut-être avec plus de fondement * que ne doit être une ſimple conjecture, que cette même étoile pourroit bien être la nouvelle Planète découverte par Herſchell, à Bath, le 13 Mars 1781, vers le commencement du ſigne de l'Écreviſſe, ou fin du ſigne du Taureau.

Cette étoile du catalogue de Flamſtéed, ne ſe trouve point dans la première édition publiée en 1712, du catalogue Britannique : on ne la retrouve pas non plus dans le zodiaque de Senex; mais j'ai eu ſoin de la faire inſérer dans le zodiaque de Dheulland.

J'ai fait part les jours ſuivans, à M. le Duc de la Rochefoucault & à Limoges, des deux obſervations que Flamſtéed en avoit faites, & que j'ai retrouvées dans l'année 1704, le 29 Septembre & le 1.er Octobre ſuivant. J'en ai fait un nouveau calcul, ayant égard à l'aberration

* M. Montaigne ſuppoſoit pour lors qu'elle avoit été obſervée à Gréenwich, avant 1690.

& à la nutation de η des Pléïades, dont l'aſcenſion droite apparente a dû être, ſelon mon catalogue, de $52^d\ 29'\ 45''$; d'où ôtant $2^d\ 56'\ 6''$, ayant égard à $4''\frac{1}{2}$ de temps, pour l'erreur du plan de l'arc mural, la longitude ſera ♉ $21^d\ 57'\ 51''$, avec une latitude auſtrale de $5'\ 6''\frac{1}{2}$: dans le calcul, j'ai ſuppoſé l'obliquité apparente de l'écliptique, $23^d\ 29'$, & la déclinaiſon boréale de l'étoile, $18^d\ 12'\ 40''$.

En 1757 & 1758, lorſque je travaillois au catalogue des étoiles zodiacales, je n'ai point aperçu cette étoile, mais ſeulement la double qui ſuit, & quelques autres qui ſont plus au nord, & preſque au même degré d'aſcenſion droite.

Oppoſition de Jupiter au Soleil, obſervée le 27 Août 1784.

A $11^h\ 51'\ 49''$, la planète de Jupiter a paſſé au méridien après la 1.re σ du Verſeau $55''\frac{1}{3}$ de temps, à la pendule, & à diſtance du Zénit de $60^d\ 36'\ 50''$.

Donc longitude apparente obſervée ♓ $2^d\ 34'\ 30''$, avec une latitude auſtrale de $1^d\ 20'\ 42''$.

Les Tables de Halley, au même inſtant, indiquent $55''\frac{1}{2}$ de plus, c'eſt-à-dire la longitude ♓ $2^d\ 35'\ 25$ à $26''$.

Quant à l'oppoſition de Saturne au Soleil, on la déduira de l'obſervation ſuivante : le 13 Juillet, à $11^h\ 53'\ 2''$ de temps vrai, à diſtance apparente du Zénit de $70^d\ 40'\ 10''$, Saturne a précédé f du Sagittaire de $0^h\ 5'\ 10''$, & avoit ſuivi *e* du voile de $55''$ de temps; ce qui donne ſon aſcenſion droite apparente $292^d\ 10'\ 30''$, & ſa déclinaiſon méridionale $21^d\ 50'\ 45''$, ſa longitude ♑ $20^d\ 30'\ 27''\frac{1}{2}$, avec une latitude boréale de $3'\ 31''\frac{1}{2}$. Les Tables de Halley donnent la longitude de Saturne $6'\ 53''$ moins avancée. au lieu que l'année précédente, le 1.er Juillet, à $11^h\ 56'\ 32''$, elles donnoient la longitude de Saturne $8'$ moins avancée.

OBSERVATION
SUR UNE ILLUSION D'OPTIQUE.

Par M. DE FOURCROY.

Lû le 13 Déc. 1784.

LE cahier de Septembre dernier, du Journal de physique, en rapportant les effets singuliers d'un treillis sur la vue de M. de Godart, *page 219*, m'a rappelé une petite observation que j'avois écrite en 1776, sur l'ombre d'un treillis, & dont j'avois oublié depuis lors de rendre compte à l'Académie.

Le 23 Octobre, à Perpignan, vers neuf heures du matin, me trouvant assis, par un beau soleil, dans un petit cabinet vis-à-vis un mur blanc, je remarquai que le treillis de fer d'une fenêtre à laquelle je tournois le dos, étoit légèrement projeté par le soleil sur ce mur; mais avec la singularité, que les raies claires de ce tableau *(figure 2)*, me parurent être la projection des fils de fer du treillis *(fig. 1)*, & que les losanges moins claires *(figure 2)*, me sembloient être la projection de l'ouverture des mailles.

Les figures ci-jointes sont de grandeur naturelle; elles furent crayonnées, tant sur le grillage même, que sur son ombre qui se projetoit à 68 pouces du treillis *.

J'avois pensé quelquefois à ce tableau, lorsque le 13 Novembre, revoyant la même image au même lieu, je la reçus sur un carton très-blanc, appliqué contre le mur; puis en rapprochant ce carton de la fenêtre le long d'une règle, j'observai qu'à mesure de sa marche vers le treillis,

* Le fil avoit $\frac{7}{12}$ ligne de diamètre; chaque nœud étoit de $1\frac{3}{4}$ ligne de hauteur, & $1\frac{1}{4}$ ligne de largeur.

l'intenſité des taches obſcures ſe renforçoit dans leur milieu; les raies claires qui les ſéparoient, augmentoient fort de largeur. Je fis aller & venir lentement mon carton; ce mouvement me démontra le contraire du premier jugement que j'avois porté ſur ce tableau: je reconnus parfaitement que ces raies claires & continues étoient la projection du vide des mailles, & que les loſanges obſcures ou moins claires, étoient celles des nœuds du treillis.

La preuve en fut complète, lorſqu'à meſure du cheminement du carton plus près de la fenêtre, je vis toutes les loſanges, qui ſe rétréciſſoient, prendre enfin la vraie forme des nœuds du treillis, tandis que les raies claires, qui s'élargiſſoient, laiſſoient inſenſiblement paroître l'ombre des fils de fer, & acquéroient la vraie forme des mailles.

On trouve tous ces faits très-bien expliqués par M. de Maraldi, dans les Mémoires de l'Académie, *année 1723, page 111.*

Le 11 Décembre ſuivant, je conſidérois encore ce tableau ſur le mur, lorſqu'un nuage léger vint à paſſer devant le Soleil; dans ce moment, la projection ſur le mur fut entièrement ſemblable au treillis, toutes ſes mailles, ſes fils de fer & ſes nœuds parfaitement deſſinés & tranchés. Dès que le nuage fut totalement paſſé, la première image reparut: j'avois vu ſur le mur, à la fin du paſſage de ce nuage, les ombres des nœuds croître par degrés fort ſenſibles, juſqu'à ce que le Soleil eût repris tout ſon éclat, préciſément comme ſur mon carton ci-deſſus, lorſque je l'avois éloigné du treillis.

Ce dernier fait eſt celui qui mérite quelqu'attention; il paroît contraire à la doctrine des ombres & pénombres, ou de la diffraction, & ne pouvoir être expliqué que par celle des réfractions. Il ſemble néceſſaire de prêter à ce nuage la même propriété qu'à nos verres convexes, de

Fig. 1.

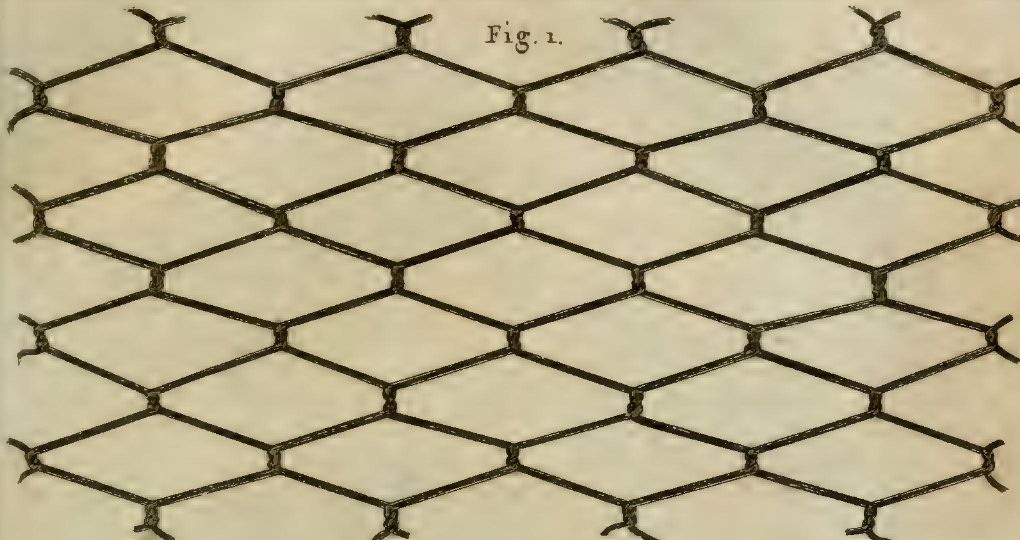


Fig. 2.



Y. le G. Sc.

tranſmettre contre le treillis l'image du diſque du Soleil, beaucoup plus petite qu'elle ne l'eſt naturellement, puiſque les fils de fer portèrent leur ombre pleine & terminée, juſqu'à environ quatorze cents fois leur diamètre, au lieu de ne la porter qu'à quarante-deux fois ce diamètre. En l'expliquant ainſi, il ſeroit propre à confirmer les ſoupçons déjà fondés ſur d'autres faits, que les nuages tranſmettent quelquefois à la terre des coups de Soleil beaucoup plus chauds que ceux qui nous en viennent par la ſimple traverſée de l'atmoſphère.

MÉMOIRE
CONTENANT
LES OBSERVATIONS ET LA THÉORIE
DE LA PREMIÈRE COMÈTE DE 1784.

Par. M. MÉCHAIN.

CETTE Comète fut aperçue à Paris, le 24 Janvier, au soir, par M. le Comte de Caſſini; il eut la complaiſance de m'en donner avis ſur le champ, & nous en fimes de concert la première obſervation. La Comète, quoique près de l'horizon, paroiſſoit à la vue ſimple avec une queue de 2 à 3 degrés; le noyau étoit aſſez bien terminé & très-lumineux, ſon diamètre apparent étoit de 33″. L'obſervation que je vais rapporter, & les ſuivantes, ont été faites avec une lunette achromatique, de trois pieds & demi de foyer, garnie d'un bon micromètre à fils. A $7^h\ 35'\ 53''$, temps moyen, la Comète précédoit l'étoile π de la Baleine, au cercle horaire, de $44^d\ 57'34''$, & elle étoit plus auſtrale de 20′ 10″, réduction faite du parallèle apparent au vrai ; d'où j'ai conclu l'aſcenſion droite de $353^d\ 30'\ 25''$, la déclinaiſon auſtrale $14^d\ 26'\ 40''$. En comparant de même le paſſage de la Comète avec ceux des étoiles, *n.os 18 & 47* de la Baleine, du catalogue de Flamſtéed, j'ai trouvé les mêmes réſultats à peu de ſecondes près, corrigeant d'ailleurs la poſition de ces étoiles, relativement à celle de π que j'ai tirée du catalogue de Bradley. On ne put cette première fois avoir aucune idée de la vîteſſe & de la direction du mouvement de la Comète, parce que le long intervalle de temps qui s'écoula entre ſon paſſage & celui de quelqu'étoile bien connue, ne permit point d'en faire une ſeconde obſervation.

Depuis le 24 Janvier jusqu'au 3 Février, le ciel fut presque toujours couvert; la Lune augmentoit de jour en jour, j'épiois les instans où les nuages s'entr'ouvroient, pour rechercher la Comète; mais c'étoit toujours sans succès. Enfin, le 3 Février, le ciel étant assez pur, je la retrouvai au-dessous du ventre du Poisson austral: la grande clarté de la Lune empêchoit de la distinguer à la vue simple, & elle en éteignoit totalement la queue. Par un milieu entre plusieurs observations, je trouvai qu'à $7^h\ 38'\ 47''$, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de λ des Poissons de $1^d 46' 40''$, & plus boréale de $3'\ 37''$; ce qui donne l'ascension droite de $354^d\ 32'\ 12''$, la déclinaison boréale $0^d\ 39'\ 12''$.

Le 4 Février, à $6^h\ 33'\ 48''$, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de la dix-neuvième des Poissons, de $41'\ 48''$, & moins boréale de $37'\ 2''$; ce qui donne $354^d\ 32'\ 18''$, pour l'ascension droite, & $1^d\ 40'\ 16''$ pour la déclinaison boréale. A $6^h\ 56'\ 55''$, la Comète précédoit α du lien des Poissons, de $33^d\ 11'\ 11''$, & elle étoit moins boréale de $1'\ 16''\frac{1}{2}$; donc ascension droite $354^d\ 32'\ 12''$, déclinaison boréale $1^d\ 41'\ 32''$.

Le 10, j'ai trouvé la Comète très-près d'une étoile de sept à huitième grandeur, & d'une autre de huit à neuvième. La Lune n'étant pas alors sur l'horizon, je distinguois bien la Comète, à la vue simple; j'ai estimé la longueur de sa queue vue par la lunette de nuit, de deux degrés; le noyau étoit très-brillant, mais entouré d'une légère nébulosité. A $6^h\ 41'\ 33''$, temps moyen, différence d'ascension avec l'étoile 2 *c* des Poissons — $3^d\ 28'\ 4''$, & en déclinaison — $15'\ 49''$; d'où j'ai conclu l'ascension droite de la Comète $354^d\ 24'\ 3''$, sa déclinaison, $7^d\ 1'\ 22''$.

Le 13, sur les 7 heures $\frac{1}{4}$ du soir, on a commencé à voir quelques étoiles au zénit, ensuite les nuages se sont dissipés assez promptement. J'ai aperçu la Comète entre la soixante-dix-septième & la quatre-vingt-deuxième

de Pégase; on la voyoit difficilement sans lunette, parce qu'elle étoit près de l'horizon; sa queue avoit encore plus d'un degré, son noyau étoit brillant & entouré de nébulosité. A 7^h 55′ 7″, elle étoit à l'orient de la soixante-dix-septième de Pégase, de 1^d 9′ 56″ $\frac{1}{2}$, & 3′ 30″ plus boréale; j'en ai déduit l'ascension droite de 354^d 15′ 55″, la déclinaison 9^d 11′ 27″. A 7^h 59′ 51″, temps moyen, elle précédoit la quatre-vingt-deuxième étoile de Pégase, de 1^d 8′, & elle étoit moins boréale de 33′ 29″; ces différences sont corrigées de l'effet de la réfraction: l'ascension droite de la Comète étoit donc à ce dernier instant de 354^d 15′ 46″, sa déclinaison de 9^d 11′ 13″; mais je préfère la première détermination.

Le 14, à 6^h 44′ 29″, temps moyen, la Comète précédoit la quatre-vingt-deuxième de Pégase, de 1^d 11′ 0″ $\frac{1}{2}$; elle étoit plus boréale de 4′ 37″, ce qui donne l'ascension droite de 354^d 12′ 45″, la déclinaison 9^d 49′ 19″.

Le 23, à 7^h 25′ 14″, temps moyen, différence d'ascension droite entre la Comète & la soixante-seizième de Pégase + 49′ 29″, & de déclinaison — 22′ 53″; j'en ai conclu l'ascension droite de la Comète de 353^d 45′ 58″, sa déclinaison 14^d 45′ 25″ $\frac{1}{2}$.

Le 1.er Mars, à 6^h 52′ 7″, la Comète étoit plus occidentale que φ de Pégase, de 1^d 54′ 4″, & moins boréale de 9′ 41″; ce qui m'a donné l'ascension droite de 353^d 28′ 29″, la déclinaison 17^d 45′ 35″.

M. Messier vit encore la Comète le 11 Mars, & il a bien voulu me communiquer son observation qui donne pour 7^h 23′ 19″, temps moyen, la différence en ascension droite avec *y* de Pégase de + 2^d 26′ 30″, celle en déclinaison + 6′ 17″. D'après l'observation que j'ai faite de cette étoile au méridien, j'ai conclu pour l'époque de l'observation de M. Messier, l'ascension droite de la Comète de 353^d 6′ 30″, sa déclinaison 21^d 25′ 13″ boréale.

C'est au 11 Mars, que se terminent les premières observations

obſervations de cette Comète; elle étoit alors trop près de l'horizon, & trop éloignée du Soleil ainſi que de la Terre, pour qu'on pût eſpérer de la ſuivre plus long-temps. J'avois déjà préſenté à l'Académie, un eſſai ſur les élémens de l'orbite de cette Comète, qui étoit fondé ſur mes obſervations des 24 Janvier, 3 & 14 Février; ce ſont ces élémens que M. Pingré a bien voulu inſérer, *page 512, du ſecond volume de ſa Cométographie*. D'après ces élémens, j'ai tracé la figure de l'orbite de la Comète, & j'ai remarqué, que vers le commencement de Mai, elle ne ſeroit pas beaucoup plus éloignée de la Terre, qu'elle ne l'avoit été le 11 Mars, & que ſon élongation du Soleil ſeroit aſſez grande; cela me fit concevoir l'eſpérance de la revoir en Mai, lorſque la Lune ne ſeroit pas ſur l'horizon, & que le ciel ſeroit bien pur.

Ayant donc calculé la poſition de la Comète, pour le 9 Mai au ſoir, je pointai ma lunette, avant le lever de la Lune, à l'endroit où le calcul m'avoit indiqué que la Comète devoit ſe trouver, & j'eus la ſatisfaction de la voir dans le champ de la lunette, ſans que cela m'eût coûté plus de recherches. La Comète étoit extrêmement foible, on n'y diſtinguoit preſque plus de noyau, ce n'étoit qu'une nébuloſité diffuſe, de 3 minutes environ de diamètre; elle diſparoiſſoit preſque entièrement dès que j'éclairois un peu les fils du micromètre; mais comme elle n'étoit élevée ſur l'horizon que d'environ 17 degrés, j'ai préſumé qu'elle auroit été beaucoup plus ſenſible à une plus grande hauteur: la Lune qui s'eſt levée à minuit 49 minutes, ne m'a pas permis de l'obſerver plus tard. Voici la nouvelle ſuite de mes obſervations; M. Meſſier reprit auſſi les ſiennes, après que je l'eus informé que la Comète paroiſſoit encore.

Le 9 Mai, à $12^h\ 27'\ 20''$, la Comète précédoit une étoile de ſixième grandeur, de $38'\ 24''$; elle étoit moins boréale de $20'\ 10''$: au même inſtant elle précédoit une autre étoile de ſeptième grandeur, de $1^d\ 4'\ 33''$, &

elle étoit plus nord de 20′ 59″. Les positions de ces étoiles ne se trouvent dans aucun Catalogue; je les ai déterminées dans la suite, en les comparant avec γ du Cygne; & par un milieu entre les deux observations, j'ai trouvé pour le 9 Mai, à 12^h 27′ 20″, l'ascension droite de la Comète, de 347^d 54′ 20″; sa déclinaison boréale, 39^d 34′ 43″: cette position est un peu incertaine.

Le 12, j'ai déterminé par un milieu entre six observations, qu'à 13^h 23′, temps moyen, la Comète étoit à l'orient de la neuvième étoile d'Andromède, de 8′ 54″, & moins boréale de 3′ 35″; donc ascension droite 357^d 11′ 45″, déclinaison 40^d 32′ 8″.

Le 14, à 12^h 14′, temps moyen, différence en ascension droite avec la dixième étoile d'Andromède — 44′ 7″, en déclinaison + 14′ 31″, par neuf observations; donc ascension droite de la Comète, 346^d 40′ 18″, déclinaison 41^d 8′ 20″.

Le 17, à 12^h 15′ 11″, temps moyen, la Comète précédoit la treizième étoile d'Andromède, de 3^d 22′ 18″, & elle étoit plus boréale de 20′ 30″; donc ascension droite 345^d 49′ 7″, déclinaison 42^d 3′ 51″. Au même instant, la Comète étoit à l'occident de l'étoile ι d'Andromède, de 6^d 4′ 30″, & moins boréale de 19″; ainsi, selon cette seconde observation, son ascension droite étoit de 345^d 49′ 35″, sa déclinaison 42^d 4′ 3″.

Le 21, à 11^h 14′ 46″, temps moyen, la Comète étoit à l'occident d'une étoile indéterminée & de sixième grandeur, de 7^d 13′ 41″; elle étoit plus boréale de 2′ 12″: ayant ensuite observé cette étoile au méridien, je conclus l'ascension droite de la Comète de 344^d 31′ 52″, sa déclinaison de 43^d 16′ 4″. Au même instant elle précédoit x d'Andromède, de 7^d 55′ 48″, & elle étoit plus boréale de 8′ 0″; d'où j'ai déduit son ascension droite de 344^d 31′ 52″, & sa déclinaison de 43^d 16′ 9″.

Le 25 Mai, à 13^h 22′, temps moyen, la Comète étoit plus orientale qu'une étoile indéterminée & de septième

grandeur, de 18′ 18″, & plus boréale de 16′ 16″; après avoir déterminé la poſition de cette étoile, j'en ai conclu l'aſcenſion droite de la Comète de 343ᵈ 0′ 39″, ſa déclinaiſon boréale de 44ᵈ 29′ 0″. Cette obſervation n'eſt peut-être pas auſſi exacte que les précédentes, parce que la Comète étoit extrêmement foible & très-élevée: la grande diſtance où elle étoit alors du Soleil & de la Terre, ainſi que la lumière de la Lune, me la dérobèrent tout-à-fait, & je ne la revis plus.

Voici les nouveaux élémens de l'orbite de cette Comète, que j'ai rectifiés ſur la totalité de mes obſervations.

Longitude du nœud aſcendant............	1ˢ	26ᵈ	49′	21″
Inclinaiſon de l'orbite..................		51.	9.	12.
Lieu du périhélie ſur l'orbite............	2.	20.	44.	24.

Diſtance périhélie 0,707858, dont le logarithme = 9,849946.

Temps moyen du paſſage au périhélie, 21 Janvier à 4ʰ 56′ 47″.

Sens du mouvement réel...... rétrograde.

C'eſt la ſoixante-neuvième dont on ait calculé l'orbite,

Depuis le 24 Janvier juſqu'au 25 Mai, elle a parcouru ſur ſon orbite un arc de 104ᵈ 38′ 31″, du même côté du périhélie; mais l'accord des obſervations avec le calcul dans la parabole, doit faire préſumer que l'ellipſe que parcourt cette Comète, eſt extrêmement alongée, & que ſa période eſt fort longue.

La première des deux Tables ſuivantes contient les longitudes & les latitudes géocentriques de la Comète, calculées d'après les obſervations que je viens de détailler; les différences entre les poſitions obſervées & celles calculées d'après les élémens ci-deſſus; & les diſtances de la Comète au Soleil & à la Terre, à l'inſtant de chaque obſervation. La deuxième Table renferme les aſcenſions droites & les déclinaiſons des étoiles affectées de l'aberration & de la nutation, telles que je les ai employées pour réduire celles de la Comète.

TABLE I. *Des Longitudes & Latitudes géocentriques de la première Comète de 1784, comparées au calcul fait sur les élémens de l'orbite.*

MOIS & JOURS.		TEMPS MOYEN.	LONGIT. OBSERVÉE.	LATITUDE OBSERVÉE.	Les élémens donnent en longit.	Les élémens donnent en latit.	Dist. de la Com. au ☉	Dist. de la Com. à la Terre.
		H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.	celle Sol. = 1,000	
Janvier	24	7. 35. 53	348. 16. 10	10. 40. 20A.	— 0. 2	+ 0. 1	0,711	0,857.
Février	3	7. 38. 47	355. 14. 45	2. 46. 22B.	— 0. 5	+ 0. 26	0,756	1,149.
	4	6. 56. 55	355. 39. 33	3. 43. 34B.	— 0. 2	+ 0. 7	0,763	1,178.
	10	6. 41. 33	357. 40. 24	8. 40. 6	— 0. 32	— 0. 1	0,816	1,352.
	13	7. 55. 7	358. 25. 57	10. 42. 41	+ 0. 42	+ 0. 24	0,847	1,433.
	14	6. 44. 29	358. 38. 36	11. 18. 3	+ 0. 26	+ 0. 6	0,857	1,463.
	23	7. 25. 14	0. 19. 6	15. 59. 28	— 0. 4	— 0. 25	0,965	1,691.
Mars	1	6. 52. 7	1. 21. 5	18. 50. 14	— 0. 19	+ 0. 17	1,058	1,843.
	11	7. 23. 19	2. 39. 46	22. 18. 6	+ 0. 9	— 0. 25	1,197	2,028.
Mai	9	12. 27. 20	7. 58. 39	40. 26. 49	+ 2. 2	+ 0. 41	2,040	2,435.
	12	13. 23. 0	8. 0. 50	41. 32. 49	+ 0. 11	+ 0. 22	2,082	2,434.
	14	12. 14. 0	7. 58. 55	42. 16. 6	+ 0. 36	+ 0. 12	2,109	2,433.
	17	12. 15. 11	7. 55. 3	43. 23. 27	— 0. 35	— 0. 15	2,149	2,430.
	17	12. 15. 11	7. 54. 30	43. 23. 30	— 0. 2	— 0. 18	2,149	2,430.
	21	11. 14. 46	7. 41. 43	44. 54. 53	+ 0. 28	+ 0. 29	2,203	2,426.
	25	13. 22. 0	7. 20. 9	46. 31. 56	+ 0. 58	+ 1. 4	2,258	2,421.

TABLE II. *Des Ascensions & Déclinaisons apparentes des Étoiles, auxquelles la Comète a été comparée.*

ASCENSION DROITE apparente. D. M. S.	DÉCLINAIS. APPARENTE. D. M. S.	CARACTÈRE DES ÉTOILES, Et autorités sur lesquelles leurs positions sont établies.
238. 27. 59	14. 47. 1 *A*	π de la Baleine, catalogue de Bradley.
352. 45. 32	0. 35. 35 *B*	λ des Poissons, catal. de Bradley.
353. 50. 30	2. 17. 18 *B*	19.e des Poissons, catal. de Bradley.
27. 43. 23	1. 42. 48	α du lien des Poiss., catal. de Bradley.
357. 52. 7	7. 17. 11	2. *c.* des Poissons, catal. de Mayer.
353. 5. 58	9. 7. 57	77.e de Pégase, déterm. par M. d'Agelet.
355. 23. 45	9. 44. 42	82.e de Pégase, déterminée par moi.
352. 56. 29	15. 8. 18½	76.e de Pégase, déterm. par M. d'Agelet.
355. 22. 33	17. 55. 16½	φ de Pégase, déterm. par M. d'Agelet.
350. 40. 0	21. 18. 56	*y* de Pégase, déterminée par moi.
348. 32. 28	39. 55. 6	Étoile de 6.e grand. } déterm. par moi.
348. 59. 10	31. 13. 31	Étoile de 7.e grand. } déterm. par moi.
347. 2. 50½	40. 35. 43½	9.e d'Andr. déterm. par M. d'Agelet.
347. 24. 24½	40. 53. 48	10.e d'Andr., déterm. par M. d'Agelet.
349. 11. 25	41. 43. 21	13.e d'Andr., déterm. par M. d'Agelet.
351. 54. 5	42. 4. 22	ι d'Andromède } déterm. par moi.
351. 45. 33	43. 13. 52	Étoile de 6.e grand. } déterm. par moi.
352. 27. 40	43. 8. 9	κ d'Andromède } déterm. par moi.
342. 42. 21	44. 12. 44	Étoile de 7.e grand. } déterm. par moi.

Cette Comète fut encore observée à Paris, par Mrs Cassini & Messier; & à Toulouse, par M. Darquier: on auroit pu la voir à Paris, dès le 18 Janvier, mais le mauvais temps ne le permit point.

Elle avoit été vue à l'île de Bourbon, dès le 15 Décembre 1783; M. de la Nux en fit, dans cette Isle,

plusieurs observations, dont la première est du 3 Janvier 1784; il en a déterminé les positions, en mesurant, avec un octant, sa distance à plusieurs étoiles fixes. M. Pingré qui a comparé ces observations à la théorie que j'ai rapportée ci-dessus, a trouvé qu'elles s'y accordent aussi bien qu'on peut l'attendre du moyen que M. de la Nux a employé pour fixer les lieux de la Comète: ces observations seront imprimées dans le recueil des Mémoires présentés à l'Académie par les Savans étrangers.

On vit aussi cette Comète, le 10 Janvier, au cap de bonne-Espérance; M. Tondu, étant en rade de la Guadeloupe, l'aperçut le 16 du même mois; M. le Chevalier d'Angos en fit plusieurs observations à Malte, à commencer du 20 Janvier; enfin, elle fut encore observée par M. l'abbé de Beauchamp, à Bagdad, les 19 & 22 Janvier, ensuite à Bassora, les 10, 20 & 25 Février.

OBSERVATION DE L'ÉCLIPSE DE LUNE, DU 6 MARS 1784,

Faite à l'Obſervatoire royal.

Par M. MÉCHAIN.

J'AI fait cette Obſervation de concert avec M. le Comte de Caſſini, qui donnera les détails de la ſienne. Je me ſuis ſervi d'une lunette achromatique de trois pieds & demi de foyer; les diſtances des cornes ont été priſes avec un micromètre, à fil curſeur, appliqué à cette lunette, & je n'ai employé qu'un groſſiſſement de vingt-ſept fois. M. de Caſſini meſuroit de ſon côté les parties éclairées du diſque de la Lune.

Temps vrai.	
14h 10′ 0″	Pénombre ſenſible; la Lune étoit dans de très-légers nuages, & elle étoit entourée d'un halo coloré.
14. 24. 30	Commencement de l'éclipſe; le bord de l'ombre étoit très-diffus.
14. 30. 37	Le bord de l'ombre, qui eſt toujours mal terminé, touche le bord de la longue tache blanche, dans laquelle ſe trouve *Heraclides*.
14. 35. 10	*Heraclides* entre dans l'ombre.
14. 39. 47	*Ariſtarchus* entre.
14. 43. 10	Diſtance des cornes, 18′ 51″.
14. 43. 40	*Ariſtarchus* tout dans l'ombre, dont le bord devient un peu mieux terminé.
14. 45. 50	*Plato* entre.
14. 47. 20	*Idem*, tout dans l'ombre.
14. 48. 10	Diſtance des cornes, 20′ 28″.
14. 51. 30	Diſtance des cornes, 22′ 5″.
14. 56. 30	*Ariſtoteles* entre.
14. 58. 10	*Idem*, à moitié.

Temps vrai.	
14^h 58′ 10″	Diſtance des cornes, 23′ 42″.
14. 59. 50	*Eudoxus* entre.
15. 0. 40	Un petit point lumineux, qui précède *Copernicus*, entre.
15. 2. 30	*Gallileus* entre dans l'ombre, qui le raſe très-long-temps ſans le couvrir entièrement.
15. 5. 30	L'ombre au bord de *Mare-Serenitatis.*
15. 6. 50	Diſtance des cornes, 25′ 18″.
15. 16. 30	Diſtance des cornes, 26′ 28″.
15. 19. 40	Diſtance des cornes, 26′ 55″.
15. 23. 0	L'ombre touche le bord de *Copernicus*, où elle eſt parvenue très-lentement.
15. 29. 10	Diſtance des cornes, 27′ 20″; cette diſtance n'augmenta plus, du moins ſenſiblement.
15. 33. 40	L'ombre touche *Menelaüs* & *Manilius*; la diſtance des cornes, comme la précédente.

Les nuages qui s'élevoient du ſud ont couvert la Lune, qui n'a plus reparu que de temps en temps à travers des nuages blancs, mais trop denſes pour qu'on pût obſerver aucune émerſion, ni diſtance des cornes.

A 16^h 46′ je revis la Lune dans un éclairci; elle étoit parfaitement nette, & l'éclipſe me parut totalement finie.

M. de Caſſini avoit obſervé la plus grande phaſe de 12′ 28″, à 15^h 32′, temps vrai.

Obſervation de la Lune au Méridien, avant le commencement de l'éclipſe.

NOUS avons obſervé, avec M. de Caſſini, le paſſage des deux bords de la Lune au méridien.

A 12^h 3′ 38″,7 temps moyen, l'étoile *d* du Lion avoit précédé le centre de la Lune de 15′ 28″,9 de temps moyen, ou de 3^d 52′ 52″,7, & la différence des hauteurs méridiennes du bord de la Lune & de l'étoile, corrigée de celle des réfractions, étoit de 9′ 35″,3. L'étoile δ de la

la Vierge, suivit le centre de la Lune au méridien de $1^h\ 39'\ 32'',4$, de temps moyen, ou de $24^d\ 57'\ 11'',5$; la différence des hauteurs méridiennes, corrigée de celle des réfractions, fut observée de $21'\ 32'',9$, entre le bord supérieur de la Lune & l'étoile.

Selon le catalogue de Bradley, on a, pour le 6 Mars 1784, les positions de ces deux étoiles affectées de l'aberration de la nutation, comme il suit.

α du Lion.		δ de la Vierge.	
Ascension droite.	*Déclinaison.*	*Ascension droite.*	*Déclinaison.*
$162^d\ 21'\ 42'',7$	$4^d\ 46'\ 14'',8$ *B.*	$191^d\ 11'\ 55'',5$	$4^d\ 34'\ 17'',5$.

En appliquant à ces positions les différences rapportées ci-dessus, la parallaxe de la Lune en hauteur calculée dans le sphéroïde de $37'\ 55'',7$, & le demi-diamètre horizontal de $15'\ 0'',1$, j'ai trouvé, pour $12^h\ 3'\ 38'',7$, l'ascension droite du centre de la Lune de $166^d\ 14'\ 39'',7$, sa déclinaison boréale de $5^d\ 18'\ 45'',8$; donc longitude $165^d\ 16'\ 56''$, latitude $0^d\ 32'\ 10'',7$ *A*, en supposant l'obliquité apparente de l'écliptique de $23^d\ 28'\ 10''$. Les Tables de la Lune, de Mayer, qui sont insérées dans l'Astronomie de M. de la Lande, donnent, pour le même instant, la longitude de $36''$ plus avancée, & la latitude de $23''\ \frac{1}{2}$ plus australe.

RECHERCHES
SUR LA FIGURE DES PLANÈTES.

Par M. LE GENDRE.

Lû le 7 Juillet 1784.

DEPUIS que Maclaurin a démontré ſynthétiquement & d'une manière très-élégante, que le ſphéroïde elliptique ſatisfait rigoureuſement à l'équilibre des Planètes dans les hypothèſes reçues, pluſieurs grands Géomètres * ſe ſont propoſé de déterminer directement toutes les figures d'équilibre poſſibles. Ils ont trouvé que l'ellipſoïde aplati ſatisfaiſoit de deux manières différentes, & ils ſont parvenus à exclure un grand nombre d'autres figures, comme ne pouvant remplir les conditions de l'équilibre; mais perſonne, que je ſache, n'a encore démontré que l'ellipſoïde aplati eſt abſolument le ſeul qui ſatisfaſſe à la queſtion. C'eſt cette propoſition qui fait le ſujet de ce Mémoire.

Je ſuppoſe, comme on paroît l'avoir fait juſqu'à préſent, que la figure cherchée eſt celle d'un ſolide de révolution peu différent d'une ſphère, & partagé en deux parties égales & ſemblables par ſon équateur. L'attraction de ce ſphéroïde s'évalue facilement à l'aide des formules que j'ai données pour cet objet, *(Mémoires des Savans étrangers, tome X)*; & j'en tire l'équation du méridien

* M. d'Alembert, *tomes V & VII de ſes Opuſcules*. M. de la Place, *Mém. de l'Acad. ann. 1772.*

La propoſition qui fait l'objet de ce Mémoire, étant démontrée d'une manière beaucoup plus ſavante & plus générale dans un Mémoire que M. de la Place a déjà publié dans le volume de 1782, je dois faire obſerver que la date de mon Mémoire eſt antérieure, & que la propoſition qui paroît ici, telle qu'elle a été lûe en juin & juillet 1784, a donné lieu à M. de la Place, d'approfondir cette matière, & d'en préſenter aux Géomètres, une théorie complète.

exprimée par une suite infinie, équation d'une forme très-différente de celle qu'a trouvée M. de la Place, pour le cas où le sphéroïde ne diffère qu'infiniment peu de la sphère. Je fais voir ensuite que la série renfermée dans cette équation, est toujours convergente; que l'ellipse y est comprise suivant le théorème de Maclaurin, & qu'aucune autre courbe n'y peut satisfaire.

Pour démontrer ces diverses propositions, j'ai recours aux propriétés d'une espèce particulière de fonctions rationnelles qui ne se sont point encore présentées aux Analystes, & qui paroissent mériter leur attention; mais pour ne pas faire diversion à mon sujet principal, j'expose de suite ce qui a rapport à ces fonctions.

Théorèmes sur une espèce particulière de fonctions rationnelles.

1. Les fonctions rationnelles dont il s'agit, sont formées suivant cette loi, qu'il est facile de saisir:

$$X^{\text{I}} = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2},$$

$$X^{\text{II}} = \frac{5.7}{2.4}.x^4 - \frac{3.5}{2.4}.2x^2 + \frac{1.3}{2.4},$$

$$X^{\text{III}} = \frac{7.9.11}{2.4.6}.x^6 - \frac{5.7.9}{2.4.6}.3x^4 + \frac{3.5.7}{2.4.6}.3x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6},$$

$$X^{\text{IV}} = \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}.x^8 - \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}.4x^6 + \frac{5.7.9.11}{2.4.6.8}.6x^4 - \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}.4x^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8},$$

&c.

Ces fonctions X^{I}, X^{II}, X^{III}, &c. viennent du développement de la quantité $(1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, & on a exactement

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 - 2xz + z^2)}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 + 2xz + z^2)}}$$

$$= 1 + X^{\text{I}}z^2 + X^{\text{II}}z^4 + X^{\text{III}}z^6 + \&c\ldots(A').$$

THÉORÈME I.

2. *Si on fait* x = 1, *les fonctions* X', X'', X''', &c. *se réduisent toutes à l'unité.*

Car en faisant $x = 1$, le premier membre de l'équation (A') devient $\frac{1}{1-z^2}$ c'est-à-dire, $1 + z^2 + z^4 + z^6 +$ &c.

THÉORÈME II.

3. *Les intégrales suivantes, prises depuis* x = 0 *jusqu'à* x = 1, *se réduisent toutes à zéro, quelles que soient les constantes* α, β, γ, &c.

$$\int \alpha X' dx = 0,$$
$$\int (\alpha + \beta x^2) X'' dx = 0,$$
$$\int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X''' dx = 0;$$
&c.

Car entre les limites données, on a, par exemple,

$$\int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X''' dx = \frac{9.11\alpha + 7.11\beta + 7.9\gamma}{2.4.6}$$
$$- \frac{3(7.9.\alpha + 5.9\beta + 5.7\gamma)}{2.4.6} + \frac{3(5.7\alpha + 3.7\beta + 3.5\gamma)}{2.4.6}$$
$$- \frac{(3.5\alpha + 1.5\beta + 1.3\gamma)}{2.4.6}.$$

Or, n variant de l'unité, la différence troisième de la formule $(2n + 1)(2n + 3)\alpha + (2n - 1)(2n + 3)\beta + (2n - 1)(2n + 1)\gamma$ est nulle: donc $\int (\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4) X''' dx = 0$, & il est facile de voir qu'une démonstration semblable auroit lieu dans tous les autres cas.

THÉORÈME III.

4. *Entre les mêmes limites,* x = 0, x = 1, *on a généralement*

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1},$$

$$\int x^n X^{\text{I}}\,dx = \frac{n}{n+1.n+3},$$

$$\int x^n X^{\text{II}}\,dx = \frac{n.n-2}{n+1.n+3.n+5},$$

$$\int x^n X^{\text{III}}\,dx = \frac{n.n-2.n-4}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

&c.

Il ſuffira encore de démontrer cette propoſition dans un cas particulier: or on a

$$\int x^n X^{\text{III}}\,dx = \frac{7.9.11}{2.4.6}\cdot\frac{1}{n+7} - \frac{5.7.9}{2.4.6}\cdot\frac{3}{n+5}$$
$$+ \frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{3}{n+3} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{n+1}.$$

Cette quantité réduite à un dénominateur commun, prendra la forme

$$\frac{\alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta}{n+1.n+3.n+5.n+7};$$

mais, ſuivant le théorème précédent, cette intégrale doit s'évanouir dans trois cas, lorſque $n = 0$, lorſque $n = 2$, & lorſque $n = 4$; elle deviendra donc

$$\frac{\alpha n\,(n-2)\,(n-4)}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

Si on fait enſuite n infini, on aura

$$\frac{\alpha}{n} = \frac{7.9.11}{2.4.6}\cdot\frac{1}{n} - \frac{5.7.9}{2.4.6}\cdot\frac{3}{n} + \frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{3}{n} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{n};$$

donc par le théorème I, $\alpha = 1$, &

$$\int x^n X^{\text{III}}\,dx = \frac{n.n-2.n-4}{n+1.n+3.n+5.n+7}.$$

THÉORÈME IV.

5. *Si on intègre toujours entre les limites* $x = 0$ & $x = 1$,

on aura $\int X^{\mu} X^{\nu} dx = 0$ & $\int X^{\mu} X^{\mu} dx = \frac{1}{4\mu + 1}$, *les indices* μ *&* ν *étant différens l'un de l'autre dans la première formule.*

C'eſt une conſéquence immédiate des deux *théorèmes précédens.*

THÉORÈME V.

6. *La fonction* X^{μ} *en général eſt décompoſable en* μ *facteurs de la forme* $x^2 - \alpha^2$, $x^2 - \beta^2$, $x^2 - \gamma^2$, &c. α, β, γ, *étant des racines réelles, inégales, & plus petites que l'unité.*

Prenons, par exemple, la fonction X^{IV}: puiſqu'entre les limites $x = 0$ & $x = 1$, on a $\int X^{IV} dx = 0$ (*Th. II*), il faut que X^{IV} ne ſoit pas toujours de même ſigne depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$. Donc α étant moindre que l'unité, on peut ſuppoſer $X^{IV} = (x^2 - \alpha^2) P$; mais par le *théorème II*, on a $\int (x^2 - \alpha^2) X^{IV} dx = 0$ ou $\int (x^2 - \alpha^2)^2 P dx = 0$: il faut donc que depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$, la fonction P n'ait pas toujours le même ſigne. Soit encore β plus petit que l'unité, & on pourra faire $P = (x^2 - \beta^2) Q$ ou $X^{IV} = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2) Q$; mais ſuivant le *théorème II*, on a $\int (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2) X^{IV} dx = 0$, ou $\int (x^2 - \alpha^2)^2 (x^2 - \beta^2)^2 Q dx = 0$: d'où il ſuit que Q change encore de ſigne depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$. Je fais de la même manière $Q = (x^2 - \gamma^2) R$, ou $X^{IV} = (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2) R$; & comme, en vertu du même *théorème II*, on a $\int (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2) X^{IV} dx = 0$, il en réſultera que R doit encore changer de ſigne depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$, & que X^{IV} eſt enfin de la forme

$$A (x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2)(x^2 - \delta^2),$$

α, β, γ, δ étant plus petites que l'unité, & A étant le coéfficient conſtant $\frac{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$.

Je dis de plus, que ces facteurs seront inégaux entr'eux : car si on avoit, par exemple, $\alpha = \delta$, X^{IV} seroit de la forme

$$A(x^2 - \alpha^2)^2 (x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2).$$

Or on doit avoir, suivant le *théorème II*,

$$\int (x^2 - \beta^2)(x^2 - \gamma^2) X^{IV} dx = 0:$$

il faudroit donc que

$$\int (x^2 - \alpha^2)^2 (x^2 - \beta^2)^2 (x^2 - \gamma^2)^2 dx$$

fût zéro, ce qui est impossible.

THÉORÈME VI.

7. *Depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ exclusivement, la quantité* X^μ *est toujours plus petite que l'unité.*

Je reprends l'équation *(A')* *n.° 1*, & je suppose

$$1 - 2xz + z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z);$$

j'aurai

$$\alpha + \beta = 2x, \ \& \ \alpha\beta = 1.$$

Mais x étant régardé ici comme plus petit que l'unité, je puis supposer $x = \text{cos.}\,\varphi$; il en résultera

$$\alpha = \text{cos.}\varphi + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\varphi, \ \& \ \beta = \text{cos.}\varphi - \sqrt{-1}\,\text{sin.}\varphi:$$

on aura ensuite

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - 2xz + z^2)}} = (1 - \alpha z)^{-\frac{1}{2}} (1 - \beta z)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(1 + \tfrac{1}{2}\alpha z + \frac{1.3}{2.4}\alpha^2 z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3 z^3 + \&c.\right)$$

$$\left(1 + \tfrac{1}{2}\beta z + \frac{1.3}{2.4}\beta^2 z^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\beta^3 z^3 + \&c.\right).$$

Développant ce produit, & ne conservant que les puissances paires de z, on aura la valeur de

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 - 2xz + z^2)}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 + 2xz + z^2)}}$$

exprimée par cette ſuite dont la loi eſt très-ſimple:

$$1 + \frac{1.3}{2.4}.(\alpha^2 + \beta^2)z^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(\alpha^4 + \beta^4)z^4 + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}(\alpha^6 + \beta^6)z^6 + \&c.$$

$$+ \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\ \alpha\beta + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\alpha\beta + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}.\frac{1}{2}(\alpha^4 + \beta^4)\alpha\beta$$

$$+ \frac{1.3}{2.4}.\frac{1.3}{2.4}\ \alpha^2\beta^2 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{1.3}{2.4}(\alpha^2 + \beta^2)\alpha^2\beta^2$$

$$+ \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^4\beta^4.$$

La ſuite

$$1 + X^{I}z^2 + X^{II}z^4 + X^{III}z^6 + \&c.$$

étant ainſi trouvée, on peut faire

$$\alpha\beta = 1\ \&\ \alpha^m + \beta^m = 2\ \text{coſ.}\ m\varphi,$$

& on aura

$$X^{I} = \frac{1.3}{2.4}.\ 2\ \text{coſ.}\ 2\varphi + \frac{1}{2}.\ \frac{1}{2},$$

$$X^{II} = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\ 2\ \text{coſ.}\ 4\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1}{2}\ 2\ \text{coſ.}\ 2\varphi$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}.\ \frac{1.3}{2.4},$$

$$X^{III} = \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}.2\text{coſ.}\ 6\varphi + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}.\frac{1}{2}.2\ \text{coſ.}\ 4\varphi$$
$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\frac{1.3}{2.4}\ 2\text{coſ.}\ 2\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\ \frac{1.3.5}{2.4.6},$$

&c.

Il eſt clair maintenant que les fonctions X^{I}, X^{II}, &c. ſont les plus grandes qu'il eſt poſſible, lorſque $\varphi = 0$, & qu'elles ſont plus petites dans tous les autres cas. Mais lorſque

lorsque $\varphi = 0$, on a $x = 1$, & suivant le *théorème I*, ces fonctions se réduisent à l'unité : donc elles sont au-dessous de l'unité, lorsque x est entre 0 & 1.

THÉORÈME VII.

8. *L'intégrale* $\int \frac{X^{\mu} dx}{(1 + kx^2)^{\frac{2\mu + 3}{2}}}$, *prise entre les limites* $x = 0$, $x = 1$, *est égale à* $\frac{(-k)^{\mu}}{(2\mu + 1)(1 + k)^{\frac{2\mu + 1}{2}}}$ *quel que soit* k.

Si on fait $z = \frac{p}{\sqrt{(1 + kx^2)}}$, l'équation *(A')* n.° 1. donnera

$$\frac{\frac{1}{2} dx}{(1 + kx^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left[1 - \frac{2px}{(1 + kx^2)} + \frac{p^2}{1 + kx^2}\right]}}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} dx}{(1 + kx^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left[1 + \frac{2px}{\sqrt{(1 + kx^2)}} + \frac{p^2}{1 + kx^2}\right]}}$$

$$= \frac{dx}{(1 + kx^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{X' dx}{(1 + kx^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot p^2 + \frac{X'' dx}{(1 + kx^2)^{\frac{7}{2}}} \cdot p^4 + \&c.$$

Pour intégrer le premier membre, je fais $\frac{x}{\sqrt{(1 + kx^2)}} = y$, ensuite $1 + pky = u$, & la différencielle

$$\frac{\frac{1}{2} dx}{(1 + kx^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left[1 - \frac{2px}{\sqrt{(1 + kx^2)}} + \frac{p^2}{1 + kx^2}\right]}}$$

devient

$$\frac{1}{2p\sqrt{k}} \cdot \frac{du}{\sqrt{(1+k+kp^2-u^2)}},$$

dont l'intégrale eſt

$$-\frac{1}{2p\sqrt{k}} \text{ arc cof. } \frac{u}{\sqrt{(1+k+kp^2)}}.$$

Intégrant de la même manière, l'autre partie du premier membre, on trouvera que l'intégrale totale, priſe depuis $x = 0$ juſqu'à $x = 1$, eſt

$$\frac{1}{2p\sqrt{k}} \text{ arc cof. } \frac{\sqrt{(1+k)}-pk}{\sqrt{(1+k)}.\sqrt{(1+k+kp^2)}}$$

$$-\frac{1}{2p\sqrt{k}} .\text{arc cof. } \frac{\sqrt{(1+k)}+pk}{\sqrt{(1+k)}.\sqrt{(1+k+kp^2)}}.$$

Il eſt facile enſuite de voir que cette expreſſion revient à $\frac{1}{p\sqrt{k}}$ .arc tang. $\frac{p\sqrt{k}}{\sqrt{(1+k)}}$, qui équivaut à la ſuite

$$\frac{1}{\sqrt{(1+k)}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{kp^2}{(1+k)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{5} \cdot \frac{k^2p^4}{(1+k)^{\frac{5}{2}}} - \&c.$$

d'où l'on conclud

$$\int \frac{X^{\mu}dx}{(1+kx^2)^{\frac{2\mu+3}{2}}} = \frac{(-k)^{\mu}}{(2\mu+1)(1+k)^{\frac{2\mu+1}{2}}}.$$

Équation du Méridien.

9. Je ſuppoſe, comme il a été dit ci-deſſus, que le méridien du ſphéroïde eſt une courbe quelconque, diviſée en quatre parties égales par le diamètre de l'équateur & par l'axe de rotation. J'appelle 1 la denſité du ſphéroïde; M, ſa maſſe ou ſon volume; Mf, la force centrifuge à la diſtance 1 de l'axe; $\frac{dM}{rr}$ l'attraction d'une particule dM à la diſtance r. Un point quelconque, hors du ſphéroïde, étant donné de poſition par ſa diſtance z au centre,

& par l'angle φ que fait cette diſtance avec l'axe, j'appelle V, la ſomme des quotiens qu'on aura en diviſant chaque particule du ſphéroïde par ſa diſtance à ce point.

L'attraction du ſphéroïde, ſur ce même point, ſe réduit à deux forces X & Y, parallèles à l'axe & à l'équateur, leſquelles peuvent s'exprimer de la manière ſuivante par les différences partielles de V:

$$X = -\frac{dV}{dz}\,\text{coſ.}\,\varphi + \frac{dV}{d\varphi}\cdot\frac{\text{ſin.}\,\varphi}{z},$$

$$Y = -\frac{dV}{dz}\,\text{ſin.}\,\varphi - \frac{dV}{d\varphi}\cdot\frac{\text{coſ.}\,\varphi}{z}.$$

Voyez le *tome X des Savans étrangers, page 423.*

On peut ſuppoſer maintenant que le point dont il s'agit, eſt ſitué à la ſurface même du ſphéroïde, & comme la réſultante des forces qui lui ſont appliquées, doit être perpendiculaire au méridien, on aura l'équation

$$\frac{Y - Mfz\,\text{ſin.}\,\varphi}{X} = \frac{-d(z\,\text{coſ.}\,\varphi)}{d(z\,\text{ſin.}\,\varphi)};$$

dans laquelle ſubſtituant les valeurs de X & de Y, & intégrant, on trouve l'équation du méridien,

$$V + \tfrac{1}{2}Mfz^2\,\text{ſin.}^2\,\varphi = H',$$

H' étant une conſtante arbitraire. Cette équation eſt la même qu'a donnée M. de la Place, dans le volume de l'Académie de 1772, & dans ſa Théorie du mouvement & de la figure des planètes, *page 137.*

10. Si on ſubſtitue maintenant la valeur de V, que j'ai donnée dans le Mémoire cité *(page 422)*, pour les ſphéroïdes de révolution, l'équation du méridien deviendra

$$\left.\begin{aligned} H = \tfrac{1}{2}fz^2(1-x^2) + \frac{1}{z} \\ + \frac{A}{z^3}X' + \frac{B}{z^5}X'' + \frac{C}{z^7}X''' + \text{\&c.}\end{aligned}\right\}\ldots(B')$$

Dans cette équation, j'ai fait cos. $\varphi = x$, & les quantités X', X'', X''' &c. sont précisément les fonctions dont il a été parlé ci-dessus. Quant aux constantes H, A, B, C, &c. la première H est arbitraire, & doit se déterminer par la condition, que lorsque $\varphi = 0$, z soit égal au demi-axe du sphéroïde; les autres dépendent des intégrations suivantes, qu'on doit étendre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$:

$$M = \frac{4\pi}{3} \int z^3 \, dx,$$

$$MA = \frac{4\pi}{5} \int z^5 X' \, dx,$$

$$MB = \frac{4\pi}{7} \int z^7 X'' \, dx,$$

$$MC = \frac{4\pi}{9} \int z^9 X''' \, dx,$$

&c.

11. L'équation (B') doit comprendre toutes les figures d'équilibre possibles; mais avant d'en tirer quelque conséquence, il est bon de faire voir que la suite qu'elle renferme est toujours convergente, quel que soit le méridien du sphéroïde, pourvu qu'il ne diffère pas beaucoup du cercle. Supposons donc $z = 1 + kp$, k étant une quantité très-petite, & p une fonction de x, telle que le produit kp soit toujours fort petit par rapport à l'unité. Si les deux parties du méridien, séparées par l'équateur, ne sont qu'une seule & même courbe, il faudra que p soit une fonction paire de x; mais l'équation (B') n'est point assujettie à cette condition, elle n'exige la loi de continuité que depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Il faut seulement supposer qu'à l'équateur où $x = 0$, $\frac{dp}{dx}$ devient nul: en sorte que si p se réduit à $\alpha + \beta x^n$, lorsque x est infiniment petit, il faut que n soit plus grand que l'unité. De même, lorsque x est infiniment près de

l'unité, p devenant $\alpha' + \mathcal{C}'(1 - xx)^{n'}$, il faut que n' soit encore plus grand que l'unité, pour qu'on ait au pôle $\frac{dz}{d\varphi} = 0$. Avec ces deux conditions, la courbure du sphéroïde sera uniforme dans toute son étendue.

Maintenant, si on substitue la valeur de z dans les formules du *n.° 10*, & qu'on rejette les puissances de k, supérieures à la première, on aura

$$M = \frac{4\pi}{3}\int(1 + 3kp)\,dx, \; MA = \frac{4\pi}{5}\int(1 + 5kp)\,X'\,dx, \text{ \&c.}$$

donc

$$A = 3k\int pX'\,dx, \; B = 3k\int pX''\,dx, \; C = 3k\int pX'''\,dx, \text{ \&c.}$$

Or, la quantité X^{μ} étant toujours au-dessous de l'unité, & changeant μ fois de signe, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ *(théorèmes V & VI)*, il est clair que l'aire $\int pX^{\mu}dx$, où p ne passe pas une certaine limite, est composée de parties positives & de parties négatives, qui se détruisent d'autant mieux qu'elles sont plus petites & plus multipliées, surtout lorsque μ est un nombre un peu grand. On doit donc regarder la suite A, B, C, &c. comme convergente, au moins lorsque μ a acquis une certaine grandeur.

12. Pour nous en assurer d'une manière plus précise, considérons le cas où $p = x^n$, alors, suivant le *n.° 4*, on aura

$$\int x^n X^{\mu} dx = \frac{n.n - 2.n - 4 \ldots n - 2\mu + 2}{n + 1.n + 3.n + 5 \ldots n + 2\mu + 1};$$

si 2μ est considéré comme fort grand par rapport à n, on trouvera facilement par les formules connues,

$$\int x^n X^{\mu} dx = \frac{A'}{\mu^{n + \frac{1}{2}}},$$

A' étant un coéfficient constant; or, nous avons dit *(n.° 11)* que n devoit être plus grand que l'unité; donc la suite A, B, C, D, &c. décroîtra, au moins dans les termes

éloignés, plus rapidement que la ſuite

$$\frac{A'}{1},\ \frac{A'}{4\sqrt{2}},\ \frac{A'}{9\sqrt{3}},\ \&c.$$

Donc ſi p étoit de la forme $\alpha + \mathsf{G}x^n + \gamma x^m + \&c.$ ce qui comprend déjà un très-grand nombre de fonctions, la ſuite $\int pX^{\mu}dx$, $\int pX^{\mu+1}dx$, $\int pX^{\mu+2}dx$, &c. ſeroit plus convergente que la ſuite $\frac{1}{\mu^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{(\mu+1)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{1}{(\mu+2)^{\frac{3}{2}}}$, &c. en ſuppoſant toujours que μ a paſſé une certaine limite.

On pourroit, dans pluſieurs autres cas encore très-étendus, démontrer la convergence de la ſuite A, B, C, D, &c; mais nous nous bornerons à ce qui vient d'en être dit, & nous croyons qu'il y a d'autant moins de difficulté à admettre cette propoſition, que la fonction p doit être compriſe entre certaines limites, & ſatisfaire à des conditions particulières qui reſtreignent beaucoup l'étendue de l'aire $\int pX^{\mu}dx$.

La ſuite A, B, C, D. &c. étant convergente, au moins dans les termes éloignés, on en conclura que la ſuite AX^{I}, BX^{II}, CX^{III}, &c. l'eſt auſſi, puiſque les quantités X^{I}, X^{II}, X^{III}, &c. ne peuvent jamais ſurpaſſer l'unité, & ſont preſque toujours fort au-deſſous. D'où il réſulte que l'équation (B') peut être employée comme repréſentant avec exactitude le méridien d'une planète en équilibre.

L'Ellipſe eſt compriſe dans l'équation (B').

13. On ne ſauroit douter de cette propoſition, d'après la théorie de Maclaurin, mais on ſera bien aiſe de voir nos calculs s'accorder avec cette théorie. Soit donc a le demi-grand axe de l'ellipſe, c ſon excentricité, $\frac{c^2}{a^2 - c^2} = k$; l'équation de l'ellipſe ſera $z^2 = \frac{a^2}{1 + kx^2}$, & les intégrales M, MA, MB, &c. du *n.° 10*, ſeront, ſuivant le *théorème VII*,

$$M = \frac{4\pi a^3}{3}\int\frac{dx}{(1+kx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi a^3}{3}.\frac{1}{(1+k)^{\frac{1}{2}}},$$

$$M\,A = \frac{4\pi a^5}{5}\int\frac{X^{\text{I}}\,dx}{(1+kx^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{4\pi a^5}{5}.\frac{-k}{3(1+k)^{\frac{3}{2}}},$$

$$M\,B = \frac{4\pi a^7}{7}\int\frac{X^{\text{II}}\,dx}{(1+kx^2)^{\frac{7}{2}}} = \frac{4\pi a^7}{7}.\frac{k^2}{5(1+k)^{\frac{5}{2}}},$$

$$M\,C = \frac{4\pi a^9}{9}\int\frac{X^{\text{III}}\,dx}{(1+kx^2)^{\frac{9}{2}}} = \frac{4\pi a^9}{9}.\frac{-k^3}{7(1+k)^{\frac{7}{2}}},$$

&c.

D'où l'on tire

$$A = -\tfrac{3}{5}.\frac{ka^2}{3(1+k)} = -\frac{3c^2}{3.5},\ B = \frac{3c^4}{5.7},\ C = \frac{-3c^6}{7.9},\ \&c.$$

& pour le dire en paſſant, ces valeurs confirment ce que nous avons dit (*n.*os *11 & 12*) ſur la convergence de la ſuite, A, B, C, &c. a étant regardé ici comme l'unité.

Cela poſé, l'équation (B') deviendra

$$\left.\begin{array}{l} H = \frac{1}{2}fa z^2(1 - x^2) + \frac{3a}{z} \\ \left(\frac{1}{3} - \frac{X^{\text{I}}}{3.5}.\frac{c^2}{z^2} + \frac{X^{\text{II}}}{5.7}.\frac{c^4}{z^4} - \&c.\right) \end{array}\right\}\ldots(C')$$

& il faut faire voir qu'on peut rendre cette équation identique, en donnant aux conſtantes H & f les valeurs convenables.

14. Propoſons-nous d'abord de ſommer la ſuite

$$\frac{1}{1.3} - \frac{X^{\text{I}}}{3.5}.\frac{c^2}{z^2} + \frac{X^{\text{II}}}{5.7}.\frac{c^4}{z^4} - \frac{X^{\text{III}}}{7.9}.\frac{c^6}{z^6} + \&c.$$

qui entre dans cette équation: ſuivant la formule (A'), *n.*o *1*, on aura

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 - 2px\sqrt{-1} - p^2)}} + \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(1 + 2px\sqrt{-1} - p^2)}}$$

$$= 1 - X^{\text{I}}p^2 + X^{\text{II}}p^4 - X^{\text{III}}p^6 + \&c.$$

multipliant chaque membre par dp & intégrant, on aura

$$\tfrac{1}{2} \text{ arc fin. } \frac{p + x\sqrt{-1}}{\sqrt{(1 - xx)}} + \tfrac{1}{2} \text{ arc fin. } \frac{p - x\sqrt{-1}}{\sqrt{(1 - xx)}}$$

$$= p - \frac{X^{I} p^3}{3} + \frac{X^{II} p^5}{5} - \&c.$$

Soit $u =$ tang. ψ & $p^2 (1 + u^2) = u^2 (1 + x^2 u^2)$, on trouvera que le premier membre se réduit à l'arc réel ψ, & qu'ainsi on a

$$\psi = p - \tfrac{1}{3} X^{I} p^3 + \tfrac{1}{5} X^{II} p^5 - \tfrac{1}{7} X^{III} p^7 + \&c.$$

Multipliant chaque membre par $p\,dp$, l'intégrale du premier sera

$$\int \psi\, p\,dp = \tfrac{1}{2} pp\,\psi - \int \frac{p^2}{2} \cdot \frac{du}{1 + uu}$$

$$= \tfrac{1}{2} p^2 \psi - \int \frac{\tfrac{1}{2} u^2 du (1 + x^2 u^2)}{(1 + u^2)^2} = \left(\tfrac{1}{2} p^2 + \frac{3x^2 - 1}{4}\right) \psi$$

$$- \frac{u}{1 + u^2} \left(\tfrac{1}{2} x^2 u^2 + \frac{3x^2 - 1}{4}\right).$$

J'apelle F, cette quantité, & j'aurai

$$F = \tfrac{1}{3} p^3 - \frac{1}{3 \cdot 5} X^{I} p^5 + \frac{1}{5 \cdot 7} X^{II} p^7 - \frac{1}{7 \cdot 9} X^{III} p^9 + \&c.$$

Maintenant si l'on fait

$$p = \frac{c}{z} \ \& \ u^2 = \frac{c^2}{a^2 - c^2},$$

on verra facilement que l'équation

$$p^2 (1 + u^2) = u^2 (1 + x^2 u^2),$$

est la même que l'équation de l'ellipse

$$\frac{a^2}{z^2} = 1 + \frac{c^2 x^2}{a^2 - c^2};$$

d'où il résulte qu'en faisant

$$\frac{c}{\sqrt{(a^2 - c^2)}} = \text{tang. } \psi = u, \text{ ou } \frac{c}{a} = \text{fin. } \psi;$$

la

la somme de la suite

$$\frac{1}{1.3} - \frac{X^1}{3.5} \cdot \frac{c^2}{z^2} + \frac{X^{11}}{5.7} \cdot \frac{c^4}{z^4} - \&c.$$

sera $\frac{Fz^3}{c^3}$, F étant

$$\left(\tfrac{1}{2}p^2 + \frac{3x^2-1}{4}\right)\psi - \frac{a}{1+u^2}\left(\tfrac{1}{2}x^2u^2 + \frac{3x^2-1}{4}\right.$$

15. L'équation (C') devient, par cette substitution,

$$Hp^2 = \tfrac{1}{2}afc^2(1 - x^2) + \frac{3aF}{c};$$

& comme chaque membre, eu égard à la variable x, est simplement de la forme $\alpha + \beta x^2$, on la rend bientôt identique en prenant

$$H = \frac{3}{2\,\text{sin.}^3\psi}(\psi - \text{sin.}\psi\,\text{cos.}\psi),$$

$$(D')\ldots fa^3 = \frac{3}{2\,\text{sin.}^3\psi}[(3 - 2\,\text{sin.}^2\psi)\psi - 3\,\text{sin.}\psi\,\text{cos.}\psi].$$

Puisque $\text{sin.}\psi = \frac{c}{a}$, ces valeurs pourroient être exprimées par des suites convergentes & régulières, comme il suit :

$$H = 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{3c^2}{5a^2} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{3c^4}{7a^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{3c^6}{9a^6} + \&c.$$

$$fa^3 = \frac{6c^2}{3.5\,a^2} + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{6c^4}{5.7\,a^4} + \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{6c^6}{7.9\,a^6} + \frac{3.5.7}{2.4.6} \cdot \frac{6c^8}{9.11\,a^8} + \&c.$$

L'équation (D'), & celle qui exprime la masse du fluide $M = \frac{4}{3}\pi a^3\,\text{cos.}\psi$, serviront à déterminer entièrement l'ellipse qui satisfait à l'équilibre, & ces équations s'accordent parfaitement avec celles qui résultent de la théorie de Maclaurin.

16. Si on élimine a^3 de ces deux équations, on aura

$$\frac{Mf}{2\pi} = \psi(3\,\text{cot.}^3\psi + \text{cot.}\psi) - 3\,\text{cot.}^2\psi;$$

or, en regardant la force centrifuge Mf comme infiniment petite, cette équation eſt ſuſceptible de deux ſolutions; car ſelon qu'on ſuppoſe ψ infiniment petit, ou infiniment près de 90^d, on a

$$\frac{Mf}{2\pi} = \frac{4}{15}\psi^2 \;\&\; \frac{Mf}{2\pi} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\pi - \psi\right).$$

En général la même équation eſt ſuſceptible de deux ſolutions, & il y a par conſéquent deux figures elliptiques qui ſatisfont à l'équilibre, quelle que ſoit la force centrifuge Mf, pourvu que $\frac{Mf}{2\pi}$ n'excède pas le *maximum* de $\psi(3\,\text{cot.}^3\psi + \text{cot.}\psi) - 3\,\text{cot.}^2\psi$, qui eſt environ 0,22466, & qui a lieu lorſque $\frac{2\psi}{\text{ſin.}\,2\psi} = \frac{8 + \text{coſ.}\,2\psi}{5 + 4\,\text{coſ.}\,2\psi}$.

Au point du *maximum*, les deux figures elliptiques ſe réduiſent à une ſeule, dont les axes ſont dans le rapport de 1 à 2,72 environ.

Dans tous les autres cas, les deux ellipſes qui ſatisfont, ſont, l'une plus aplatie, l'autre moins que ſuivant le rapport précédent; & il eſt très-remarquable que ces deux figures diffèrent d'autant plus entr'elles, que la force centrifuge eſt plus petite. C'eſt ainſi que le ſphéroïde terreſtre qui eſt en équilibre lorſque les axes ſont dans le rapport de 230 à 231, peut l'être encore, ſi on ſuppoſe les axes dans le rapport de 1 à 681. M. d'Alembert eſt le premier qui ait remarqué qu'il pouvoit y avoir pluſieurs ſphéroïdes elliptiques qui ſatisfiſſent à l'équilibre. M. de la Place a fait voir enſuite que le nombre de ces ſphéroïdes ſe réduit à deux, & il a fixé en même temps les limites au-delà deſquelles la figure elliptique ceſſe de ſatisfaire. Au reſte, on peut obſerver que dans les ellipſoïdes extrêmement

aplatis, la pesanteur à l'équateur étant presque nulle, le fluide peut se dissiper avec beaucoup de facilité, & par conséquent cette figure d'équilibre ne doit pas être regardée comme bien stable.

L'Ellipse est la seule courbe qui satisfasse à l'équation (B').

17. Soient toujours a & c les élémens de l'ellipse trouvée, au moins de celle qui est peu excentrique, on peut supposer $a = 1$ & $\frac{c^2}{1 - c^2} = k$; alors on aura

$$f = \frac{6c^2}{3.5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{6c^4}{5.7} + \frac{3.5}{2.4} \cdot \frac{6c^6}{7.9} + \&c.$$
$$= \left(\frac{6}{3.5}k - \frac{6}{5.7} \cdot 2k^2 + \frac{6}{7.9} \cdot 3k^3 - \&c.\right)\sqrt{(1+k)},$$

& l'équation (B') deviendra

$$\left.\begin{array}{l} H = z^2(1 - x^2)\left(\frac{3k}{3.5} - \frac{6k^2}{5.7} + \frac{9k^3}{7.9} - \&c.\right)\sqrt{(1+k)} \\ + \frac{1}{z} + \frac{A}{z^3} \cdot X' + \frac{B}{z^5}X'' + \frac{C}{z^7}X''' + \&c. \end{array}\right\} \ldots (E')$$

Nous avons vu qu'on satisfaisoit à cette équation, en prenant $\frac{1}{z^2} = 1 + kx^2$; mais supposons qu'on ait plus généralement

$$\frac{1}{z^2} = 1 + k(x^2 + p) + k^2q + k^3r + \&c. \ldots (F')$$

$p, q, r,$ &c. étant des fonctions quelconques de x.

Je substitue dans l'équation (E') la valeur de z, tirée de l'équation (F'); & calculant d'abord tout ce qui multiplie la première puissance de k, j'observe que la partie variable doit se détruire d'elle-même, à l'exception des termes qui renferment p. Or, on trouve facilement que les termes de cette espèce, introduits dans $\frac{1}{z}$, A, B, C, &c.

ſont $\frac{1}{2}pk$, — $\frac{3}{2}k\int pX'dx$, — $\frac{3}{2}k\int pX''dx$, — $\frac{3}{2}k\int pX'''dx$, &c. il faut donc que la quantité

$$\tfrac{1}{2}p - \tfrac{3}{2}X'\int pX'dx - \tfrac{3}{2}X''\int pX''dx - \tfrac{3}{2}X'''\int pX'''dx - \&c.$$

ſe réduiſe à une conſtante que j'appelle $\frac{1}{2}\alpha$.

De-là réſulte la forme même de la valeur de p; ſavoir,

$$p = \alpha + \beta X' + \gamma X'' + \delta X''' + \&c.$$

& il n'eſt pas à craindre que cette ſuite ſoit divergente, ſuivant ce qui a été dit (*n.*os *11* & *12*). Cette valeur de p donne, par le *théorème IV*,

$\int pX'dx = \frac{1}{5}\beta$, $\int pX''dx = \frac{1}{9}\gamma$, $\int pX'''dx = \frac{1}{13}\delta$, &c: & comme

$$p - 3X'\int pX'dx - 3X''\int pX''dx - \&c$$

doit ſe réduire à α, on aura cette ſeconde valeur de p

$$p = \alpha + \tfrac{3}{5}\beta X' + \tfrac{3}{9}\gamma X'' + \tfrac{3}{13}\delta X''' + \&c;$$

qui étant comparée à la précédente, donne $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, &c. donc p ſe réduit à la conſtante α. Mais ſi on conſidère que la maſſe ne change pas & qu'elle eſt la même que dans le cas de l'ellipſoïde, on en conclura $\int pdx = 0$, & par conſéquent $p = \alpha = 0$.

18. On pourroit objecter que l'égalité des deux ſuites

$$\alpha + \beta X' + \gamma X'' + \delta X''' + \&c.$$
$$\alpha' + \beta' X' + \gamma' X'' + \delta' X''' + \&c.$$

n'entraîne pas néceſſairement l'égalité des coéfficiens reſpectifs, comme nous venons de le ſuppoſer. Cette identité des coéfficiens eſt évidente, lorſque les ſuites n'ont qu'un nombre fini des termes; mais on pourroit la nier lorſqu'elles s'étendent à l'infini. Je réponds à cela que la nature des fonctions X', X'', X''', &c. exige qu'on ait $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, &c. car ſi les deux ſéries

précédentes ne sont pas égales terme à terme, leur différence

$$\alpha - \alpha' + (\beta - \beta')X' + (\gamma - \gamma')X'' + (\delta - \delta')X''' + \&c.$$

sera zéro, quel que soit x. Appelons cette suite y, les intégrales définies $\int y\,dx$, $\int yX'\,dx$, $\int yX''\,dx$, &c. seront toutes nulles; or, ces intégrales sont respectivement $\alpha - \alpha'$, $\frac{\beta - \beta'}{5}$, $\frac{\gamma - \gamma'}{9}$, &c. on a donc $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, &c.

19. Puisque p est nulle, la valeur de $\frac{1}{z^2}$ devient

$$\frac{1}{z^2} = 1 + kx^2 + k^2 q + k^3 r + \&c.$$

or, si à l'aide de cette valeur on élimine z dans l'équation (E'), & qu'on calcule tous les termes multipliés par k^2, on trouvera de même que la partie affectée de q, & qui doit se réduire à une constante, est

$$\tfrac{1}{2}q - \tfrac{3}{2}X'\int qX'\,dx - \tfrac{3}{2}X''\int qX''\,dx - \tfrac{3}{2}X'''\int qX'''\,dx - \&c.$$

de-là on conclut, comme ci-devant, $q = 0$. On aura pareillement $r = 0$, $s = 0$, &c. de sorte que l'équation générale (F') qui pouvoit représenter une courbe quelconque peu différente du cercle, se réduit à l'équation de l'ellipse $\frac{1}{z^2} = 1 + kx^2$.

Donc, si l'on suppose qu'une planète en équilibre ait la figure d'un solide de révolution peu différent d'une sphère, & partagé en deux parties égales par son équateur, le méridien de cette planète sera nécessairement elliptique.

MÉMOIRE

Sur les moyens d'opérer une entière combuſtion de l'Huile, & d'augmenter la lumière des Lampes, en évitant la formation de la ſuie, à laquelle elles ſont ordinairement ſujettes.

Par M. MEUSNIER.

DÈS le 19 Mars 1783, j'ai eu l'honneur d'expliquer à l'Académie la nouvelle conſtruction de Lampes que j'avois imaginée, à l'occaſion de l'appareil à diſtiller dans le vide, que j'échauffois par ce moyen. Les premières épreuves de cette machine diſtillatoire que je fis à Cherbourg, au mois de Décembre 1781, & dont l'Académie fut inſtruite, par une lettre que j'eus l'honneur d'écrire à M. le Roi, qui voulut bien lui en faire la lecture, m'apprirent que les lampes ordinaires avoient les plus grands inconvéniens pour l'uſage auquel je les appliquois. Outre leur tendance naturelle à produire de la ſuie, le peu de chaleur qui accompagne l'eſpèce de diſtillation que j'opérois, faiſoit de la chaudière un vrai réfrigérant, contre lequel la ſuie ſe condenſoit en abondance; & la couche épaiſſe qui ſe formoit ainſi, ralentiſſant bientôt la diſtillation, m'obligeoit à prendre continuellement le ſoin de l'enlever, à meſure qu'elle ſe dépoſoit. Je mis donc la conſtruction d'une eſpèce de lampe tout-à-fait exempte de ſuie, au nombre des améliorations dont ces épreuves me firent connoître la néceſſité, & je ne tardai pas à m'en occuper.

J'avois remarqué que la ſuie des lampes, ſemblable à la ſuie des cheminées, étoit encore ſuſceptible de brûler;

& que des quantités confidérables fe réduifoient, par la combuftion, en un volume prefque infenfible de cendres. Il s'enfuivoit de-là que la fuie n'étoit autre chofe que l'huile elle-même, qui avoit éprouvé le degré de chaleur néceffaire à l'inflammation, mais qui, par le défaut d'une quantité fuffifante d'air pur, étoit demeurée dans l'état charbonneux; & il en réfultoit qu'outre l'inconvénient qui m'avoit conduit à cette obfervation, j'avois encore éprouvé celui d'une confommation d'huile en pure perte, puifqu'une partie de l'huile employée n'avoit fervi qu'à produire de la fuie, fans donner lieu au dégagement de chaleur auquel elle étoit deftinée.

Il ne fuffiroit pas, en effet, pour que la combuftion eut lieu, que le corps qui l'éprouve fut foumis au contact libre de l'air; les parties de ce milieu qui en avoifinent le foyer, ne tarderoient pas à s'épuifer de l'air vital, dont la combinaifon avec les corps eft la caufe univerfelle de toute efpèce de combuftion; & cet effet cefferoit bientôt, fi de nouvelles portions d'air, fuccédant continuellement aux premières, ne réparoient pas fans ceffe la deftruction de ce principe. La Nature elle-même a pourvu à ce renouvellement néceffaire, & la chaleur qui accompagne l'opération dont il s'agit, n'a pas pour unique objet, de mettre la fubftance combuftible dans l'état où fon affinité avec l'air vital peut s'exercer; elle fert encore, en dilatant l'air environnant, à en rendre les portions les plus voifines plus légères que le refte du milieu, & excite par cette caufe, autour des corps brûlans, un courant d'air afcenfionnel, qui préfente fans ceffe au feu un nouvel aliment.

Le même effet a lieu, d'une manière encore plus fenfible, pour toutes les combuftions que les différens ufages de la vie & des arts ont renfermées dans tant d'efpèces diverfes de fourneaux: la cheminée, qui fait toujours partie de ces fortes de conftructions, & que les premiers inventeurs ne regardèrent fans doute que comme une iffue

néceſſaire aux vapeurs & à la fumée, a ſur-tout pour objet d'augmenter conſidérablement la rapidité du courant d'air aſcenſionnel, en donnant une grande longueur à cette colonne d'air chaud & léger, qui tend d'autant plus à monter, que ſa peſanteur eſt moindre par rapport à une colonne égale d'air froid.

Mais ſi ce renouvellement d'air, ſe faiſant ainſi d'une manière fortuite & ſans deſſein, ſuffit à la rigueur pour entretenir ſimplement un feu quelconque, il exige de plus des conditions particulières & des proportions préciſes, pour opérer une combuſtion complète; & la quantité d'air vital qui touche ſucceſſivement le foyer de la déflagration, doit être réglée de manière à ſaturer, pour ainſi dire, toute la matière combuſtible qui, dans le même temps, éprouve la chaleur de l'incandeſcence; ſans quoi l'excédant échappe à l'inflammation, & ſe volatiliſe ſans autre altération que celle qu'il doit à la chaleur violente qu'il a ſoufferte. On voit aſſez par-là que les ſubſtances volatiles ſont ſeules ſuſceptibles de cette combuſtion imparfaite; les autres brûlent plus lentement quand l'air vital leur manque; mais elles ne peuvent ſe diſſiper, & c'eſt par cette raiſon que les huiles fourniſſent une ſuie abondante, tandis que le charbon, eſſentiellement fixe & réfractaire, n'en produit aucune.

Ces conſidérations ſimples, & liées tout naturellement avec les connoiſſances que la nouvelle théorie des gaz a rendu familières à la plupart des Phyſiciens, m'apprirent donc également & les cauſes de la ſuie dont la formation m'étoit nuiſible, & les moyens de l'éviter: l'heureuſe application que M. Lavoiſier venoit de faire de l'air vital pur à une lampe dont la flamme mettoit en fuſion les ſubſtances les plus réfractaires, me confirma de plus en plus dans ces idées. Il ne s'agiſſoit que d'augmenter convenablement la rapidité du courant d'air occaſionné par la combuſtion; & pour ne pas mettre inutilement en mouvement une grande quantité d'air, il falloit aſſujettir l'air

frais

frais attiré par ce courant, à toucher les flammes, dès qu'il entroit dans le fourneau où les lampes étoient renfermées. Une autre conséquence de ces principes étoit de faire présenter aux flammes le plus de surface possible; & j'adoptai, par cette raison, l'usage des mèches plates en forme de ruban, qu'on emploie depuis quelques années.

Je fis donc construire les lampes dont j'ai eu l'honneur de montrer le dessin à l'Académie, à l'époque que j'ai citée au commencement de ce Mémoire : elles sont, depuis ce temps-là, avec le reste de ma machine distillatoire, à la raffinerie de l'Arsenal, où plusieurs Membres de l'Académie les ont vues; & je déterminai, par différentes épreuves, les dimensions de l'orifice qui devoit fournir l'air à la flamme, & de la cheminée qui devoit en déterminer le mouvement. Ces lampes consistent d'abord uniquement en une boîte creuse qui recouvre le vase où est contenue l'huile qui baigne le pied des mèches. Le fond inférieur de cette boîte est percé d'autant de trous qu'il y a de mèches, & sur chaque trou est soudé un porte-mèche plat qui monte jusqu'au niveau du fond supérieur; ce dernier est percé lui-même, vis-à-vis l'extrémité de chaque porte-mèche, d'une ouverture ovale dont la mèche occupe le milieu; & la capacité de la boîte communiquant avec l'air inférieur par un conduit particulier, il arrive que quand la lampe est renfermée dans son fourneau, & sous la chaudière qu'elle doit échauffer, l'action de la cheminée fait continuellement arriver dans la boîte de nouvel air frais qui, se répandant par les ouvertures ovales, alimente les flammes, & sert tout entier à entretenir leur activité.

J'eus bientôt obtenu, avec cet appareil, des flammes pures, exemptes de suie; & au lieu de cette substance dont l'abondance me nuisoit auparavant, je ne trouvois plus que quelques parcelles de cendre blanche contre le fond de la chaudière qui étoit frappé par les flammes: je remarquai même une augmentation sensible dans la production de chaleur, & je m'en assurai par des moyens directs ; mais je

ne tardai pas à m'apercevoir qu'un courant d'air trop rapide pouvoit auſſi-bien nuire à mon objet que le défaut contraire, & qu'alors les flammes ſingulièrement diminuées, étoient à la vérité exemptes de ſuie, mais ne produiſoient plus, à beaucoup près, la chaleur dont elles étoient ſuſceptibles. On conçoit en effet comment le courant d'air dont il s'agit, devenant un vent réel, entraînoit les molécules embraſées, avant que leur chaleur eût pu déterminer de nouvelle huile à ſe volatiliſer & à brûler à ſon tour.

C'étoit par le moyen d'une eſpèce de robinet appliqué au haut de la cheminée du fourneau, que je faiſois varier le courant d'air, en augmentant ou diminuant l'orifice de ſortie; & j'avois employé ce moyen pour connoître la grandeur préciſe que je devois donner par la ſuite à cet orifice pour une lampe donnée. J'ouvrois plus ou moins ce robinet, juſqu'à ce que la flamme, devenue nette & brillante, n'éprouvât cependant aucune diminution marquée; & je meſurois la quantité d'air qui entroit alors dans le fourneau, par le moyen d'un inſtrument très-délicat, dont j'ai donné autrefois la deſcription à l'Académie: mais une nouvelle obſervation m'apprit bientôt que le même degré d'ouverture de ce robinet ne convenoit pas à toutes les circonſtances, & qu'il devoit varier ſuivant la longeur de la mèche & la température de l'air extérieur. Ces deux cauſes changent en effet la quantité d'huile qui ſe conſomme, & celle de l'air qui paſſe par les mêmes orifices; & puiſqu'elles ſont expoſées à des variations continuelles, je reconnus la néceſſité de conſerver ce robinet, que je n'avois d'abord employé que comme un moyen de recherche.

Une remarque devoit encore ajouter un dernier degré de perfection à ces lampes, dont l'objet étoit devenu pour moi de produire le plus de chaleur poſſible, avec une quantité donnée d'huile. L'air arrivant auprès des flammes, ſe dilatoit néceſſairement en s'échauffant preſque ſubitement; & cette dilatation tendant à en écarter une grande partie de la flamme qui en étoit environnée, faiſoit que

tout l'air vital apporté par ce courant, ne servoit pas à la combustion. Il falloit donc mettre en mouvement plus d'air qu'il n'étoit nécessaire pour obtenir une entière combustion ; & cet air surabondant ne pouvoit que refroidir le fourneau, en se chargeant d'une partie de la chaleur qu'il ne contribuoit point à augmenter. Cette considération me porta à entourer toutes les flammes d'autant de tuyaux de cuivre qui alloient se terminer à quelques lignes du fond de la chaudière ; & l'air contenu par leur moyen, ne pouvant plus se dilater que suivant la longueur de ces tuyaux, ni s'éloigner de la flamme, servoit alors en bien plus grande quantité à rendre la combustion complète. Je m'aperçus en effet, à l'aide de l'instrument délicat dont j'ai parlé, qu'avec un courant d'air sensiblement moindre, j'obtenois la même espèce de flamme qu'auparavant, & quelques degrés de chaleur de plus.

Tel est l'historique de mes recherches sur les lampes destinées à produire de la chaleur ; & l'application des mêmes principes à celles qui ont pour objet d'éclairer, est immédiate, puisque la chaleur & la lumière se dégagent en même temps dans toutes les espèces de combustions. C'est par cette raison que, sans faire aucun changement à la construction que j'avois adoptée, j'ai fait exécuter une lampe à réverbère, que j'ai eu l'honneur de faire voir dernièrement à l'Académie. Il y a cependant une observation à faire, concernant les tuyaux de cuivre dont j'ai parlé ci-devant, & que j'ai transformés nécessairement en un tube de verre, dès qu'il a été destiné à environner une flamme visible ; c'est que ce petit appareil ne pouvant avoir d'autre objet que d'économiser la chaleur, en empêchant que la dilatation n'éloigne l'air nouveau de la flamme, à mesure qu'il entre dans l'appareil, peut être suppléé par une ouverture un peu plus grande du robinet qui termine la cheminée ; & qu'alors on évite la perte de lumière, qu'occasionne incessamment un obstacle de plus qu'on lui

donne à traverſer. On peut donc établir que, dans tous les cas où ce tube de verre pourra être ſuppléé autrement; il eſt plutôt nuiſible qu'avantageux, dès qu'il s'agit de lampes deſtinées à éclairer, & je ne l'ai ajouté à ma dernière lampe, que pour développer cette vérité.

On voit, par cette théorie, qu'il y a bien des mécaniſmes propres à remplir l'objet que je m'étois propoſé, avec des lampes renfermées, & qu'il ne s'agit que d'opérer, autour de la flamme, un renouvellement d'air ſuffiſant. C'eſt ainſi que M. Argant a fait connoître, à Paris, vers la fin de l'année dernière, un moyen très-ingénieux & applicable à des lampes iſolées. Il diſpoſe ſa mèche circulairement autour d'un tuyau cylindrique vertical, qui devient ainſi une ſorte de cheminée, dans laquelle il paſſe continuellement de nouvel air, qui touche la ſurface intérieure de la flamme. Il y a même une remarque très-intéreſſante à faire au ſujet de ces lampes, à laquelle les obſervations qui precèdent conduiſent tout naturellement, c'eſt que la dilatation continuelle du nouvel air & l'augmentation de ſon volume tendent à le porter ſur la flamme, plutôt que de l'en éloigner; & c'eſt à cette circonſtance qu'eſt dû ſans doute le bon effet de ces lampes, puiſque leur cheminée, contenant un air qui n'eſt chaud que ſur une petite longueur dans la partie ſupérieure, ne tireroit point aſſez ſans la cauſe qui fait ſervir preſque tout l'air qu'elle fournit à une entière combuſtion. M. Argant emploie au ſurplus un mécaniſme particulier pour gouverner ſes lampes, & ne pouvant faire varier à volonté le courant d'air, comme je le fais à l'aide du robinet qui occupe le haut de la cheminée des miennes, il agit ſur la conſommation d'huile, en alongeant ou raccourciſſant la mèche, par le moyen le plus ſimple & le plus commode: il obtient par-là ce qu'on pourroit appeler l'équilibre néceſſaire entre la quantité du combuſtible conſommé & celle de l'air vital qui lui eſt fourni. Il a ſenti que cet équilibre ne

ſauroit être permanent; & c'eſt en cela que la lampe de M. Argant porte ce caractère qui annonce un inventeur conduit par une théorie fondée.

Si l'on peut faire cependant un reproche à ces lampes, c'eſt que l'orifice intérieur ne pouvant être diminué au-delà d'un certain point, l'étendue de leur mèche circulaire donne lieu à une conſommation d'huile & une production de lumière plus conſidérables qu'il n'eſt néceſſaire dans pluſieurs cas; & que, très-propres à éclairer de vaſtes emplacemens, elles ne peuvent être appliquées avec le même avantage à l'uſage d'un ſeul homme.

Il me reſte à parler du tube de verre que M.rs Quinquet & Lange ont ajouté depuis peu aux lampes de M. Argant, & qui a les plus grands rapports avec le tube de cuivre que j'emploie dans les miennes. Il ſembleroit d'abord qu'il a pour objet d'exciter un courant d'air qui touche la flamme extérieurement, tandis que le conduit intérieur, inventé par M. Argant, fournit de l'air à la ſurface intérieure; mais le tube de verre dont il s'agit, beaucoup trop court pour pouvoir agir ainſi à la manière d'une cheminée, ajoute, tel qu'il eſt, bien peu de choſe à l'effet de ces lampes, & pourra toujours être ſuppléé par le conduit intérieur, quand il ſera bien proportionné & la lampe bien gouvernée. La lumière alors n'aura plus ce verre à traverſer; & s'il peut avoir une utilité réelle, ce n'eſt guère qu'en plein air où il garantit la flamme de l'agitation d'un vent médiocre. Ces lampes manquent au reſte du moyen que M. Argant avoit imaginé pour en gouverner la mèche; & depuis qu'elles ſe ſont répandues, on en voit pluſieurs qui jettent ſouvent une fumée épaiſſe: elles ſont d'ailleurs tout-à-fait dans le cas de celles de M. Argant, ayant de toute néceſſité une mèche très-étendue, dont le développement équivaut à cinq ou ſix mèches de nos réverbères ordinaires; & la grande lumière qu'elles répandent, tient principalement à la conſommation d'huile qui réſulte de la grandeur de leur mèche.

La véritable utilité d'un tube de verre environnant la flamme d'une lampe, eſt qu'en faiſant fonction de cheminée, il déterminera l'entrée d'un courant d'air par ſon orifice inférieur ; mais il faut qu'alors il ait au moins ſix à ſept pouces de longueur, ſur quinze à dix-huit lignes de diamètre, ſuivant la groſſeur des mèches ; & je me ſuis aſſuré, par des expériences multipliées, que cet appareil ſimple, appliqué à des lampes anciennes & de toutes ſortes de conſtructions, leur donne ſans dépenſe tous les avantages qu'on vante dans les nouvelles lampes.

OBSERVATION ANATOMIQUE.

Par M. DE FOUCHY.

LE premier des accidens qui m'ont tenu abſent de l'Académie, pendant un temps aſſez long, a été accompagné d'une circonſtance qui m'a paru mériter que je la communiquaſſe à l'Académie.

Le 24 Mars dernier, ſortant de chez M. Aniſſon, où j'avois aſſiſté à l'examen de ſa nouvelle preſſe, je retournois chez moi, vers les ſept heures du ſoir, & il commençoit à faire un peu obſcur. En traverſant le boulevart, alors très-dérangé par le pavé de la Comédie italienne & par les fouilles des tuyaux, un pavé à moitié ſorti de ſa place, m'accrocha le pied, & me fit tomber en avant & un peu de côté, le viſage ſur un tas d'éclats de grès qui ſe trouva-là. Le coup porta principalement ſur le vomer & ſur le coin de l'orbite de l'œil droit; la peau qui couvre le vomer, fut entamée, & il en ſortit aſſez de ſang. Je ſentis, à l'inſtant du coup, une vive douleur qui ſe communiqua à l'œil gauche; mais je n'éprouvai ni étourdiſſement ni mal de cœur. Je me relevai ſur le champ, & continuai mon chemin, tenant mon mouchoir ſur la plaie du nez qui me faiſoit beaucoup de douleur. À mon arrivée, je lavai cette plaie qui ne ſaignoit plus, avec du vin chaud, & la douleur diminua peu-à-peu aſſez pour ne pas m'empêcher de dormir. Le lendemain matin elle étoit ſupportable, & je crus remarquer que je la ſentois aſſez diſtinctement en deux endroits; ſavoir, au vomer, & au-deſſus de l'œil gauche qui n'avoit point eſſuyé de coup; celle du vomer étoit accompagnée d'une circonſtance particulière & qui a duré long-temps, c'eſt que lorſque je pouſſois, même légèrement, avec le doigt, le vomer à droite ou à gauche, je ſentois une

petite crépitation interne, comme ſi l'engrenage de ces os avec ceux de la face avoit ſouffert. Juſque-là je n'avois rien aperçu d'extraordinaire, je ſortis même & ne rentrai que pour dîner ; mais voici ce qui le fut, & qui me parut mériter conſidération.

Sur la fin du dîner, je ſentis un petit redoublement de douleur au-deſſus de l'œil gauche, & dans l'inſtant même je ceſſai de pouvoir prononcer les mots que je voulois. J'entendois ce que l'on diſoit, & je penſois ce que je devois répondre; mais je prononçois d'autres mots que ceux qui devoient exprimer ma penſée; ou ſi je les commençois, je ne les achevois pas, & j'y ſubſtituois d'autres mots; j'avois cependant tous les mouvemens auſſi libres qu'à l'ordinaire; je n'abandonnai ni ma ſourchette ni un morceau de pain que je tenois; je voyois nettement tous les objets; j'entendois diſtinctement ce qu'on diſoit, & les organes qui concourent à la penſée, étoient, à ce qui me paroiſſoit, dans l'état naturel.

Cette eſpèce de paroxiſme dura à peu-près une minute, & pendant ſa durée j'eus l'eſprit aſſez libre pour remarquer cette ſingulière diſtinction dans le ſenſorium de l'ame, qui n'avoit qu'une ſeule de ſes parties affectée, ſans qu'aucune des autres eût éprouvé le moindre dérangement,

Lorſque M. Vicq-d'Azyr lut, à l'aſſemblée de l'Académie du 30 Avril dernier, ſon Mémoire ſur l'Anatomie comparée du cerveau de l'homme & des autres animaux, je fus frappé de ce qu'il diſoit des filets nerveux, qui partant du cerveau, venoient à travers l'os cribleux, ſe rendre dans l'intérieur du nez, & je crus y apercevoir la cauſe de l'état dans lequel je m'étois trouvé, ces filets ayant pu être ébranlés par le coup qu'avoit reçu le vomer, & tranſmettre leur ébranlement au cerveau; mais je n'y trouvai point la raiſon du ſingulier phénomène du ſenſorium de l'ame affecté dans une ſeule de ſes parties, ſans que les autres l'aient été en aucune manière. Je me renferme ici purement dans le fait que j'ai cru devoir communiquer à l'Académie,

l'Académie, & le conſigner, ſi elle le juge à propos, dans ſes regiſtres. Une obſervation de cette eſpèce doit être extrêmement rare, puiſqu'elle exige qu'un Phyſicien en ſoit le ſujet, & que l'accident n'ait pas été aſſez grave pour l'empêcher d'en obſerver toutes les circonſtances. Quelque zèle cependant que j'aie pour l'avancement des Sciences qui ſont l'objet de l'Académie, j'eſpère qu'elle me pardonnera aiſément de ne pas deſirer de lui en préſenter ſouvent de pareilles.

RENSEIGNEMENS GÉNÉRAUX

Pour tenir lieu de réponſe à une Queſtion adreſſée à l'Académie, par M. GASTÉ DE BONAY, *concernant la cherté & la rareté du Bois à brûler, particulièrement du Charbon de bois, relativement aux groſſes Forges & Fourneaux à Fer.*

Par M. MORAND.

« LA néceſſité d'aviſer à la cherté & à la rareté du bois
» de chauffage, ainſi que du charbon végétal (je tranſ-
» cris ici la Lettre écrite à l'Académie), devient de jour
» en jour plus preſſante; les groſſes forges & fourneaux,
» en un mot, les mines à feu, par leur énorme conſom-
» mation, ſont en partie cauſe de cette diſette, pour le
» charbon de végétal. Le bois eſt preſque par-tout aujourd'hui
» à un prix que les manufactures ne peuvent plus ſupporter;
» en ſorte qu'il faut, ou que le produit des ouvrages, déjà
» fort cher, augmente encore, ou que beaucoup d'entr'elles
» ſoient miſes bas : l'une & l'autre alternative ne peut être
» que très-fâcheuſe. On n'a pas beſoin de rien ajouter à
cette remarque ».

Depuis long-temps l'inquiétude ſur le dépériſſement des bois du royaume eſt générale; Paris s'en eſt reſſenti cet hiver & le précédent; les provinces n'en ſont pas exemptes; l'Académie eſt conſultée à cette occaſion par un citoyen zèlé & honnête, réſidant près d'Argentan, en baſſe-Normandie.

M. Gaſté de Bonay, eſt à portée d'éprouver l'inconvénient de la cherté & de la rareté du bois employé en charbon dans les groſſes forges & fourneaux à fer; il eſt

inſtruit auſſi, à ce qu'il paroît, « d'eſſais infructueux faits dans ſa province, pour appliquer à ces uſines le feu de » charbon de terre, dont le ſuccès néanmoins tendroit à « augmenter le bois de chauffage; » enfin diverſes annonces qui lui ſont parvenues ſur cette ſubſtitution de combuſtible, le conduiſent à préſumer qu'il exiſte une *méthode ſûre de faire cette application;* elle eſt ignorée dans les parties occidentales de la France, aſſez garnies de groſſes forges. M. Gaſté a recours à l'Académie pour ſavoir *ſi l'on a réellement quelque connoiſſance de la poſſibilité de réuſſir;* il prie l'Académie de l'indiquer.

L'Académie portée de tout temps à concourir au bien public, ſoit par ſes propres travaux, ſoit par ceux de ſes Correſpondans, & même ceux des Savans étrangers, qu'Elle publie à la ſuite de ſes Mémoires, m'a chargé de préſenter, dans une de ſes ſéances, un projet de réponſe à cette Lettre. La recherche de la manière de procéder pour remplir l'intention de l'Académie, a été peu embarraſſante: un ſimple énoncé des différens articles traités juſques à ce jour par différens Savans, touchant l'application du feu de charbon de terre aux groſſes forges, m'a ſemblé ce qu'il y avoit de plus naturel & de plus convenable; c'eſt à quoi j'ai cru devoir d'autant plus me borner, que ces articles ſe trouvent recueillis dans un ſeul & même ouvrage, connu du Public & avoué de l'Académie, l'art d'exploiter les mines de charbon de terre. Je me bornerai donc à préſenter ici une Table purement indicative ſuivant l'ordre de l'ouvrage; je mettrai enſuite ſous les yeux de l'Académie ce que j'y ai ajouté de relatif au point où on en eſt, depuis l'impreſſion achevée, touchant la ſubſtitution économique du feu de braiſe de charbon de terre au charbon végétal, dans les forges & fourneaux à fer, objet principal ſur lequel M. Gaſté de Bonay propoſe la queſtion: *y a-t-il poſſibilité de réuſſir!* . . . .

La deſcription de l'art auquel je renvoie M. Gaſté de Bonay, renferme des preuves que la méthode exiſte, puiſ-

que l'opération s'exécute avec ſuccès en Angleterre, où le procédé en a été communiqué, ſuivant Becher, par un Allemand nommé Blawenſtein.

Il eſt bien vrai que, juſques à ce jour, nous n'avons pu, en France, avoir le même ſuccès pour les forges & fourneaux à fer : cela tiendroit-il à la nature de la mine de fer, dont telle ou telle eſpèce peut ou ne peut pas être traitée avec le charbon de terre ainſi fabriqué ? Ne faudroit-il point, dans une comparaiſon bien faite de celles que l'on traite de cette façon en Angleterre, & des eſpèces que nous avons en France, trouver celles qui ſont propres à être traitées par ce procédé ? Ces points de recherche, ainſi que beaucoup d'autres propres à ouvrir de nouvelles vues pour perfectionner les tentatives déjà faites, ſe trouvent préſentés, rapprochés avec ſoin dans un détail convenable, ſous les titres qui forment l'eſpèce d'index dont j'ai parlé il n'y a qu'un inſtant, pour ſervir de réponſe à M. Gaſté.

Je viens donc tout de suite à l'addition que j'ai annoncée. Une remarque sur laquelle je n'ai cessé d'insister, toutes

les fois que j'ai eu à répondre ſur l'emploi du feu de charbon de terre, c'eſt que, de tous les combuſtibles, le charbon de terre eſt celui qui a le plus beſoin de l'action de l'air libre, perſonne ne l'ignore; mais, dans les nouvelles applications que l'on tente de ce feu particulier, a-t-on toujours ce principe de fait aſſez préſent à l'idée? Je le crois de la plus grande conſéquence pour l'emploi du charbon de terre aux groſſes forges & aux fourneaux à fer. On ne parviendra à un ſuccès complet, qu'autant que la conſtruction du fourneau ſe rapportera à ce principe, de manière que l'air agiſſe ſur le combuſtible & avec la plus grande liberté, & dans la plus grande étendue poſſible. Il n'y aura alors rien de ſurprenant qu'avec un petit nombre de charges de coaks, & une petite quantité de fondant calcaire, on parvienne à avoir un produit conſidérable de fonte. Toutes les perſonnes inſtruites ou intelligentes dans les différentes parties qui conſtituent l'art des forges, n'ont beſoin que d'être miſes ſur la voie. On eſt au ſurplus dans l'expectative d'eſſais qui doivent ſe faire à Montcenis en Bourgogne.

M. Wilxinſon, anglois de nation, connu depuis pluſieurs années à Nantes, doit établir à Montcenis des forges, ſans cours d'eau pour moteur, & où le charbon de terre ſera employée en braiſe, le tout à la manière connue en Angleterre.

MÉMOIRE
SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES,

Par M. Cousin.

(1.) J'ai démontré dans nos Mémoires pour 1783, un théorème qu'on peut énoncer d'une manière beaucoup plus générale, que voici :

L'équation de l'ordre n

$$\alpha\frac{d^n z}{dy^n}+\beta\frac{d^n z}{dy^{n-1}dx}+\gamma\frac{d^n z}{dy^{n-2}dx^2}+\ldots+\varepsilon\frac{d^n z}{dx^n}=\tau,$$

dans laquelle α, β, $\gamma \ldots \varepsilon$, τ, sont des fonctions de x, y, z, & des différences partielles de z jusqu'à celles de l'ordre $n - 1$ inclusivement, étant proposée; si on nomme p, q, r, s, &c. les différences partielles de l'ordre $n - 1$, & qu'ayant formé l'équation

$$\alpha m^n + \beta m^{n-1} + \gamma m^{n-2} + \ldots + \varepsilon = 0,$$

l'on fasse, pour abréger,

$$\alpha m + \beta = \alpha\lambda,\ \alpha\lambda m + \gamma = \alpha\mu,\ \alpha\mu m + \delta = \alpha\nu, \text{ \&c.}$$

toutes les intégrales de la proposée dépendront de pouvoir satisfaire aux équations prises deux à deux, qu'on formera, en mettant successivement pour m ses valeurs dans ces deux-ci,

$$m\,dy + dx = 0,$$

$$\alpha m(dp + \lambda dq + \mu dr + \nu ds + \text{\&c.}) + \tau dx = 0.$$

Nous commencerons par appliquer ce théorème aux équations linéaires, c'est-à-dire, à celles où z & ses différences partielles de tous les ordres sont sous une forme linéaire.

(2.) Les équations linéaires de l'ordre n peuvent toutes se représenter par

$$\alpha \frac{d^n z}{dy^n} + \beta \frac{d^n z}{dy^{n-1} dx} + \gamma \frac{d^n z}{dy^{n-2} dx^2} + \ldots + \varepsilon \frac{d^n z}{dx^n} = \theta$$
$$+ \beta' \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}} + \gamma' \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-2} dx} + \ldots + \varepsilon' \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}$$
$$+ \gamma'' \frac{d^{n-2} z}{dy^{n-2}} + \ldots + \varepsilon'' \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \varrho z$$

dans laquelle les coéfficiens de z & de ses différences partielles & θ sont des fonctions de x, y. Alors, si nous nommons p, q, r, s, &c. les différences partielles de l'ordre $n - 1$, p', q', r', &c. celles de l'ordre $n - 2$, &c. nous aurons à résoudre les équations aux différences ordinaires,

$$m\,dy + dx = 0,$$

$$\alpha m (dp + \lambda dq + \mu dr + \nu ds + \&c.)$$
$$- (\beta' p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p'$$
$$+ \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varrho z - \theta) dx = 0.$$

Désignons par m, m', m'', &c. les valeurs de m, par $dt\,1$, $ds\,1$, $dr\,1$, &c. les différentielles exactes qu'on trouvera en cherchant les facteurs propres à rendre intégrables

$$m\,dy + dx,\ m'\,dy + dx,\ m''\,dy + dx,\ \&c.$$

Cela posé, ayant multiplié les équations

$$\frac{dt\,1}{dy} dy + \frac{dt\,1}{dx} dx = 0,$$

$$\alpha m (dp + \lambda dq + \mu dr + \&c.)$$
$$- (\beta' p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p'$$
$$+ \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varrho z - \theta) dx = 0;$$

la première par Δ, & l'autre par Λ, nous les ajouterons ensemble, & nous donnerons à la résultante la forme que voici:

$$d.\Lambda\alpha m(p + \lambda q + \mu r + \&c.)$$
$$- pd.\Lambda\alpha m - qd.\Lambda\lambda\alpha m - rd.\Lambda\mu\alpha m - \&c.$$
$$- \Lambda(\beta' p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p'$$
$$+ \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varrho z - \theta)dx$$
$$+ \Delta\left(\frac{dt1}{dy}dy + \frac{dt1}{dx}dx\right) = 0.$$

Nous ſuppoſerons

$$- pd.\Lambda\alpha m - qd.\Lambda\lambda\alpha m - rd.\Lambda\mu\alpha m - \&c.$$
$$- \Lambda(\beta' p + \gamma' q + \delta' r + \&c. + \gamma'' p'$$
$$+ \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varrho z)dx$$
$$+ \Delta\left(\frac{dt1}{dy}dy + \frac{dt1}{dx}dx\right),$$

une différentielle exacte que nous nommerons dV; & $\theta 1$ étant l'intégrale de $\Lambda\theta dx$, priſe par rapport à x, après avoir mis pour y ſa valeur en x & $t1$, nous aurons

$$(1)\ldots\Lambda\alpha m(p + \lambda q + \mu r + \&c.) + V + \theta 1 = 0:$$

nous aurons auſſi

$$- p\frac{d.\Lambda\alpha m}{dy} - q\frac{d.\Lambda\lambda\alpha m}{dy} - r\frac{d.\Lambda\mu\alpha m}{dy} - \&c.$$
$$+ \Delta\frac{dt1}{dy} = \frac{dV}{dy};$$

$$- p\left(\frac{d.\Lambda\alpha m}{dx} + \Lambda\beta'\right) - q\left(\frac{d.\Lambda\lambda\alpha m}{dx} + \Lambda\gamma'\right)$$
$$- r\left(\frac{d.\Lambda\mu\alpha m}{dx} + \Lambda\delta'\right) + \&c.$$
$$- \Lambda(\gamma'' p' + \delta'' q' + \&c. + \&c. + \varrho z)$$
$$+ \Delta\frac{dt1}{dx} = \frac{dV}{dx};$$

d'où nous tirerons, en éliminant Δ, & faiſant pour abréger,

$$\frac{dV}{dy} - m\frac{dV}{dx} = (V),\ \frac{d.\Lambda\alpha m}{dy} - m\frac{d.\Lambda\alpha m}{dx} = (\Lambda\alpha m), \&c.$$

$$(2) \ldots - p[(\Lambda\alpha m) - m\Lambda\beta'] \\ - q[(\Lambda\lambda\alpha m) - m\Lambda\gamma'] \\ - r[(\Lambda\mu\alpha m) - m\Lambda\delta'] \\ - \&c. + m\Lambda(\gamma'' p' + \delta'' q' \\ + \&c. + \&c. + \rho z) = (V).$$

(3.) Si la propoſée a une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, j'entends par-là une équation linéaire de l'ordre $n - 1$, qui renferme une fonction arbitraire de t 1, on pourra ſuppoſer

$$V = Mp' + Nq' + \&c. + M'p'' \\ + N'q'' + \&c. + \&c. + Uz + \varphi : t1 ;$$

d'où l'on tirera

$$(V) = (M)p' + M(p - mq) \\ + (N)q' + N(q - mr) + \&c. \\ + (M')p'' + M'(p' - mq') \\ + (N')q'' + N'(q' - mr') + \&c. + \&c. \\ + (U)z + U[p^{(n-2)1} - mq^{(n-2)1}].$$

Partant, ſi l'on fait pour abréger,

$$(\Lambda\alpha m) - m\Lambda\beta' = \omega,\ (\Lambda\lambda\alpha m) - m\Lambda\gamma' = \pi, \\ (\Lambda\mu\alpha m) - m\Lambda\delta' = \varpi,\ \&c,$$

l'équation (2) donnera

$$-\omega = M,\ -\pi = N - mM,\ -\varpi = P - mM,\ \&c, \\ m\Lambda\gamma'' = (M) + M',\ m\Lambda\delta'' = (N) - mM' + N',\ \&c, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ m\Lambda\rho = (U).$$

La première ſérie contient $n - 1$ équations, la ſeconde en contient $n - 2$, & ainſi de ſuite; le nombre de toutes les équations eſt la ſomme d'une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt 1, & le dernier $n - 1$, c'eſt-

à-dire que ce nombre $= n \cdot \frac{n-1}{2}$: & comme il n'y a que $\frac{(n-1.)(n-2)}{2}$ inconnues à déterminer, il reſte $n - 1$ équations de condition, qui doivent avoir lieu pour que la propoſée ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, voici cette intégrale :

$$\Lambda \alpha m(p + \lambda q + \mu r + \&c.) + Mp' + Nq' + \&c. + M'p'' + N'q'' + \&c. + \&c. + Uz + \varphi : t\, 1 + \theta\, 1 = 0.$$

Si la propoſée étoit du ſecond ordre, on auroit les trois équations

$$(\Lambda \alpha m) - m\Lambda \beta' + U = 0,$$
$$(\Lambda \gamma) + m\Lambda \gamma' + mU = 0,$$
$$m\Lambda \varrho = (U),$$

dont la première donneroit U; des deux autres, l'une ſerviroit à trouver le facteur Λ, & la ſeconde feroit l'équation de condition. Si l'équation du ſecond ordre n'étoit autre que $\frac{d^2 z}{dy^2} = X^2 \frac{d^2 z}{dx^2}$, qui eſt celle des cordes vibrantes lorſque X ne renferme que x & des conſtantes, les trois équations deviendroient

$$(U) = 0,$$
$$\Lambda m \frac{dm}{dx} + 2U = 0,$$
$$2(\Lambda) - 3\Lambda \frac{dm}{dx} = 0:$$

on tireroit des deux premières $(\Lambda) \frac{d.m^2}{dx} = \Lambda m \frac{d^2.m^2}{dx^2}$; on auroit par conſéquent

$$\frac{3}{4} \frac{d.m^2}{m^2} = \frac{d^2.m^2}{dx} : \frac{d.m^2}{dx}, (m^2)^{-\frac{3}{4}} d.m^2 = a\,dx,$$
$$\& \; 16\, m = (ax + b)^2,$$

a & b étant des conſtantes, c'eſt la valeur de X pour que l'équation des cordes vibrantes ait une intégrale de l'ordre immédiatement inférieur. Tout ce que contient ce numéro, s'accorde bien avec ce qui eſt démontré d'une autre manière, *n.*[os] *84* & *85* de nos leçons de calcul différentiel & de calcul intégral.

(4.) Mais la propoſée pourroit n'avoir pas d'intégrale de l'ordre immédiatement inférieur, & qu'il fût cependant poſſible d'en tirer la valeur complète de z, en donnant à z & V des formes très-générales, au moyen de coéfficiens indéterminés. La ſeule ſuppoſition de

$$V = Af{:}s1 + Bf'{:}s1 + Cf''{:}s1 + \&c. + L,$$
$$z = Mf{:}s1 + Nf'{:}s1 + Pf''{:}s1 + \&c. + W,$$

réſoudroit un cas fort étendu: alors on mettroit ces valeurs dans les équations (1) & (2), & on auroit pour déterminer A, M, B, N, &c. des équations aux différences partielles de l'ordre $n - 1$, auxquelles il ſuffiroit de ſatisfaire. Si z & V devoient renfermer des termes où la fonction arbitraire fût embarraſſée du ſigne intégral, tels que ceux-ci:

$$A\int B\,ds1\,f{:}s1,\ M\int N\,dt1\int P\,ds1\,f{:}s1,\ \&c.$$

on les introduiroit; & ayant donné à z, V les valeurs les plus générales dont ils fuſſent ſuſceptibles, les conditions qu'on trouveroit, indiqueroient les cas où l'intégrale complète ſeroit poſſible en termes finis. Cette méthode d'intégrer les équations linéaires aux différences partielles de tous les ordres, eſt ſimple & générale: il ne ſera pas inutile de l'éclaircir par quelques exemples.

(5.) Lorſque la propoſée eſt du ſecond ordre, en faiſant, pour abréger, $\Lambda(\pi\alpha m + \omega\gamma) = \sigma$, on tire des équations (1) & (2),

$$\sigma p = \Lambda\gamma\,[\Lambda m\varrho z - (V)] - \pi\,(\theta 1 + V),$$
$$\sigma q = \Lambda\alpha m\,[\Lambda m\varrho z - (V)] + \omega\,(\theta 1 + V).$$

Je pourrois ſubſtituer ces valeurs dans $dz = p dy + q dx$; j'en tirerois z, pourvu que $m\varrho$ fût le facteur propre à rendre intégrable $\frac{\gamma dy + \alpha m dx}{\gamma(\alpha m) - \alpha m(\gamma) - \alpha m^2 \gamma' - m\gamma 6'}$; l'autre condition donneroit une équation aux différences partielles qu'il ſeroit néceſſaire d'intégrer complétement, pour que la valeur de z renfermât deux fonctions arbitraires; mais ce cas particulier pourra ſe déduire aiſément de la ſolution générale que nous avons indiquée.

(6.) Nous ferons d'abord

$$V = Af:s + Bf^{1}:s + Cf^{11}:s + \dots\dots\dots + Kf^{n1}:s + L,$$

$$z = Mf:s + Nf^{1}:s + Pf^{11}:s + \dots\dots\dots + Vf^{n1}:s + W,$$

ds étant la différentielle exacte qu'on trouve en cherchant le facteur propre à rendre intégrable $m^1 dy + dx$. Par ces ſubſtitutions, $\Lambda m\varrho z - (V)$ devient

$$[\Lambda M m\varrho - (A)]f:s + [\Lambda N m\varrho - (B) - A(s)]f^{1}:s + \dots\dots\dots\dots\dots + [\Lambda V m\varrho - (K) - I(s)]f^{n1}:s - K(s)f^{(n+1).1}:s + \Lambda W m\varrho - (L);$$

on trouvera donc facilement les valeurs de p & q que donnent les formules du *n.° précédent.* Mais on a auſſi

$$p = \frac{dM}{dy}f:s + \left(\frac{dN}{dy} + M\frac{ds}{dy}\right)f^{1}:s + \dots\dots\dots\dots\dots + \left(\frac{dU}{dy} + T\frac{ds}{dy}\right)f^{n1}:s + U\frac{ds}{dy}f^{(n+1).1}:s + \frac{dW}{dy},$$

$$q = \frac{dM}{dx} f : s + \left(\frac{dN}{dx} + M \frac{ds}{dx} \right) f^{\mathrm{I}} : s + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \left(\frac{dU}{dx} + T \frac{ds}{dx} \right) f^{n\mathrm{I}} : s$$

$$+ U \frac{ds}{dx} f^{(n+1)\cdot\mathrm{I}} : s + \frac{dW}{dx};$$

il ne s'agira donc que de déterminer les coéfficiens A, M, B, N, &c. au moyen des équations suivantes qui sont du premier ordre :

$$\Lambda\gamma \; [\Lambda M m \varrho - (A)] - \pi A = \sigma \frac{dM}{dy},$$

$$\Lambda\alpha m \; [\Lambda M m \varrho - (A)] + \omega A = \sigma \frac{dM}{dx},$$

$$\Lambda\gamma \; [\Lambda N m \varrho - (B) - A(s)] - \pi B = \sigma \left(\frac{dN}{dy} + M \frac{ds}{dy} \right),$$

$$\Lambda\alpha m \; [\Lambda N m \varrho - (B) - A(s)] + \omega B = \sigma \left(\frac{dN}{dx} + M \frac{ds}{dx} \right)$$

. . . .

$$\Lambda\gamma \; [\Lambda U m \varrho - (K) - I(s)] - \pi K = \sigma \left(\frac{dU}{dy} + T \frac{ds}{dy} \right),$$

$$\Lambda\alpha m \; [\Lambda U m \varrho - (K) - I(s)] + \omega K = \sigma \left(\frac{dU}{dx} + T \frac{ds}{dx} \right),$$

$$\Lambda\gamma \; [\Lambda W m \varrho - (L)] - \pi (\theta\,\mathrm{I} + L) = \sigma \frac{dW}{dy},$$

$$\Lambda\alpha m \; [\Lambda W m \varrho - (L)] + \omega (\theta\,\mathrm{I} + L) = \sigma \frac{dW}{dx}.$$

On aura de plus les deux équations

$$\Lambda K \gamma (s) = -\sigma U \frac{ds}{dy}, \; \Lambda K \alpha m (s) = -\sigma U \frac{ds}{dx}$$

qui, à cause de $\gamma = \alpha m m^{\mathrm{I}}$ toujours vraie par la propriété des équations du second degré, se réduisent à une seule qui renferme les conditions qui doivent avoir lieu pour que l'intégrale soit telle que nous l'avons supposée. Nous n'avons trouvé qu'une partie de la valeur de z, nous trouverons l'autre, en changeant dans la première, m en m^{I}, s en t, & $f : s$ en $\varphi : t$.

(7.) Si l'équation du ſecond ordre eſt celle des cordes vibrantes, $\frac{d^2 z}{d y^2} = X^2 \frac{d^2 z}{d x^2}$, on fera $A\ m = 1$,

$$m = -X,\ m' = X,$$

$$y - \int \frac{dx}{X} = t,\ y + \int \frac{dx}{X} = s;$$

partant $(s) = 2$. Alors en ſuppoſant que les coéfficiens ſont tous fonctions de x ſeul, on aura à réſoudre les équations

$$d\,\frac{A}{X} = 0,\ dA = \frac{dX}{dx}\,dM,$$

$$d\,\frac{B}{X} = \frac{M\,dX - 2A\,dx}{X^2},$$

$$dB + \frac{2A\,dx}{X} = \frac{dX}{dx}\left(dN + \frac{M\,dx}{X}\right),$$

$$\ldots\ldots\ d\,\frac{K}{X} = \frac{T\,dX - 2I\,dx}{X^2},$$

$$dK + \frac{2I\,dx}{X} = \frac{dX}{dx}\left(dU + \frac{T\,dx}{X}\right),$$

$$2K\,dx = U\,dX.$$

On en tire $A = aX$ & $M = ax + b$, a & b étant des conſtantes, ou bien $A = 0$ & $M = 1$; nous examinerons ſéparément ces deux cas, en ſuppoſant $X = (ax + b)^\partial$.

Dans le premier cas, on peut ſuppoſer

$$N = e(1)\,(ax + b)^{-\partial + 2},$$

$$P = e(2)\,(ax + b)^{-2\partial + 3},\ \text{\&c.}$$

$$B = g(1)\,(ax + b),$$

$$C = g(2)\,(ax + b)^{-\partial + 2},\ \text{\&c.}$$

$e(1)$, $g(1)$, &c. étant des conſtantes. Par ces ſubſtitutions, nos équations deviennent

$$g(1)(1-\partial)+2=\partial,$$

$$g(1)+2=ae(1)(2-\partial)\partial+\partial,$$

$$2ag(2)(1-\partial)+2g(1)=ae(1)\partial,$$

$$ag(2)(2-\partial)+2g(1)=a^2e(2)(3-2\partial)\partial + ae(1)\partial,$$

$$3ag(3)(1-\partial)+2g(2)=ae(2)\partial,$$

$$ag(3)(3-2\partial)+2g(2)=a^2e(3)(4-3\partial)\partial + ae(2)\partial,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2g(n)=ae(n)\partial.$$

On en tire par l'élimination

$$g(1)=-\frac{2-\partial}{1-\partial},\ e(1)=-\frac{1}{a(1-\partial)},$$

$$g(2)=\frac{4-3\partial}{2a(1-\partial)^2},\ e(2)=\frac{4-3\partial}{2a^2(1-\partial)^2(3-2\partial)},$$

$$g(3)=-\frac{(4-3\partial)(6-5\partial)}{2.3a^2(1-\partial)^3(3-2\partial)},$$

$$e(3)=-\frac{6-5d}{2.3a^3(1-\partial)^3(3-2\partial)},\ \&c.$$

& que ∂ doit être une quantité de cette forme $\frac{2n}{2n-1}$; n étant un nombre entier positif.

Lorsque $A=0$ & $M=1$, on a $B=-1$, & on peut supposer

$$N=e(1)(ax+b)^{-\partial-1};$$

$$P=e(2)(ax+b)^{-2(\partial-1)},\ \&c.$$

$$C=g(2)(ax+b)^{-\partial+1},\ \&c.$$

ce qui change nos équations en celles-ci:

$$ae(1)(1-\partial)+1=0,$$

$$ag(2)(1-2\partial)-2=ae(1)\partial,$$

$$ag(2)(1 - \partial) - 2 = 2a^2 e(2)(1 - \partial)\partial + ae(1)\partial,$$

$$ag(3)(2 - 3\partial) + 2g(2) = ae(2)\partial,$$

$$2ag(3)(1 - \partial) + 2g(2) = 3a^2 e(3)(1 - \partial)\partial + ae(2)\partial,$$

$$ag(4)(3 - 4\partial) + 2g(3) = ae(3)\partial,$$

$$3ag(4)(1 - \partial) + 2g(3) = 4a^2 e(4)(1 - \partial)\partial + ae(3)\partial,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2g(n) = ae(n)\partial.$$

Il eſt facile d'en tirer

$$e(1) = -\frac{1}{a(1 - \partial)},$$

$$g(2) = \frac{2 - 3\partial}{a(1 - \partial)(1 - 2\partial)},$$

$$e(2) = \frac{2 - 3\partial}{2a^2(1 - \partial)^2(1 - 2\partial)},$$

$$g(3) = -\frac{4 - 5\partial}{2a^2(1 - \partial)^2(1 - 2\partial)},$$

$$e(3) = -\frac{4 - 5\partial}{2.3a^3(1 - \partial)^3(1 - 2\partial)}, \text{ \&c.}$$

& que ∂ doit être une quantité telle que $\frac{2n}{2n+1}$, où n eſt un nombre entier poſitif. Il ſuit de ce qui précède que ſi X eſt une quantité de cette forme $(ax + b)^{\frac{2n}{2n \pm 1}}$, l'équation des cordes vibrantes a pour intégrale finie complète,

$$z = M(f:s + \varphi:t) + N(f^{\text{I}}:s + \varphi^{\text{I}}:t) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + U(f^{n\text{I}}:s + \varphi^{n\text{I}}:t).$$

(8.) Si z devoit renfermer des termes où la fonction

arbitraire fût embarrassée du signe intégral; s'il devoit renfermer le terme $R\int S\,ds\,f:s$, on représenteroit par $G\int H\,ds\,f:s$ celui qui devroit entrer dans V. Partant, soit

$$V = G\int H\,ds\,f:s + Af:s + Bf':s + \&c.$$

$$\frac{dV}{ds} = \frac{dG}{ds}\int H\,ds\,f:s + A\,1\,f:s + B\,1\,f':s + \&c.$$

$$z = R\int S\,ds\,f:s + Mf:s + Nf':s + \&c.$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dR}{ds}\int S\,ds\,f:s + M\,1\,f:s + N\,1\,f':s + \&c.$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dR}{dt}\int S\,ds\,f:s + R\int\frac{dS}{dt}\,ds\,f:s + M\,2\,f:s + N\,2\,f':s + \&c.$$

à cause de $(V) = \frac{dV}{ds}(s)$, les équations du *n.°* 5, donneront

$$\sigma p = m\gamma\varrho\Lambda^2 R\int S\,ds\,f:s - \left(\pi G + \Lambda\gamma(s)\frac{dG}{ds}\right)\int H\,ds\,f:s + A\,2\,f:s + B\,2\,f':s + \&c.$$

$$\sigma q = m^2\alpha\varrho\Lambda^2 R\int S\,ds\,f:s + \left(\omega G - \Lambda\alpha m(s)\frac{dG}{ds}\right)\int H\,ds\,f:s + A\,3\,f:s + B\,3\,f':s + \&c.$$

mais on a aussi

$$p = \frac{dR}{dy}\int S\,ds\,f:s + \frac{dt}{dy}R\int\frac{dS}{dt}\,ds\,f:s + M\,3\,f:s + N\,3\,f':s + \&c.$$

$$q = \frac{dR}{dx}\int S\,ds\,f:s + \frac{dt}{dx}R\int\frac{dS}{dt}\,ds\,f:s + M\,4\,f:s + N\,4\,f':s + \&c.$$

Il sera donc facile de former ces deux équations

$$R\,1\int S\,ds\,f:s - \frac{dt}{dy}\sigma R\int\frac{dS}{dt}\,ds\,f:s - G\,1\int H\,ds\,f:s = A\,5\,f:s + \&c.$$

$$R\,2\int S\,ds\,f:s - \frac{dt}{dx}\,\sigma R\int \frac{dS}{dt}\,ds\,f:s + G\,2\int H\,ds\,f:s$$
$$= M\,5\,f:s + \&c.$$

dans lesquelles on a fait, pour abréger,

$$\pi\,G + \Lambda\gamma\,(s)\,\frac{dG}{ds} = G\,1;$$

$$m\gamma\varrho\Lambda^2 R - \sigma\,\frac{dR}{dy} = R\,1;$$

$$\omega\,G - \Lambda\alpha m\,(s)\,\frac{dG}{ds} = G\,2;$$

$$m^2\alpha\varrho\Lambda^2 R - \sigma\,\frac{dR}{dx} = R\,2.$$

(9.) On en tirera, en éliminant $\int H\,d\,s\,f:s$, & faisant, pour abréger,

$$\frac{R\,1\,G\,2 + R\,2\,G\,1}{\sigma R\,(G\,2\,\frac{dt}{dy} + G\,1\,\frac{dt}{dx})} = \gamma\,1;$$

$$\gamma\,1\int S\,ds\,f:s - \int\frac{dS}{dt}\,d\,s\,f:s = M\,6\,f:s + \&c.$$

Au moyen de celle-ci, on aura $\int S\,d\,s\,f:s$ en quantités débarrassées du signe intégral, à moins que $\frac{d\gamma\,1}{ds}$ ne soit nul; donc $\gamma\,1$ ne doit pas renfermer s. On le fera passer sous le signe intégral, & l'équation précédente deviendra

$$\int(\gamma\,1\,S - \frac{dS}{dt})\,ds\,f:s = M\,6\,f:s + \&c:$$

or $e^{-\int\gamma\,1\,dt}(\gamma\,1\,S - \frac{dS}{dt})$ est la différentielle de $-\,S\,e^{-\int\gamma\,1\,dt}$ prise par rapport à t & divisée par $d\,t$; ayant donc multiplié les deux membres de la dernière équation par $e^{-\int\gamma\,1\,dt}$, on l'intégrera, & on aura

$$e^{-\int\gamma\,1\,dt}\int S\,d\,s\,f:s = \int e^{-\int\gamma\,1\,dt}\,M\,6\,dt.f:s + \&c.$$

Celle-ci donnera $\int S\,d\,s\,f:s$ en quantités délivrées du signe

intégral, toutes les fois que $G2 \frac{dt}{dy} + G1 \frac{dt}{dx}$ ne ſera pas nul; & lorſqu'il ſera nul, on aura une équation de cette forme,

$$(R1G2 + R2G1) \int S ds f : s = A6f : s + \&c.$$

qui donnera $\int S ds f : s$ en quantités délivrées du ſigne intégral, à moins que $R1G2 + R2G1$ ne ſoit nul auſſi : il eſt donc néceſſaire de former ces deux équations

$$G2m + G1 = 0, R1G2 + R2G1 = 0,$$

deſquelles on tire $R1 - mR2 = 0$.

Cette dernière équation ſera facilement changée en celle-ci,

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{ds} = (\tau) \ldots\ldots \frac{\gamma - \alpha m^2}{\sigma(s)} m \varrho \Lambda^2,$$

qui, étant intégrée, donne $R = e^{\int \tau ds} \varphi : t$.

Il ſuit de-là, que quand l'intégrale doit contenir le terme $R \int S ds f : s$, la partie de la valeur de z, dont il s'agit, renferme une fonction arbitraire de t, outre celle de s, & que par conſéquent elle peut être priſe pour l'intégrale complète. On parviendroit au même réſultat, quel que fût le nombre des termes affectés du ſigne intégral & le nombre de ces ſignes dans chaque terme; donc, ſi l'intégrale complète eſt poſſible, en termes finis, on doit la trouver délivrée du ſigne intégral relativement à l'une ou à l'autre des fonctions arbitraires. M. de la Place a, le premier, fait cette remarque importante, dans les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1773.

(10.) Nous prendrons, pour ſecond exemple, les équations aux différences partielles du troiſième ordre, par rapport auxquelles les équations (1) & (2) deviennent

$$\Lambda \alpha m (p + \lambda q + \mu r) + V + \theta 1 = 0,$$

$$-\omega p - \pi q - \varpi r + \Lambda m (\gamma'' p' + \delta'' q' + \varrho z) = (V).$$

Ayant fait, pour abréger,

$$\frac{dN}{dy} + M\frac{ds}{dy} = N1, \frac{dP}{dy} + N\frac{ds}{dy} = P1, \&c.$$

$$\frac{dN}{dx} + M\frac{ds}{dx} = N2, \frac{dP}{dx} + N\frac{ds}{dx} = P2, \&c.$$

$$\frac{dN1}{dy} + \frac{dM}{dy}\frac{ds}{dy} = N3, \frac{dP1}{dy} + N1\frac{ds}{dy} = P3, \&c.$$

$$\frac{dN1}{dx} + \frac{dM}{dy}\frac{ds}{dx} = N4, \frac{dP1}{dx} + N1\frac{ds}{dx} = P4, \&c.$$

$$\frac{dN2}{dx} + \frac{dM}{dx}\frac{ds}{dx} = N5, \frac{dP2}{dx} + N2\frac{ds}{dx} = P5, \&c.$$

de $z = Mf:s + Nf':s + Pf'':s + \ldots\ldots + Uf^{n\,1}:s + W$,

on tire

$$p' = \frac{dM}{dy}f:s + N1f':s + \ldots\ldots + U1f^{n\,1}:s + U\frac{ds}{dy}f^{(n+1.)1}:s + \frac{dW}{dy},$$

$$q' = \frac{dM}{dx}f:s + N2f':s + \ldots\ldots + U2f^{n\,1}:s + U\frac{ds}{dx}f^{(n+1.)1}:s + \frac{dW}{dx},$$

$$p = \frac{d^2M}{dy^2}f:s + N3f':s + \ldots\ldots + U3f^{n\,1}:s + \left(\frac{ds}{dy}U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dy}\right)f^{(n+1.)1}:s + U\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 f^{(n+2.)1}:s + \frac{d^2W}{dy^2};$$

$$q = \frac{d^2M}{dydx}f:s + N4f':s + \ldots\ldots + U4f^{n\,1}:s + \left(\frac{ds}{dx}U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dx}\right)f^{(n+1.)1}:s + U\frac{ds}{dy}\frac{ds}{dx}f^{(n+2.)1}:s + \frac{d^2W}{dydx},$$

$$r = \frac{d^2 M}{dx^2} f:s + N5 f':s + \ldots\ldots + U5 f^{n\,1}:s$$

$$+ \left(\frac{ds}{dx} U2 + \frac{d.U\frac{ds}{dx}}{dx}\right) f^{(n+1).1}:s$$

$$+ U\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 f^{(n+2.)1}:s + \frac{d^2 W}{dx^2}.$$

(11.) Nous ferons

$$V = A f:s + B f':s + C f'':s$$
$$+ \ldots\ldots + K f^{n\,1}:s + L f^{(n+1.1)}:s + \Gamma;$$

c'eſt-à-dire, que nous lui donnerons un terme de plus qu'à z; nous lui en donnerions deux, ſi l'équation étoit du quatrième ordre, & ainſi de ſuite : partant

$$(V) = (A) f:s + [(B) + A(s)] f':s$$
$$+ \ldots\ldots + [(K) + I(s)] f^{n\,1}:s$$
$$+ [(L) + K(s)] f^{(n+1).1}:s$$
$$+ L(s) f^{(n+2).1}:s + (\Gamma).$$

On aura donc, pour déterminer $A, M, B, N \ldots\ldots$ K, U, Γ, W, les équations du ſecond ordre

$$\Lambda\alpha m\left(\frac{d^2 M}{dy^2} + \lambda\frac{d^2 M}{dy\,dx} + \mu\frac{d^2 M}{dx^2}\right) + A = 0,$$

$$\omega\frac{d^2 M}{dy^2} + \pi\frac{d^2 M}{dy\,dx} + \varpi\frac{d^2 M}{dx^2}$$
$$- \Lambda m\left(\gamma''\frac{dM}{dy} + \delta''\frac{dM}{dx} + \varrho M\right) + (A) = 0;$$

$$\Lambda\alpha m(N3 + \lambda N4 + \mu N5) + B = 0,$$

$$\omega N3 + \pi N4 + \varpi N5 - \Lambda m(\gamma'' N1 + \delta'' N2 + \varrho N)$$
$$+ (B) + A(s) = 0;$$

[. . . . .]

$$\Lambda\alpha m(U3 + \lambda U4 + \mu U5) + K = 0.$$

$$\omega U3 + \pi U4 + \varpi U5 - \Lambda m$$

$$(\gamma'' U1 + \delta'' U2 + \varrho U) + (K) + I(s) = 0,$$

$$\Lambda \alpha m \left(\frac{d^2 w}{dy^2} + \lambda \frac{d^2 w}{dy\, dx} + \mu \frac{d^2 w}{dx^2}\right) + \Gamma + \theta I = 0,$$

$$\omega \frac{d^2 w}{dy^2} + \pi \frac{d^2 w}{dy\, dx} + \varpi \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$- \Lambda m \left(\gamma'' \frac{dw}{dy} + \delta'' \frac{dw}{dx} + \varrho w\right) + (\Gamma) = 0.$$

On aura de plus ces quatre équations

$$\Lambda \alpha m \left[\frac{ds}{dy} U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dy} + \lambda \left(\frac{ds}{dx} U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dx}\right)\right.$$

$$\left. + \mu \left(\frac{ds}{dx} U2 + \frac{d.U\frac{ds}{dx}}{dx}\right)\right] + L = 0,$$

$$\omega \left(\frac{ds}{dy} U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dy}\right) + \pi \left(\frac{ds}{dx} U1 + \frac{d.U\frac{ds}{dy}}{dx}\right)$$

$$+ \varpi \left(\frac{ds}{dx} U2 + \frac{d.U\frac{ds}{dx}}{dx}\right) - \Lambda m \left(\gamma'' \frac{ds}{dx}\right.$$

$$\left. + \delta'' \frac{ds}{dx}\right) U + (L) + K(s) = 0,$$

$$\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 + \lambda \frac{ds}{dy} \frac{ds}{dx} + \mu \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$\omega \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 + \pi \frac{ds}{dy} \frac{ds}{dx} + \varpi \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 + L(s) = 0;$$

dont la troisième, qui n'est autre que

$$\alpha (m m')^2 - \gamma m m' - \delta (m + m') = 0,$$

est toujours vraie par la nature de l'équation du troisième degré, dont m & m' sont deux racines ; il n'y a donc effectivement que deux équations de condition, pour que les suppositions que nous avons faites puissent avoir lieu.

(12.) Si l'équation du troisième ordre étoit

$$\frac{d^3 z}{dx^3} + a\frac{d^3 z}{dx^2\,dy} + b\frac{d^3 z}{dx\,dy^2} + c\frac{d^3 z}{dy^3}$$
$$+ \frac{1}{u}\left(a^1\frac{d^2 z}{dx^2} + b^1\frac{d^2 z}{dx\,dy} + c^1\frac{d^2 z}{dy^2}\right) + \frac{1}{u^2}\left(e\frac{dz}{dx}\right.$$
$$\left. + f\frac{dz}{dy}\right) + \frac{gz}{u^3} = 0,$$

où $a, b, c, a^1, b^1, c^1, e, f, g$ sont des constantes & $u = hx + iy$, h, i étant aussi constans; on auroit m, m^1, m^{11} constans, $t = my + x$, $s = m^1 y + x$, $r = m^{11} y + x$, $(s) = m^1 - m$.

Ayant fait $\Lambda = -1$, on supposeroit

$$M = e(1)u^\partial, N = e(2)u^{\partial+1} \ldots U = e(n+1)u^{\partial+n},$$
$$A = g(1)u^{\partial-2}, B = g(2)u^{\partial-1} \ldots K = g(n+1)u^{\partial+n-2},$$
$$L = g(n+2)u^{\partial+n-1};$$

& par ces substitutions, les équations qu'il s'agiroit de résoudre deviendroient

$$cm\partial.(\partial - 1)(i^2 + \lambda ih + \mu h^2)e(1) = g(1),$$
$$[m\partial.(\partial - 1)(c^1 i^2 + b^1 ih + a^1 h^2) + m\partial(fi + eh)$$
$$+ mg]e(1) = (hm - i)(\partial - 2)g(1),$$
$$(i^2 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 1)\partial e(2) + [(2i + \lambda h).m^1$$
$$+ \lambda i + 2\mu h]\partial e(1) = \frac{g(2)}{cm},$$

$$[(c^1 i^2 + b^1 ih + a^1 h^2)(\partial + 1)\partial + (fi + eh)(\partial + 1) + g]e(2)$$
$$+ \{[2(c^1 i + b^1 h).m^1 + b^1 i + 2a^1 h]\partial + fm^1 + e\}e(1)$$
$$= \frac{hm - i}{m}(\partial - 1)g(2) + \frac{m - m^1}{m}g(1),$$

$$(i^2 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 1)(\partial + 2)e(3) + [(2i + \lambda h).m^1$$
$$+ \lambda i + 2\mu h](\partial + 1)e(2) + (m^{12} + \lambda m^1 + \mu)e(1) = \frac{g(3)}{cm},$$

$$[(c'i^2 + b'ih + a'h^2)(\partial + 1)(\partial + 2) + (fi + eh)(\partial + 2) + g]e(3) + \{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + 1) + fm' + e\}e(2) + (c'm'^2 + b'm' + a')e(1) = \frac{hm - i}{m}\partial g(3) + \frac{m - m'}{m}g(2),$$

$$(i^2 + \lambda ih + \mu h^2)(\partial + 2)(\partial + 3)e(4) + [(2i + \lambda h).m' + \lambda i + 2\mu h](\partial + 2)e(3) + (m'^2 + \lambda m' + \mu)e(2) = \frac{g(4)}{me},$$

$$[(c'i^2 + b'ih + a'h^2)(\partial + 2)(\partial + 3) + (fi + eh)(\partial + 3) + g]e(4) + \{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + 2) + fm' + e\}e(3) + (c'm'^2 + b'm' + a')e(2) = \frac{hm - i}{m}(\partial + 1)g(4) + \frac{m - m'}{m}g(3), \&c.$$

dont les deux premières donneront $\frac{e(1)}{g(1)}$ & ∂ par une équation du troisième degré; les autres serviront à trouver $e(2)$, $g(2)$, &c. Quant aux conditions d'intégrabilité, elles seront renfermées dans celles-ci

$$[(2i + \lambda h).m' + \lambda i + 2\mu h](\partial + n)e(n + 1) + (m'^2 + \lambda m' + \mu)e(n) = \frac{c'm'^2 + b'm' + a'}{c(m - m')},$$

$$\{[(2c'i + b'h).m' + b'i + 2a'h](\partial + n) + fm' + e\}e(n + 1) + (c'm'^2 + b'm' + a')\left[e(n) - \frac{hm - i}{m - m'}(\partial + n - 1)\right] = \frac{m - m'}{m}g(n + 1).$$

(13.) Il nous reste à discuter le cas où z pourroit renfermer des termes dans lesquels la fonction arbitraire seroit embarrassée du signe intégral. Si, par exemple,

$$z = R\int S\,ds f:s + Mf:s + \&c.$$

on aura

$$p' = \frac{dR}{dy}\int S ds f:s + \frac{dt}{dy} R \int \frac{dS}{dt} ds f:s + M3 f:s + \&c.$$

$$q' = \frac{dR}{dx}\int S ds f:s + \frac{dt}{dx} R \int \frac{dS}{dt} ds f:s + M4 f:s + \&c.$$

$$p = \frac{d^2 R}{dy^2}\int S ds f:s + \left(2\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2 t}{dy^2}\right)\int \frac{dS}{dt} ds f:s$$

$$+ R\left(\frac{dt}{dy}\right)^2 \int \frac{d^2 S}{dt^2} ds f:s + m1 f:s + \&c.$$

$$q = \frac{d^2 R}{dy\,dx}\int S ds f:s + \left(\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2 t}{dy\,dx}\right)\int \frac{dS}{dt} ds f:s$$

$$+ R\frac{dt}{dy}\frac{dt}{dx}\int \frac{d^2 S}{dt^2} ds f:s + m2 f:s + \&c.$$

$$r = \frac{d^2 R}{dx^2}\int S ds f:s + \left(2\frac{dR}{dx}\frac{dt}{dx} + R\frac{d^2 t}{dx^2}\right)\int \frac{dS}{dt} ds f:s$$

$$+ R\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 \int \frac{d^2 S}{dt^2} ds f:s + m3 f:s + \&c;$$

& faisant, pour abréger,

$$\frac{d^2 R}{dy^2} + \lambda\frac{d^2 R}{dy\,dx} + \mu\frac{d^2 R}{dx^2} = R1,$$

$$2\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2 t}{dy^2} + \lambda\left(\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx}\frac{dt}{dy}\right.$$

$$\left. + R\frac{d^2 t}{dx\,dy}\right) + \mu\left(2\frac{dR}{dx}\frac{dt}{dx} + R\frac{d^2 t}{dx^2}\right) = S1,$$

$$\left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \lambda\frac{dt}{dy}\frac{dt}{dx} + \mu\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = T1,$$

$$\omega\frac{d^2 R}{dy^2} + \pi\frac{d^2 R}{dy\,dx} + \varpi\frac{d^2 R}{dx^2} - m\Lambda\left(\gamma''\frac{dR}{dy}\right.$$

$$\left. + \delta''\frac{dR}{dx} + \varrho R\right) = R2,$$

$$\omega\left(2\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2 t}{dy^2}\right) + \pi\left(\frac{dR}{dy}\frac{dt}{dx} + \frac{dR}{dx}\frac{dt}{dy} + R\frac{d^2 t}{dy\,dx}\right)$$

$$+ \varpi\left(\frac{dR}{dx}\frac{dt}{dx} + R\frac{d^2 t}{dx^2}\right) - m\Lambda\left(\gamma''\frac{dt}{dy} + \delta''\frac{dt}{dx}\right)R = S2,$$

$$\omega\left(\frac{dt}{dy}\right)^2 + \pi\frac{dt}{dy}\frac{dt}{dx} + \varpi\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = T2,$$

les deux équations

$$\Lambda\alpha m\left(R1\int S ds f:s + S1\int\frac{dS}{dt}dsf:s + RT1\int\frac{d^2S}{dt^2}dsf:s\right) + G\int H dsf:s = m4f:s + \&c.$$

$$R2\int S dsf:s + S2\int\frac{dS}{dt}dsf:s + RT2\int\frac{d^2S}{dt^2}dsf:s + \frac{dG}{ds}(s)\int H dsf:s = m5f:s + \&c.$$

desquelles on tirera, en éliminant $\int H dsf:s$ & faisant, pour abréger, $\frac{\Lambda\alpha m(s)}{G}\frac{dG}{ds} = b$,

$$(bR1 - R2)\int S dsf:s + (bS1 - S2)\int\frac{dS}{dt}dsf:s + (bT1 - T2)R\int\frac{d^2S}{dt^2}dsf:s = m6f:s + \&c.$$

(14.) Si $bT1 - T2$ n'est pas nul, en faisant pour abréger,

$$\frac{bR1 - R2}{R(bT1 - T2)} = V1, \quad \frac{bS1 - S2}{R(bT1 - T2)} = V2;$$

on aura

$$V1\int S dsf:s + V2\int\frac{dS}{dt}dsf:s + \int\frac{d^2S}{dt^2}dsf:s = m7f:s + \&c.$$

& différenciant par rapport à s,

$$\frac{dV1}{ds}\int S dsf:s + \frac{dV2}{ds}\int\frac{dS}{dt}dsf:s = m8f:s + \&c.$$

Si $\frac{dV2}{ds}$ n'est pas nul, on tirera de celle-ci $\int S dsf:s$ en quantités délivrées du signe intégral, à moins que $\frac{dV1}{ds}:\frac{dV2}{ds}$, que nous ferons $= \sigma 1$, ne renferme point s. On mettra $\sigma 1$ sous le signe, & ayant intégré par rapport à t, on aura

$\int S\, ds f:s$ en quantités délivrées du ſigne intégral; ce qui ne pouvant être par l'hypothèſe, il faut néceſſairement que $\frac{dV2}{ds}$ ſoit nul. Mais l'équation qui précède donnera le même réſultat, à moins que $\frac{dV1}{ds}$ ne ſoit nul: donc $V1$ & $V2$ ne doivent pas renfermer s, & on pourra les faire paſſer ſous le ſigne, d'où reſultera cette équation,

$$\int\left(\frac{d^2 S}{dt^2} + V2\,\frac{dS}{dt} + V1\,S\right) ds f:s = m7 f:s + \&c.$$

Or θ étant donné par

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{d.V2\theta}{dt} + V1\,\theta = 0,$$

on a, pour l'intégrale de

$$\int\left(\frac{d^2 S}{dt^2} + V2\,\frac{dS}{dt} + V1\,S\right)\theta\, dt,$$

la quantité ſuivante:

$$\theta\,\frac{dS}{dt} + \left(V2\,\theta - \frac{d\theta}{dt}\right)S;$$

donc l'équation dont il s'agit deviendra

$$\int\left[\theta\,\frac{dS}{dt} + \left(V2\,\theta - \frac{d\theta}{dt}\right)S\right] ds f:s = \int\theta m7\, dt f:s + \&c.$$

qui, étant intégrée une ſeconde fois par rapport à t, donnera $\int S\, ds f:s$ en quantités délivrées du ſigne intégral: donc $bT1 - T2$ doit être nul; & comme on démontrera, de la même manière, que $bS1 - S2$, $bR1 - R2$ doivent être nuls auſſi, on aura trois équations que nous pourrons écrire comme il ſuit:

$$bT1 - T2 = 0,\quad bR1 - R2 = 0,\quad b(S1 + tR1) - S2 - tR2 = 0.$$

(15.) Ces équations, ou celles-ci,

$$(b - \omega)m^2 + (b\lambda - \pi)m + b\mu - \varpi = 0,$$

$$(b - \omega)\frac{d^2 R}{dy^2} + (b\lambda - \pi)\frac{d^2 R}{dy\,dx} + (b\mu - \varpi)\frac{d^2 R}{dx^2}$$
$$+ m\Lambda\left(\gamma^{II}\frac{dR}{dy} + \delta^{II}\frac{dR}{dx} + \varrho R\right) = 0,$$

$$(b - \omega)\frac{d^2.Rt}{dy^2} + (b\lambda - \pi)\frac{d^2.Rt}{dy\,dx} + (b\mu - \varpi)\frac{d^2.Rt}{dx^2}$$
$$+ m\Lambda\left(\gamma^{II}\frac{d.Rt}{dy} + \delta^{II}\frac{d.Rt}{dx} + \varrho Rt\right) = 0,$$

font voir que quelle que ſoit la valeur de R qui doit ſatisfaire aux conditions qu'elles renferment, ſi on la repréſente par u, $R = u\varphi:t$ y ſatisfera auſſi. Il eſt donc clair que ſi l'intégrale complète eſt poſſible en termes finis, on l'aura toujours délivrée du ſigne intégral, relativement à deux des trois fonctions arbitraires qu'elle doit renfermer; il n'eſt pas moins clair qu'on ne peut pas la ſuppoſer abſolument délivrée de ce ſigne, ſans diminuer la généralité des ſuppoſitions. Généralement ſi l'intégrale complète d'une équation linéaire de l'ordre n eſt poſſible en termes finis, on l'aura toujours délivrée du ſigne intégral, relativement à $n - 1$ des fonctions arbitraires qu'elle doit renfermer; mais on ne pourra pas la ſuppoſer abſolument délivrée de ce ſigne, ſans diminuer la généralité de la ſolution.

MÉMOIRE
SUR L'ILE DE FRISLANDE,
Par M. BUACHE.

Lû le 9 Juillet 1785.

JE me propoſe de démontrer, dans ce Mémoire; l'exiſtence & la véritable poſition d'une iſle que la géographie moderne a réformée & exclue des Cartes, après l'y avoir admiſe pendant près de trois cents ans, & l'y avoir même repréſentée avec des détails aſſez conſidérables.

On a eu connoiſſance de l'île de Friſlande, vers la fin du quatorzième ſiècle, par les lettres & mémoires de deux frères Vénitiens, de la famille des Zeni, qu'on dit avoir abordé dans cette iſle, & y avoir été retenus par un Prince du pays. Nous avons, dans la collection de Ramuſio, au *tome II,* une relation abrégée de leurs voyages & de leurs découvertes, tirée de leurs lettres & mémoires, & publiée par un de leurs deſcendans. Nous avons auſſi, dans une édition italienne de Ptolémée, publiée par Girolamo Ruſcelli *(Veniſe, 1561*, in 4.°*)*, la copie d'une carte originale de ces mêmes voyages & découvertes, qui fut trouvée parmi les lettres des deux frères Zeni, & miſe au jour en même temps que la relation de leurs expéditions, pour en faciliter l'intelligence.

Si l'île de Friſlande n'exiſtoit pas, comme l'a prétendu Laët, dans ſon Traité de l'origine des Américains, & comme on pourroit être tenté de le croire, après la réforme qui en a été faite par les derniers Géographes, les voyages des Zeni ſeroient une pure fiction; leur relation ne pourroit être regardée que comme un roman, ainſi que la carte qui l'accompagne; & on ne pourroit en tirer aucun fruit, ni même les citer dans une diſcuſſion ſérieuſe. D'un autre côté, ſi les voyages des Zeni étoient

véritables & leur relation authentique, comme l'ont prétendu plusieurs savans d'Italie plus à portée que Laët d'être instruits sur ce point, l'île de Frislande auroit existé réellement; elle existeroit même encore, du moins en partie, puisqu'aucune histoire ne parle de révolution qui ait pu l'anéantir; & il y auroit lieu de croire qu'on pourroit en trouver quelques vestiges. Ce sont ces considérations qui m'ont engagé dans les recherches que je vais soumettre au jugement de l'Académie. Je desirois sur-tout pouvoir rendre utiles la relation & la carte des Zeni, qui me paroissoient devoir répandre quelque jour sur l'histoire des découvertes & de la population.

On voit l'île de Frislande sur des cartes manuscrites de Texéira, sur les cartes gravées de Mercator, Blaeu, Dudley, Bertius, Coronelli & autres principaux Géographes des deux derniers siècles : elle y est placée dans le sud-ouest de l'Islande, assez près du Groenland, & représentée sur toutes comme une terre bien connue & d'une étendue considérable. M. Delisle la marquoit encore en 1714 & 1720 sur ses Hémisphères, mais figurée comme une terre peu connue & dont on n'a qu'une idée vague : il la nomme *Frislande* dans son Hémisphère septentrional de 1714, & *Terre de Bus*, ci-devant *Frislande*, dans son Hémisphère occidental de 1720. M. Danville, n'admettant dans ses cartes que des connoissances certaines, en a exclu l'île de Bus & toute idée de Frislande. Enfin, dans une carte réduite des *Mers du nord*, publiée par M.rs de Verdun, de Borda & Pingré, en 1776, & à la suite d'un voyage qui a rectifié nos connoissances sur toutes les parties du globe que ces savans ont parcourues, on ne voit aucune trace de Frislande; & l'île de *Bus* n'y est marquée que comme très-douteuse, & seulement sur l'autorité des cartes de Vankeulen, qui ne la figurent elles-mêmes que comme une terre peu connue.

Il y a, à la vérité, sur ces cartes de Vankeulen, une légende concernant cette terre, & qui dit : *Cette Terre*

a été submergée, & n'a plus aujourd'hui qu'un quart de lieue de circuit, lorsque la mer est grosse ; c'étoit, il y a bien des années, une grande île nommée Frislande, qui avoit bien 100 milles de circuit, & sur laquelle il y avoit plusieurs villages : mais cette légende n'est elle-même fondée que sur une conjecture mise en avant par quelques historiens, dans la vue d'expliquer pourquoi l'île de Frislande ne se retrouvoit pas. On avoit cru de même, pendant un temps, que le Groenland avoit été englouti, parce qu'on ne le retrouvoit pas.

À l'occasion de cette légende, qui n'a point échappé aux recherches de M.[rs] de Verdun, de Borda & Pingré, ces savans nous exposent, dans la relation de leur voyage, leur opinion sur l'île de *Frislande* & sur la terre de *Bus*. Il est dit, au *tome II* de cette relation, *page 359 :* « Cette » île de Frislande est réellement représentée comme une » grande île, sur plusieurs cartes de l'Atlas de Mercator, » de l'Arcano del Mare, &c. & cela avec des détails » de villes, de villages, &c. qui persuaderoient presque » que cette île a autrefois existé: nous sommes fort éloignés » de le croire ; mais que cette île ait existé ou non, il » est au moins certain qu'elle n'existe plus. Nous avons » traversé le lieu où elle est placée, sur plusieurs cartes de » l'Arcano del Mare & de Mercator, & nous n'en avons » pas aperçu le plus léger vestige : mais existe-t-il au » moins, sous le nom de *Bus*, une petite partie de cette » île, nous en doutons, parce que nous ne voyons pas » que l'existence de cette île *Bus* soit suffisamment constatée ». Telle est l'opinion que des Savans, à qui la Géographie a tant d'obligations, ont pu se former de l'île de Frislande; & on doit la considérer comme le résultat de l'état actuel de nos connoissances sur ce point.

C'est aussi l'opinion qui avoit été le plus généralement adoptée auparavant, à en juger par le titre d'une carte particulière de Frislande, publiée par le P. Coronelli, géographe de la république de Venise. Ce titre est : *Frislanda*

Frislanda scoperta da Nicolo Zeno, patricio Veneto, creduta favolosa, o nel mare sommersa. Coronelli assure, d'un autre côté, dans son *Isolario*, que l'on regarde à Venise l'histoire de la découverte des Zeni comme une histoire vraie & authentique. En donnant à sa carte de Frislande le titre que l'on vient de voir, il aura sans doute voulu se conformer à l'idée qu'on en avoit ailleurs, & qui étoit plus généralement reçue.

La plupart des auteurs ont regardé en effet l'île de Frislande comme une terre fabuleuse, parce que, depuis le temps de sa découverte, elle n'a été retrouvée par aucun des navigateurs qui ont parcouru les mers du nord; parce qu'il n'en est pas fait la moindre mention dans les Histoires connues, même dans celle des Souverains à qui on en attribuoit la possession; & parce que la seule relation qui l'a fait connoître, contient quelques détails qui paroissent peu vraisemblables. Quelques savans, qui ont considéré avec plus d'attention la relation & les Cartes de cette découverte, n'ont pu se persuader qu'une île, représentée avec des détails considérables & des noms étrangers à la langue des navigateurs qui en parlent, ne dût être considérée que comme une fiction : ils n'ont pu croire non plus que des personnes de la première qualité, telles qu'étoient les Zeni à Venise, n'eussent publié qu'un roman, dans une relation qu'ils donnoient comme véritable, & eussent voulu en imposer aussi grossièrement au public. Ils ont mieux aimé supposer que l'île de Frislande, qu'on ne retrouvoit pas, auroit été submergée ou engloutie dans la mer, depuis l'époque de sa découverte.

Il y a une troisième opinion, suivant laquelle la terre de Frislande ne seroit autre chose que la partie occidentale de l'Islande; mais cette opinion n'a servi qu'à fortifier les doutes que l'on avoit sur l'existence de cette terre, & je ne la cite ici que pour indiquer l'ouvrage dans lequel elle est développée, & qui contient d'ailleurs

des obſervations curieuſes ſur la queſtion dont il s'agit dans ce Mémoire : ce ſont les *Refleſſioni geographice soprà la Terra incognita*, du P. Vitale Terra-Roſſa, bénédictin & profeſſeur en l'univerſité de Padoue.

Quelque bien fondée que paroiſſe l'opinion des auteurs qui croient cette île fabuleuſe ou ſubmergée, il s'en faut de beaucoup qu'elle ſoit ſans difficultés, & qu'elle réponde, d'une manière ſatisfaiſante, à toutes les objections qu'on peut former contr'elle; aujourd'hui ſur-tout qu'on voit reparoître, dans les découvertes des derniers navigateurs, pluſieurs terres ou îles qu'on avoit regardées de même comme très-douteuſes, & qu'on avoit exclues en conſéquence des cartes modernes : telles ſont les îles de *Quiros* & autres anciennes découvertes des Eſpagnols dans la mer du Sud.

J'obſerverai d'abord que ſuppoſer la ſubmerſion totale d'une île auſſi grande que celle dont il eſt ici queſtion, c'eſt ſuppoſer une révolution terrible, dont les effets auroient dû ſe faire reſſentir au loin, & être connus au moins dans les terres ou îles voiſines. On nous a conſervé les dates & juſqu'aux moindres détails des différens ravages que la mer a faits, depuis l'an 800, ſur les îles de Heyligland & de Norſtrand, voiſines des côtes du Jutland. On nous a conſervé de même les dates des principaux événemens qui ont eu lieu en Iſlande, depuis une longue ſuite de ſiècles, & entr'autres des feux qui ſont ſortis de la mer aux environs de cette île; mais on ne trouve nulle part un ſeul mot qui ait rapport à la ſubmerſion totale de Friſlande, laquelle ſubmerſion n'auroit pu arriver encore qu'après l'an 1400, ou depuis le commencement du XVe ſiècle. Suppoſition pour ſuppoſition, il me ſembleroit beaucoup plus ſimple & même plus naturel de ſuppoſer une erreur dans les Cartes géographiques, que d'admettre gratuitement une révolution auſſi étonnante.

Il me paroîtroit également plus ſimple & plus naturel

de ſuppoſer les cartes en défaut, lorſqu'on ne trouve pas une terre à la place où ces cartes en marquent une, que d'en conclure abſolument que cette terre n'exiſte pas. On ſait que la poſition d'une île qui n'eſt pas fixée par des obſervations aſtronomiques, peut varier conſidérablement, & au point qu'il ſe trouve quelquefois 200 à 300 lieues de différence entre ſa véritable poſition & celle que les cartes lui aſſignent. Les cartes ſont dreſſées en grande partie d'après les journaux des navigateurs, & ſur l'eſtime des pilotes : elles participent donc aux erreurs dont on ſait que cette eſtime eſt ſuſceptible ; & il eſt à remarquer que, dans les premiers temps des grandes navigations, ou à l'époque des premières découvertes, ces erreurs étoient très-conſidérables.

Par une ſuite de ces mêmes erreurs inévitables dans l'eſtime de la route du vaiſſeau, il pouvoit arriver qu'une même île vue par trois navigateurs, fût regardée par chacun d'eux comme une nouvelle découverte, & qu'elle parût enſuite ſur des cartes dans trois différentes poſitions, & ſous trois différens noms. La *Georgie* de Cook, par exemple, nouvellement découverte dans l'océan méridional, eſt la même terre que l'île de *Saint-Pierre*, vue par M. Duclos-Guyot, commandant le vaiſſeau eſpagnol *le Lion*, en 1756. Elle eſt la même encore, autant qu'on peut l'eſtimer, que la *terre de la Roche*, vue par un Officier de ce nom dans le ſiècle dernier, & qu'on avoit réformée dans les nouvelles cartes. On remarque encore que M. le chevalier Hebert, qui traverſa le premier du cap de Horn au cap de Bonne-eſpérance, en 1708, regarda les îles de Triſtan d'Acugna comme un objet de nouvelle découverte : s'eſtimant, à la vue de ces îles, être éloigné d'environ quatre cents lieues de la poſition que ſa carte donnoit aux îles d'Acugna, il crut que c'étoient de nouvelles îles, & les nomma en conſéquence *îles Hebert*. C'eſt ainſi ſans doute que ſe ſont multipliées les petites îles, les Roches & les Vigies,

qu'on voit en si grand nombre sur les anciennes cartes ; & qu'une navigation plus éclairée a fait disparoître en grande partie.

Il est évident qu'on ne retrouveroit pas les îles *Hebert*, si on les cherchoit ailleurs qu'à la place des îles de Tristan d'Acugna ; comme on ne trouvera pas vraisemblablement l'île de *Saint-Pierre*, ni la terre de *la Roche*, ailleurs que dans la Georgie du capitaine Cook; cependant on n'en conclura pas que ces découvertes sont fabuleuses, ou que ces îles ont été submergées. Ce sont principalement les noms qu'on donne aux îles nouvelles ou réputées nouvelles, qui occasionnent tant d'erreurs & de confusion dans la géographie ; & il seroit à desirer que les navigateurs se contentassent à l'avenir des noms que les îles portent dans le pays même, du moins à l'égard de celles qui sont habitées. Outre que ce seroit un moyen sûr pour reconnoitre dans la suite les îles qui auroient déjà été découvertes; il en résulteroit encore de nouvelles lumières pour la géographie, en ce que les dénominations des lieux sont pour la plupart significatives, & ont rapport à la nature des pays ou à quelques productions remarquables. Magellan nous avoit désigné par leurs veritables noms une partie des Isles par où il avoit passé : on a reconnu les îles des Larrons, au nom de *Juvagana* qu'il avoit indiqué, & qui est le même que *Gua-han ;* & on retrouve toutes les autres découvertes de son vaisseau *la Victoire*, dans celles du capitaine Forrest.

D'après toutes ces considérations, au lieu de supposer l'île de Frislande fabuleuse ou submergée, je supposerai seulement que sa position est défectueuse dans les cartes qui la représentent, & son nom peut-être altéré ou défiguré dans la relation qui l'a fait connoître. Cette supposition me paroît d'abord pouvoir expliquer pourquoi cette île n'a été reconnue par aucun navigateur, & pourquoi on n'en trouve aucune mention dans l'histoire; elle m'autorise aussi à ne pas rejeter comme fabuleuses la relation & la

carte des découvertes des Zeni; & je puis maintenant faire usage des lumières que j'y entrevois, & qui me paroissent conduire à la reconnoissance de la terre de Frislande.

Pour que l'on puisse apprécier plus facilement les conséquences que je déduis de ces deux pièces, je crois devoir rapporter ici un précis de la relation, & mettre sous les yeux une copie de la carte des Zeni.

Dans la guerre qui s'éleva, en 1377, entre les Vénitiens & les Génois, au sujet de l'île de Ténédos, Charles Zeni fut nommé Général de l'armée Vénitienne. Il avoit deux frères, Nicolas & Marc-Antoine: Nicolas voyant la guerre finie, résolut de connoître le monde & de voyager; il fit équiper un vaisseau à ses frais, & passa le détroit de Gibraltar, dans le dessein de visiter l'Angleterre & les Pays-bas. Après avoir couru durant quelques jours au nord, il essuya une tempête qui le poussa vers l'île de Frislande & brisa son vaisseau sur la côte : ce voyage se fit en 1380. Cette île appartenoit au roi de Norvège; mais un seigneur de ce pays, nommé Zichini, venoit d'y descendre avec une armée pour en faire la conquête ; ce Prince possédoit les îles de *Portland*, situées au sud & près de Frislande, & qui étoient les plus riches & les plus peuplées du pays; il possédoit aussi le duché de *Sorand*, situé dans la terre & du côté qui regarde l'Écosse: il avoit déjà remporté, l'année précédente, une victoire sur le roi de Norvége.

Sur le bruit qui se répandit bientôt de l'arrivée d'un vaisseau étranger dans cette île, Zichini accourut au lieu où il étoit; il parla en latin à Zeni, & ayant appris qu'il étoit Vénitien, il le retira des mains des habitans qui se disposoient à lui faire un mauvais parti, & le prit sous sa protection, ainsi que tout l'équipage : reconnoissant ensuite son mérite & ses talens pour la navigation, il le fit monter sur ses vaisseaux, & recommanda à son Général de ne rien faire sans ses conseils.

L'armée navale ayant tiré à l'ouest, soumit sans peine

quelques îles de peu de conſidération, entr'autres, *Ledova* & *Ilofe;* elle entra dans un golfe nommé *Sudero*, prit quelques vaiſſeaux chargés de poiſſons ſalés, dans un port de la terre nommé *Saneſtol*, & ſoumit encore d'autres îles. La mer qu'ils parcoururent étoit tellement remplie d'écueils & de ſirtes ou bas-fonds, que ſans le ſecours de Zeni, la flotte ſe ſeroit perdue cent fois.

En abordant à la ville de *Bondendono*, on apprit que Zichini avoit remporté une victoire complète, qui l'avoit rendu maître de toute l'île : Zichini y vint lui-même quelque temps après, il témoigna beaucoup d'amitié à Zeni, & de-là ſe rendit à Friſlande, capitale de l'île, pour y faire ſon entrée. Cette ville eſt ſituée dans la partie du ſud-eſt & ſur un golfe (car cette île en a beaucoup); il y a dans cette ville une ſi grande abondance de poiſſons, que les Anglois, les Flamands, les Écoſſois, les Danois & les Norvégiens y viennent en faire leurs proviſions, & apportent par ce commerce beaucoup de richeſſes dans l'île.

Nicolas Zeni ſe voyant ainſi retenu & honoré par Zichini, écrivit à Marc-Antoine ſon frère, de le venir joindre. Celui-ci étant arrivé, Zichini partit avec les deux Zeni, ſur une flotte conſidérable, pour aller attaquer l'*Eſtlande*, qui eſt ſituée entre Friſlande & la Norvège. Il avoit déjà commencé à ravager ce pays, quand il apprit que le roi de Norvège s'approchoit de lui : il crut devoir ſe retirer; mais une tempête qui ſurvint, lui fit perdre une partie de ſes vaiſſeaux, & le reſte fut jeté à l'île *Griſland*, qui eſt aſſez grande, mais inculte. La flotte du roi de Norvège périt auſſi.

Zichini voyant qu'il n'étoit pas loin de l'Iſlande, qui appartenoit auſſi au roi de Norwège, réſolut de l'attaquer; mais comme il n'avoit que peu de monde, & que cette île étoit bien gardée, il ſe contenta de prendre les îles Iſlandiques de *Talas*, *Broas*, *Iſcant*, *Trans*, *Mimant*, *Damberc* & *Breſſa*. Il fit conſtruire un fort dans celle de Breſſa,

dont il donna le gouvernement à Nicolas Zeni; & lui ayant laiſſé quelques vaiſſeaux, il s'en retourna à Friſlande.

Dès le printemps ſuivant, Nicolas Zeni équipa trois vaiſſeaux, dans le deſſein d'aller découvrir de nouveaux pays; & s'étant mis en mer au mois de Juillet, il aborda au Groenland, à l'endroit où étoient bâtis le monaſtère & l'égliſe de Saint Thomas, deſſervie par des Frères Prêcheurs. Ne pouvant ſupporter la rigueur du froid de ce climat, & y étant tombé malade, il revint à l'île de Friſlande, où il mourut bientôt après.

Marc-Antoine ſuccéda à ſon frère dans ſes richeſſes & ſes dignités: il vouloit retourner à Veniſe, mais Zichini le retint, & l'engagea à faire avec lui une expédition dans l'île d'Eſtotiland. Il y avoit vingt-ſix ans que des pêcheurs Friſlandois avoient été pouſſés par une tempête juſqu'à cette île, qui eſt à plus de 1000 milles à l'oueſt de Friſlande: il n'en étoit revenu qu'un ſeul à Friſlande, & c'eſt ſur le rapport qu'il avoit fait de cette île, que Zichini avoit réſolu d'y aller. (On trouve ici, dans la relation, le récit de ce qui étoit arrivé à ces pêcheurs, & les noms de quelques autres terres nouvelles où ils avoient abordé; mais je paſſe ſur ces détails, tant pour abréger, que parce qu'ils ne ſont fondés que ſur le rapport d'un ſeul homme, & n'inſpirent pas le même degré de confiance que le récit des expéditions des Zeni).

Zichini ſe mit en mer avec une armée aſſez conſidérable, & fit route à l'oueſt. Après avoir dépaſſé quelques îles dépendantes de Friſlande, & quelques ſirtes ou bas-fonds, on aborda à *Ledova*, où l'on reſta ſept jours pour compléter les proviſions néceſſaires. On en partit le 1.er Juillet, & on navigua d'abord avec le vent en poupe; on eſſuya enſuite une tempête qui dura huit jours, & on fut pouſſé vers une île qu'on ne connoiſſoit pas. Les habitans, qui accoururent ſur le rivage, firent entendre à Zichini, que leur île s'appeloit *Icarie*, & leur Roi, *Icare*, comme tous ſes prédéceſſeurs, & qu'ils deſcendoient, à ce qu'ils

croyoient, d'un roi d'Écoſſe, qui les avoit menés-là. Ils le prièrent de ne point deſcendre dans leur île, parce que c'étoit une de leurs loix de n'y point laiſſer aborder d'étrangers: ils lui offrirent en même temps de recevoir parmi eux, s'il le vouloit, un homme de ſon équipage, qui leur ſerviroit d'interprète, comme ils en avoient déjà dix de différentes nations, & qui ſeroit traité comme un de leurs concitoyens. Zichini peu ſatisfait de cette réception, voulut deſcendre à terre, mais il ne put en venir à bout, & il fut contraint de paſſer outre.

Il courut de-là ſix jours à l'oueſt avec un vent favorable; le vent ayant enſuite paſſé au ſud, on navigua encore quatre jours & on découvrit enfin la terre. On trouva que ce n'étoit qu'une île, aſſez belle à la vérité, mais habitée par le peuple le plus ſauvage du monde, d'une petite taille, & ſi timide, que d'abord qu'ils voyoient quelqu'un, ils ſe retiroient dans des cavernes. On appela le port où l'on avoit abordé, port de *Trin;* & un cap voiſin, cap de *Trin* *.

Zichini avoit réſolu de bâtir une ville dans cet endroit & d'y laiſſer une colonie. Une partie de ſon équipage paroiſſant mécontente & demandant à s'en retourner, il les renvoya ſous la conduite de Marc-Antoine Zeni, qui fut chargé de cette commiſſion bien malgré lui. Marc-Antoine, pour ſon retour, tira droit à l'eſt, & courut vingt jours dans cette direction ſans voir la terre; il porta enſuite vers le ſud, & cinq jours après il ſe trouva à l'île de *Neome,* ce qui lui fit connoître qu'il avoit dépaſſé l'Iſlande. Ayant pris dans cette île qui étoit ſoumiſe à Zichini, les rafraîchiſſemens dont il avoit beſoin, il en partit & arriva trois jours après à Friſlande.

Telles ſont les circonſtances principales de la relation

* Dans un petit vocabulaire de la langue Cambrique, ou du pays de Galles, que Laët a inſéré dans ſes Obſervations ſur l'origine des Américains, on trouve le mot *Trwyn,* en correſpondance avec celui de *Naſus, Nez,* qui eſt ſouvent employé pour déſigner un cap.

des

des Zeni, & celles qui me paroiſſent propres à faire reconnoitre l'île de Friſlande. J'ajouterai ici, d'après les remarques de Ramuſio, ſur cette relation, que tous ces détails ſont tirés des lettres de Nicolas Zeni à ſon frère Marc-Antoine, & de celles de Marc-Antoine à leur autre frère Charles. Après avoir été conſervées ſoigneuſement dans la famille, elles furent publiées dans la ſuite par un Seigneur de cette famille, qui avertit en même temps qu'il en avoit eu beaucoup d'autres; mais que ces lettres & mémoires lui étant tombés entre les mains, pendant qu'il étoit jeune, il les avoit déchirés, ne ſachant pas ce que c'étoit. On voit dans la relation le commencement d'une lettre de Marc-Antoine à ſon frère Charles, dans laquelle il lui mandoit que, pour ce qu'il ſouhaitoit de ſavoir touchant les mœurs des habitans & les animaux de ces pays-là, il en avoit compoſé un livre qu'il eſpéroit porter avec lui; que dans ce livre, il avoit traité de la ſituation des pays, des loix & des coutumes de *Friſlande*, d'*Iſlande*, d'*Eſtlande*, du royaume de *Norwège*, d'*Eſtotiland* & de *Drogium*; qu'il avoit écrit la vie de ſon frère Nicolas, les terres par lui découvertes, & les affaires du Groenland; qu'il avoit auſſi écrit la vie & les expéditions de Zichini, où l'on verroit la découverte des deux côtes du Groenland, & les villes qu'il avoit bâties par-tout; qu'enfin il eſpéroit lui dire de vive voix ce qui manqueroit à ſon livre. Celui des Zeni qui a mis ces lettres au jour, annonce encore qu'il a trouvé parmi ces lettres & mémoires, une ancienne carte à naviguer, toute gâtée & délabrée de vieilleſſe; qu'il a été aſſez heureux pour pouvoir en faire une copie, & qu'il la publie, afin qu'on entende mieux les choſes qu'il rapporte.

Je dois avertir, en finiſſant ce précis de la relation, qu'en paſſant ſous ſilence pluſieurs particularités, dont quelques-unes ont paru peu vraiſemblables & ont excité la critique, je n'ai point cherché à éviter les objections, mais ſeulement à abréger un récit qui pouvoit paroître déplacé ici, mais qui étoit néceſſaire pour l'intelligence de la ſuite

de ce Mémoire. On ſait au reſte, que les premiers qui ont parlé des pays inconnus avant eux, comme du nouveau Mexique, de la Guyane, &c. en ont dit des choſes fort extraordinaires, & que cela n'empêche pas qu'il y ait un nouveau Mexique, une Guyane, &c.

Je vais maintenant expoſer les conſéquences que je crois pouvoir déduire de la relation & de la carte des Zeni, & qui me paroiſſent des données ſuffiſantes pour réſoudre la queſtion qui nous occupe. Je commence par la relation & par les rapports qu'on y voit indiqués entre l'île de Friſlande & les autres terres voiſines, telles que la Norvège, l'Écoſſe, les îles de Schetland, l'Eſtotiland & l'Iſlande.

1.° Il eſt dit que l'île de Friſlande étoit poſſédée par les rois de Norvège, lorſque Nicolas Zeni y aborda en 1380. On connoit, par l'hiſtoire, quelles ont été dans tous les temps les poſſeſſions des Norvégiens au-dehors de la Norvège: ce ſont le Groenland, l'Iſlande, les îles de Fer-oë, de Schetland & les Orcades. Les îles de Schetland & les Orcades ont paſſé ſous la domination des rois d'Écoſſe, par le mariage de Marguerite, fille de Chriſtiern I, roi de Danemarck, avec James III, roi d'Écoſſe; mais toutes les autres ſont reſtées au pouvoir des rois de Norvège & de Danemarck, juſqu'à ce jour. Or, il eſt à remarquer que les îles de *Fer-oë,* qui ſont voiſines de Schetland, & pour le moins auſſi conſidérables qu'elles, ne ſont ici nommées nulle part, ni dans la relation ni ſur la carte des Zeni. Zichini, après avoir fait la conquête de Friſlande, va attaquer l'Eſtlande & l'Iſlande, parce qu'elles appartenoient auſſi au roi de Norvège: il devoit, par la même raiſon, attaquer pareillement les Fer-oë, qui ſe trouvoient d'ailleurs ſur ſa route, entre l'Eſtlande & l'Iſlande; cependant il n'en eſt pas fait la moindre mention dans cette circonſtance ni ailleurs. Ce ſilence de la relation ſur des îles auſſi étendues que celles de Fer-oë, cette omiſſion, dans la carte ſur-tout, où elle eſt un défaut eſſentiel, ne peuvent ſe concevoir, qu'en ſuppoſant que les îles de Fer-oë ſeroient la même

terre que l'île de Frislande. Je me borne ici à annoncer ce premier résultat, & à le présenter seulement comme une des données de la question. Avant que d'aller plus loin, je crois devoir prévenir les doutes & les objections que pourroit faire naître l'entreprise de Zichini contre les rois de Norvège. On concevra sans peine comment ce Prince a pu tenter de se soustraire à leur domination, & de s'ériger lui-même en souverain, si on se rappelle qu'en l'an 1348, il arriva une grande peste, connue sous le nom de *peste noire*, & qui enleva une grande partie des habitans du Nord. La Norvège & le Danemarck furent, pour ainsi dire, épuisés; on vit disparoître tout-à-la-fois les marchands & les matelots qui composoient les compagnies du Groenland dans ces deux royaumes; la navigation & le commerce furent interrompus, & les Colonies négligées & presque abandonnées. On sait encore qu'à la suite de cette peste, le Groenland a été perdu pendant long-temps, parce qu'on avoit cessé d'y envoyer.

2.° En parlant des possessions de Zichini, à l'époque de l'arrivée des Vénitiens, il est dit qu'outre les îles de Portland, situées au sud & près de Frislande, il étoit encore seigneur du duché de Sorand, situé dans la terre & du côté qui regarde l'Écosse, *Fra terra,* &c. *posta d'alla banda verso Scotia.* Il est visible par ces expressions, que le duché de Sorand, qui regarde l'Écosse, n'en peut être éloigné de 300 lieues, ni situé près du Groenland, où les Géographes l'ont placé, & où les navigateurs l'ont cherché en vain. La relation nous indique ici une proximité entre le duché de Sorand & l'Écosse, ou du moins un intervalle peu considérable & qui n'empêche pas la communication. Or, ce duché de Sorand fait partie de l'île de Frislande, comme on le voit par la carte des Zeni, & comme l'annonce aussi la relation, dont il convient de remarquer ici les expressions & l'exactitude: elle nous dit que le duché de Sorand est dans la terre *Fra terra,* & cela signifie qu'il est situé dans l'île principale ou la

grande terre de Frislande. On sait que Pomona ou l'île principale des Orcades, se nomme encore *Mainland* ou Terre-ferme, & que la principale des îles de Schetland se nomme seulement *Mainland*; on pourroit même conclure de cette dénomination singulière, employée dans la relation, que la terre de Frislande auroit été un composé de plusieurs îles, comme les Orcades & les Schetland; & que ses habitans auroient eu la même langue ou la même manière de désigner les objets, que ceux de ces dernières îles: & à tous ces traits, on seroit tenté de reconnoître la terre de Frislande dans la terre de Fer-oë, qui est un composé de plusieurs îles, comme les Orcades & les Schetland, qui a été originairement peuplée, comme ces autres îles, par des Norvégiens, & qui d'ailleurs n'est pas fort éloignée de l'Écosse.

3.° La relation nous dit que l'*Estlande* est située entre Frislande & la Norvège: on ne peut disconvenir que cette Estlande ne soit les îles de Schetland, que l'on nomme autrement dans le pays, *Hitland* ou *Hetland*; or, si nous avions à indiquer aujourd'hui la situation des îles de Schetland, nous dirions, en consultant les cartes les plus exactes, que ces îles sont situées entre les îles de Fer-oë & la Norvège. Ce rapport de Frislande avec l'Estlande, nous indique donc encore une proximité entre les deux terres, telle qu'elle existe entre les Fer-oë & les Schetland, & telle qu'il faut la supposer aussi pour concevoir la marche de Zichini dans ses courses sur les possessions du roi de Norvège: on a vu que c'est par la terre d'Estlande qu'il a commencé ses courses, ce qui annonce que c'étoit la terre la plus proche de Frislande. C'est sur un rapport semblable, que le savant auteur de l'*Histoire des Hommes*, a reconnu la vraie position de l'ancienne *Memphis*, capitale de l'Égypte. Pline avoit dit que les pyramides étoient situées entre Memphis & le Delta, & l'Historien en a conclu avec raison que Memphis étoit située au sud des pyramides; tandis que des voyageurs qui avoient été

ſur les lieux, la plaçoient directement à l'oueſt des mêmes pyramides.

4.° La diſtance de Friſlande aux côtes de l'Amérique, telle qu'on peut l'eſtimer d'après la relation, tendroit à éloigner cette île de la poſition que les Géographes lui avoient aſſignée près du Groenland, & à la rapprocher des côtes de l'Europe. Suivant le rapport du pêcheur Friſlandois qu'on dit avoir abordé à la côte d'Eſtotiland, aujourd'hui le Labrador, il y a plus de 1000 milles de diſtance entre les deux terres; & ſuivant le rapport de Marc-Antoine Zeni, ſur ſon retour du port de *Trin* qu'on voit ſitué, ſur la carte, à l'extrémité ſud du Groenland, vers le cap Farwell, l'île de Friſlande ſeroit éloignée de la pointe ſud du Groenland, du côté de l'eſt, de plus de vingt jours de navigation. La première diſtance, celle de 1000 milles, eſt évaluée dans la relation même à 200 lieues, & ce ſont ces 200 lieues qu'il faut ſeulement conſidérer ici. Il eſt probable que c'eſt en lieues & non en milles, que le pêcheur Friſlandois aura indiqué cette diſtance, & que l'évaluation en milles n'aura été ajoutée que dans la ſuite, & relativement à l'uſage reçu en Italie, de compter les eſpaces par milles: or, ces 200 lieues, qu'on doit réputer lieues Norvégiennes ou Danoiſes, répondroient à environ 350 de nos lieues marines, & l'île de Friſlande ſeroit éloignée d'autant & même plus des côtes de l'Eſtotiland. Il s'en faut encore de 150 lieues que cette diſtance n'égale celle qui nous eſt indiquée par les meilleures cartes, entre les côtes du Labrador & les îles de Fer-oë; mais le pêcheur Friſlandois peut n'avoir conſervé qu'une eſtime fort vague de ſa route, & il peut ſe faire auſſi qu'il ait indiqué à Zichini une diſtance au-deſſous de la véritable, pour le déterminer plus facilement à aller reconnoître cette terre.

A l'égard de la diſtance qu'on peut déduire de la navigation de Marc-Antoine à ſon retour du port de *Trin*, elle ſeroit de 400 de nos lieues marines, en ſuppoſant ſeulement 20 lieues par jour, & Friſlande ſeroit éloignée

d'autant de la côte sud du Groenland. La carte des mers du Nord, de M.rs de Verdun, de Borda & Pingré, n'en donne que 380 du cap Farewel aux îles de Fer-oë. On peut au moins conclure de ces distances, que Frislande doit être plus éloignée du Groenland qu'on ne l'avoit cru, & qu'elle se rapproche assez de la position des îles de Fer-oë.

5.° Il résulte de la même navigation de Marc-Antoine Zeni à son retour du port de *Trin*, que l'île de Frislande étoit plus orientale que l'Islande. Après avoir couru pendant vingt jours à l'est, & ensuite cinq jours vers le sud, il aborda, suivant la relation, à l'île de Neome, & il reconnut par là qu'il avoit dépassé l'Islande. De l'île de Neome, il se rendit en trois jours à Frislande; ainsi nous nous retrouvons encore ici ramenés vers les îles de Fer-oë, & par une circonstance qui ne laisse aucun lieu de douter.

On voit par la carte des îles de Fer-oë, que je joins ici, que ces îles sont remplies de golfes, comme l'étoit l'île de Frislande, suivant la relation. On sait que la mer, autour de ces îles, étoit autrefois extrêmement abondante en poissons; que dans tous les temps, la pêche a été la principale occupation de leurs habitans, & qu'aujourd'hui encore leur principal commerce consiste en poissons secs: c'est donc encore une terre semblable à celle de Frislande, où, comme on l'a vu ci-devant, les Anglois, les Flamands, les Écossois, les Danois & les Norvégiens alloient faire leurs provisions de poissons. On sait enfin que la navigation est aussi dangereuse autour des îles de Fer-oë, qu'elle l'étoit, suivant la relation, autour de Frislande. On pourroit trouver encore, dans les autres circonstances de cette relation, beaucoup d'autres traits de ressemblance assez frappans; mais il me suffira, je crois, d'ajouter ici ceux que nous présente la carte de Frislande, comparée à la Carte des îles de Fer-oë.

Je remarque d'abord que l'extrémité sud de l'île de Frislande se trouve placée, sur la carte originale & sur

toutes les cartes qui ſont mention de cette île, à la même latitude que l'extrémité ſud des îles de Fer-oë. La pointe ſud de ces îles eſt par 61^d $17'$ $45''$ de latitude, ſuivant les obſervations de Mrs de Verdun, de Borda & Pingré; & la pointe ſud de Friſlande eſt par 61 degrés moins quelques minutes ſur les anciennes cartes. On ne cherchera point à juſtifier la différence qui paroît entre ces deux réſultats, parce qu'on retrouve par-tout une différence ſemblable entre les nouvelles & les anciennes obſervations. Le rapport de latitude, que nous trouvons ici, peut donc être régardé comme aſſez exact, & venir à l'appui des autres preuves qui ſe ſont offertes d'ailleurs.

Si l'on compare maintenant les détails de la carte de Friſlande, avec ceux de la carte de Fer-oë, on aperçoit les principaux caps, des golſes, des îles & autres objets remarquables, placés dans le même ordre & ſuivant les mêmes directions, dans l'une & dans l'autre carte. On y voit auſſi un aſſez grand nombre de dénominations ſemblables, & dans les mêmes poſitions, comme ſi l'une de ces cartes eût été dreſſée d'après une deſcription groſſière de l'autre.

On remarque d'abord une petite île, ſous le nom de *Monaco,* à l'extrémité ſud de Friſlande, & une île ſemblable, avec le nom de *Munck* ou *le Moine,* à l'extrémité ſud des Fer-oë; c'eſt un haut rocher rond, & remarquable, tant à cauſe des écueils qui ſont aux environs, que parce que c'eſt un point de reconnoiſſance : il y a auprès ſix autres rochers qui s'élèvent tant ſoit peu au-deſſus de l'eau, & un courant ou ras de marée fort dangereux.

À la partie du nord-eſt de Friſlande, on voit deux petites îles nommées l'une *Ibini*, & l'autre *Piglu;* on trouve de même à l'extrémité nord-eſt des Fer-oë une petite île nommée *Biſpen* ou l'Évêque, & une autre à côté, nommée *Fugl-oë. Biſpen* eſt, comme Monaco, un haut rocher rond, & un point de reconnoiſſance pour les navigateurs: *Fugl-oë* eſt la première des îles de Fer-oë du côté du Nord-eſt, &

n'eſt éloignée de Biſpen que d'un jet de pierre, ou d'une portée de fuſil au plus.

La partie du nord-oueſt de Friſlande ſe termine par un cap nommé *Spagia*, & la même partie dans les Fer-oë ſe termine par un îlot nommé *Stachen*. À la ſuite de *Spagia*, la côte ſeptentrionale de Friſlande nous préſente une ſuite d'objets ſous les noms de *Aqua*, *Andefort*, *Forali*, *Logoſt*, *Vadin*, *Rane* & *Rovea;* & on trouve à la ſuite de Stachen, ſur la côte nord des Fer-oë, les noms de *Funding*, *Andefort-Fugle*, *Goſte Kladi*, *Arne* & *Lamhau*, qui ſe ſuivent dans le même ordre que les précédens, & entre des golfes, comme ſur la carte de Friſlande.

Par le travers, ou vis-à-vis les golfes d'Andefort, Forali & Logoſt, on voit ſur la carte de Friſlande une aſſez grande île nommée *Duilo*; & ſur la carte des Fer-oë, par le travers des golfes Anding-fiord, Fugle-fiord & Goſte-fiord, on voit un groupe de quatre îles qui ſemblent ne former qu'une même terre, n'étant ſéparées que par de très-petits détroits, & qui ne forment qu'une même province dans l'adminiſtration civile & eccléſiaſtique du pays, Ces îles ſont *Vider-oë* ou *Vid-oë*, *Cun-oë*, *Bord-oë* & *Suin-oë;* on les nomme en général *Norder-oë*, îles du nord, & c'eſt la paroiſſe de *Vid-oë* qui eſt le chef-lieu ou la capitale de cette province. Si ces îles nous repréſentent celle de *Duilo* de la terre de Friſlande, comme il y a tout lieu de le penſer, il eſt auſſi très-probable qu'elles nous repréſenteront la *Thulé* des anciens, que l'on a placée ſucceſſivement dans l'Iſlande, dans les Schetland & dans la Norvège: cette conjecture eſt au moins fondée ſur la ſituation de ces îles, conforme à la deſcription qu'on a faite de Thulé, ſur l'analogie du nom de *Duilo* à celui de *Thulé*, & ſur la ſignification du mot de *Thule* qu'on a traduit juſqu'ici par extrémité, fin, ou dernière terre.

Sur la côte orientale de Friſlande, on voit une île nommée *Stremes*, que ſon nom & ſa poſition au-devant d'un grand golfe peuvent aiſément faire reconnoître ſur la côte de l'eſt des

de Fer-oë: c'eſt ſans doute l'île de *Nols-oë* qu'on voit au-devant du grand golfe de *Strom Fleſerne*, connu par ſes courans, & qui diviſe aujourd'hui le Mainland ou la terre ferme de Fer-oë en deux parties, dont l'une en a pris, comme le golfe, le nom de *Strom-oë*.

La côte occidentale de Friſlande nous préſente un cap *Bouet* dans la partie la plus avancée à l'oueſt; au ſud de ce cap ſont deux grands golfes nommés *Nordero* & *Sudero colfo*, & vis-à-vis le dernier de ces golfes ſont deux îles nommées *Ledeuc* ou *Ledova* & *Ilove*. On reconnoîtra ſans peine ces différens objets à la côte occidentale des Fer-oë, par ſa configuration & les dénominations qu'on y trouve. Le cap *Bouet* répond à *Myg-nes*, qui eſt une petite île la plus avancée à l'oueſt, & dont le nom même indique un cap. Les golfes *Nordero* & *Sudero* ſont les deux ouvertures des détroits qui s'avancent l'un au nord & l'autre au ſud, & qui ſéparent l'île de *Strom-oë* de celles de *Wag-oë* & de *Sand-oë*: les îles *Ledova* & *Ilofe* ſeront celles de *Heſt-oë* & de *Colter*. On trouve ſur la carte des Fer-oë un golfe nommé *Suderoë-fiord*, qui ſépare l'île de Portland, au nord, de celle de *Sku-oë*; mais ce n'eſt pas là le golfe *Sudero* de la carte de Friſlande, au-devant duquel il faut trouver trois îles. Le véritable *Sudero colfo* eſt le détroit qui ſépare Strom-oë de Sand-oë, comme le *Nordero colfo* eſt le détroit qui ſépare Strom-oë de Wag-oë: & on ne ſera pas ſurpris de voir dans l'ancienne carte le nom de *golfe*, au lieu de celui de *détroit*. On ne voit pas ſur la carte des Fer-oë ce grand nombre de petites îles qu'on trouve ſur la carte de Friſlande près de Nordero colfo; ce ne ſont vraiſemblablement que des petites roches, ou ces écueils qui rendoient la navigation ſi dangereuſe, comme on l'a vu dans la relation.

D'après ces premières reconnoiſſances, qui ſont aſſez évidentes par elles-mêmes, & qui confirment de plus en plus celles que la relation nous avoit données, il n'eſt plus guère permis de douter que les îles de Fer-oë ne

ſoient l'ancienne Friſlande. Je me bornerai, pour le reſte des détails de Friſlande, à en faire l'application ſur la carte des îles de Fer-oë, d'autant plus que les rapports des noms ſont moins ſenſibles; ſoit que la copie de la carte de Friſlande ait altéré & défiguré une partie de ſes noms, comme il y a lieu de le penſer, ſoit que la carte des Fer-oë ne nous fourniſſe pas tous les détails de ces îles. J'ajouterai ſeulement ici, que la ville de *Friſlande* peut ſe rapporter à la poſition de *King's-haun*, port ſitué comme Friſlande, dans la partie du S. E. de l'île & ſur un golfe qui en a pris le nom de *Scaale-fiord;* que *Godmec*, une des principales villes de Friſlande, répond à la poſition de *Thors-hawn,* qui eſt depuis très-long-temps le chef-lieu ou la capitale de toutes les îles de Fer-oë, & qui eſt auſſi le port le plus fréquenté pour le commerce de poiſſons; que *Scrand,* duché de l'ancienne Friſlande, peut être repréſenté par le lieu nommé *Scarvenes,* ſitué à la côte ſud de l'île de Sand-oë, & dans la partie de la grande terre qui regarde l'Écoſſe; & qu'enfin les îles de *Portland,* poſſédées par Zichini, & ſituées au ſud & près de Friſlande, peuvent être repréſentées par l'île de *Suder-oë,* qui eſt, comme l'indique ſon nom, la plus ſud des Fer-oë, & qui eſt auſſi l'une des plus riches & des plus peuplées de toutes ces îles. On remarquera que cette île eſt diviſée en trois preſqu'îles, par des golfes qui s'avancent dans les terres, & que la carte des Fer-oë nous donne même les noms des deux iſthmes: ainſi ces preſqu'îles peuvent être priſes avec quelque fondement pour les îles de Portland.

On pourroit déduire encore une nouvelle preuve, en faveur de l'opinion qui réſulte de ces recherches, du rapport qu'il nous paroît y avoir entre le nom de *Friſlande* & celui de *Fer-oë.* Lucas Jacobſon Debes, qui a écrit en danois une deſcription des îles de Fer-oë, dans le pays même & dans la ville de Thors-hawn, en 1670, nous expoſe les différentes opinions des Savans ſur

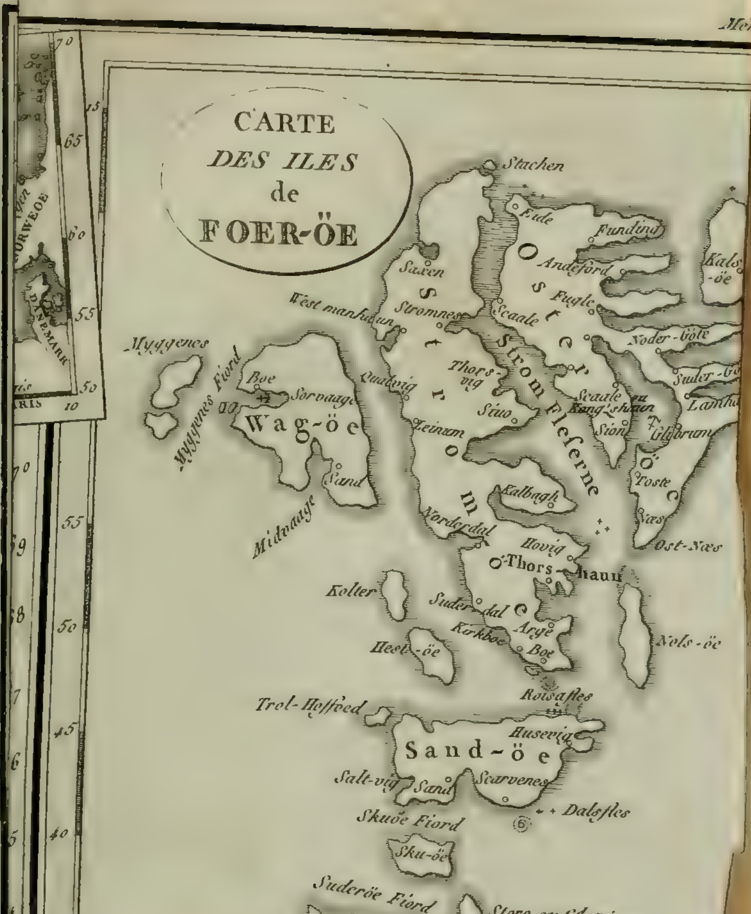
l'origine du nom de ces îles. Son opinion, entr'autres, & celle qui m'a paru la plus probable, est que les îles de *Fer-oë* ont été ainsi nommées du mot *fare*, qui, dans l'ancienne langue de ces îles, signifie la même chose que le mot *ferrie*, en anglois, c'est-à-dire, un passage d'eau; c'est à ce mot, sans doute, qu'il faut aussi rapporter l'origine des noms de *bosphore*, de *far* & de *fretum*, par lesquels on a désigné les détroits. Les îles de Fer-oë sont, comme on le voit par la carte, pleines de golfes, de détroits, de passages d'eau; c'est vraiment le pays des détroits. Or il est visible qu'on a pu les appeler *Ferrie-land*, au lieu de *Fer-oë*, c'est-à-dire, *terre*, au lieu d'*îles*, par la même raison qu'on a appelé *Schetland* ou *Hitland*, un autre corps d'îles semblable à celles-ci, & qui en est assez proche. De Ferrieland à Frislande il n'y a pas, ce me semble, de différence assez considérable, pour ne pas reconnoître l'un de ces noms dans l'autre.

La seule difficulté qui pourroit peut-être arrêter encore & empêcher de reconnoître l'île de Frislande à tant de marques, c'est la manière dont elle est figurée sur la carte ancienne, qui nous la représente comme une grande terre, avec quelques petites îles seulement aux environs, tandis que Fer-oë est une terre découpée & divisée en dix-sept îles. Pour écarter cet obstacle, il suffira de faire remarquer que les *Schetland*, qui sont une autre terre découpée & divisée comme celle de Fer-oë, sont également représentées dans la même carte, comme un grande terre, avec quelques îles autour. On pourroit citer plusieurs exemples d'erreurs semblables; Terre-neuve, entr'autres, est représentée sur les anciennes cartes, bien différente de ce que nous la connoissons aujourd'hui; elle y est divisée & coupée en plusieurs îles, tandis qu'elle n'en forme qu'une grande. C'est sans doute le peu de largeur des golfes & des détroits de Fer-oë, qui aura fait regarder & représenter la plupart de ces îles comme une terre continue; de même que c'est la grande étendue des golfes de Terre-neuve qui

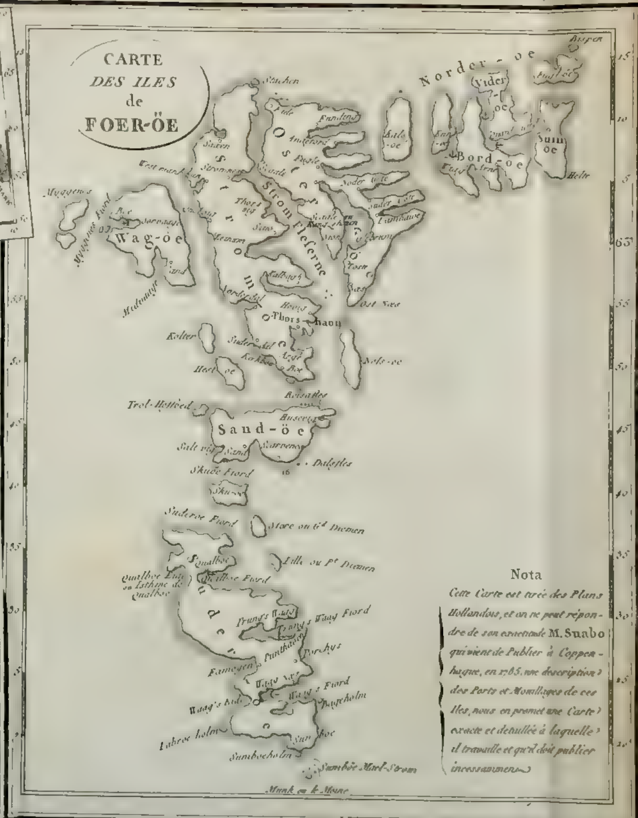
aura donné lieu de diviſer cette terre en pluſieurs îles. J'ai diſtingué ſur la carte des îles de Fer-oë, celles de ces îles, dont l'enſemble me paroît dévoir compoſer la grande terre de Friſlande; ce ſont *Strom-oë, Oſtr-oë, Wag-oë,* avec les îlots de Myg-nès & *Sand-oë.*

Après avoir reconnu l'île de *Friſlande* par tous les moyens que je viens d'expoſer, j'ai recherché quels pouvoient être les fondemens de la poſition que les géographes lui avoient aſſignée, & voici ce que j'ai trouvé de plus vraiſemblable à ce ſujet. Il eſt dit, dans la relation du ſecond voyage de Forbisher, que vingt-ſix jours après être ſorti des Orcades, il s'approcha de l'île de *Friſlande,* dont la côte, ſuivant cette relation, eſt pleine de montagnes pointues & très-élevées; qu'après l'avoir côtoyée quatre jours, il la quitta, & arriva huit jours après à l'endroit où il avoit abordé à ſon premier voyage, c'eſt-à-dire, au Groenland. C'eſt ſans doute d'après ce paſſage de Forbisher, que l'on aura placé l'île de Friſlande du côté du Groenland; mais il étoit aiſé de reconnoître que la Friſlande de Forbisher, ne pouvoit être celle des Zeni. Forbisher ayant rencontré ſur ſa route une île qu'il ne connoiſſoit pas, l'aura priſe pour la Friſlande des Zeni, dont la découverte étoit encore récente de ſon temps, & il l'aura nommée *Friſlande,* ſans s'embarraſſer beaucoup ſi les choſes convenoient ou non. C'eſt ainſi que ſe ſont établies pluſieurs erreurs en géographie ; & lorſqu'elles ſont, comme celle-ci, la ſuite des obſervations d'un homme célèbre, elles s'accréditent & ſe perpétuent pendant des ſiècles.

S'il paroît maintenant démontré que l'île de Friſlande n'eſt point fabuleuſe ni ſubmergée, comme on l'avoit cru juſqu'à préſent, il s'enſuit néceſſairement que la relation des Zeni n'eſt point un roman, mais un monument précieux, d'où l'on peut tirer des connoiſſances utiles. On peut en conclure, entr'autres choſes, que le nouveau Groenland auroit été connu avant la découverte qui en a


CARTE
DES ILES
de
FOER-ÖE
Stachen
Eide
Funding
Kals-öe
Andeford
Fugle
Saxen
West manhaun
Stromnes
Scaale
Myggenes
Myggenes Fiord
Boe
Sorvaage
Wag-öe
Qualvig
Thorsvig
Strom Flesferne
Noder-Göte
Scaale ou Kongshaun
Stiuo
Sion
Glybrun
Zeinum
Sand
Midvaage
Kalbagh
Toste
Næs
Ost-Næs
Norderdal
Hovig
Thors-haun
Kolter
Suderdal
Argé
Kirkboe
Boe
Hest-öe
Nols-öe
Roisafles
Trol-Hoffoed
Huseviq
Sand-öe
Salt-vig
Sand
Scarvenes
Dalsfles
Skuöe Fiord
Sku-öe
Suderöe Fiord
Store ou Gd Diemen
Qualböe
Lille ou Pt Diemen
Qualböe Eide ou Isthme de Qualböe
Qualböe Fiord
Trung's Waag
Trung's Waag-Fiord
Punthaven
Porchys
Famoyen
Waag Næs
Waag's Fiord
Waag's Eide
Bageholm
Labröe-holm
Sumböe
Sumböeholm
Munk ou le Moine


Copie d'une ancienne Carte intitulée, Septentrionalium Partium nova Tabula dressée d'après une Carte Marine trouvée parmi les Mémoires des Freres Zeni, et Publiée par Girolamo Ruscelli dans une Edition Italienne de Ptolemée, Venise 1561
Carte Générale de la MER DU NORD
GROENLANDA
ISLANDE
Terre-Neuve
NORVEGIA
Bergen
SUECIA
GOCIA
ICARIA
FRISLANDA
PODALIDA
EST-LAND
SCOCIA
DANIA


CARTE
DES ILES
de
FOER-ÖE
Norder-oe
Oster-oe
Strom-oe
Wag-öe
Sand-öe
Suder-oe
Thors-haon
Nota
Cette Carte est tirée des Plans Hollandois, et on ne peut répondre de son exactitude M. Suabo qui vient de Publier à Coppenhague, en 1785, une description des Ports et Mouillages de ces Iles, nous en promet une Carte exacte et detaillée à laquelle il travaille et qu'il doit publier incessamment

été faite par les Danois; que l'Amérique auroit aussi été connue & même habitée par des Européens, avant sa découverte par Christophe Colomb; que l'histoire des colonies qu'on dit y avoir passé du pays de Galles l'an 1170, sous la conduite de Madoc, un des fils d'Owen Guineth, roi de ce pays, pourroit paroître assez fondée; & que la découverte de l'île d'*Icare*, qui nous est encore inconnue, pourroit être très-intéressante, & fourniroit peut-être de nouvelles lumières. Il résulteroit encore de la carte des Zeni, que la *Thulé* des anciens seroit plutôt l'île de Frislande ou les Fer-oë, qu'aucun des autres pays auxquels on l'a rapportée successivement.

SUITE DU MÉMOIRE SUR LE CALCUL DES PROBABILITÉS,

Par M. le Marquis DE CONDORCET.

ARTICLE. VI.

*Application des principes de l'*article précédent *à quelques questions de critique.*

I.

J'AI exposé, dans l'*article précédent*, une méthode d'exprimer la probabilité des faits extraordinaires, en ayant égard à celle des témoignages qui les attestent, & à la probabilité propre de ces faits, qui, malgré la très-grande probabilité que produiroient les mêmes témoignages pour un fait ordinaire, peut alors devenir très-petite & fort au-dessous de $\frac{1}{2}$.

II.

J'ai observé en même-temps qu'il ne falloit pas dans ce cas entendre, par la probabilité propre d'un fait, le rapport du nombre des combinaisons où il a lieu, avec le nombre total des combinaisons. Par exemple, si d'un jeu de dix cartes on en a tiré une, & qu'un témoin me dise que c'est telle carte en particulier, la probabilité propre de ce fait, qu'il s'agit de comparer avec la probabilité qui naît du témoignage, n'est pas la probabilité de tirer cette carte, qui seroit $\frac{1}{10}$, mais la probabilité d'amener cette carte plutôt que telle autre carte déterminée en particulier; & comme toutes ces probabilités sont égales, la probabilité propre est ici $\frac{1}{2}$.

Cette distinction étoit nécessaire, & elle suffit pour

expliquer la contrariété d'opinions entre deux classes de philosophes. Les uns ne peuvent se persuader que les mêmes témoignages puissent produire, pour un fait extraordinaire, une probabilité égale à celle qu'ils produisent pour un fait ordinaire; & que, par exemple, si je crois un homme de bon sens qui me dit qu'une femme est accouchée d'un garçon, je dusse le croire également s'il me disoit qu'elle est accouchée de douze.

Les autres au contraire sont convaincus que les témoignages conservent toute leur force, pour les faits extraordinaires & très-peu probables, & ils sont frappés de cette observation, que si on tire une loterie de 100,000 billets, & qu'un homme, digne de foi, dise que le numéro 256, par exemple, a eu le premier lot, personne ne doutera de son témoignage, quoiqu'il y ait 99,999 à parier contre 1 que cet évènement n'est pas arrivé.

Or, au moyen de l'observation précédente, on voit que dans le second cas la probabilité propre du fait étant $\frac{1}{2}$, le témoignage conserve toute sa force, au lieu que dans le premier, cette probabilité étant très-petite, réduit presque à rien celle du témoignage.

III.

J'ai proposé ensuite de prendre, pour la probabilité propre du fait, le rapport du nombre de combinaisons qui donnent ce fait, ou un fait semblable au nombre total des combinaisons.

Ainsi, par exemple, dans le cas où on tire une carte d'un jeu de dix cartes, le nombre des combinaisons où l'on tire une carte déterminée quelconque est un; celui des combinaisons où l'on tire une autre carte déterminée est aussi un; donc $\frac{1}{2}$ exprimera la probabilité propre.

Si on me dit qu'on a tiré deux fois de suite la même carte, alors on trouvera qu'il n'y a que dix combinaisons qui donnent deux fois une même carte, & quatre-vingt-dix qui donnent deux cartes différentes: la probabilité

propre du fait n'est donc que $\frac{1}{10}$, & celle du témoignage commence à devenir plus foible.

Mais je crois devoir abandonner cette manière de considérer la question, 1.° parce qu'elle me paroît trop hypothétique ; 2.° parce que souvent cette comparaison d'évènemens semblables seroit difficile à faire, ou, ce qui est encore pis, ne se feroit que d'après des suppositions arbitraires ; 3.° parce qu'en l'appliquant à des exemples, elle conduit à des résultats trop éloignés de ceux que donneroit la raison commune.

I V.

J'en ai donc cherché une autre, & il m'a paru plus exact de prendre, pour probabilité propre d'un évènement, le rapport de la probabilité de cet évènement prise dans le sens ordinaire, avec la probabilité moyenne de tous les autres évènemens.

Ainsi, dans l'exemple précédent, nous avons dix combinaisons où l'on tire deux cartes semblables, & quarante-cinq combinaisons où l'on tire deux cartes différentes. La probabilité de tirer deux cartes différentes déterminées est $\frac{2}{100}$; celle de tirer deux cartes déterminées semblables est $\frac{1}{100}$. La probabilité moyenne d'un autre évènement que celui qui amène les deux cartes semblables données, sera

donc $\dfrac{45 \cdot \frac{2}{100} + 9 \cdot \frac{1}{100}}{54} = \dfrac{99}{54 \cdot 100}$; celle d'amener les deux cartes déterminées semblables sera $\frac{1}{100}$; donc la probabilité propre de l'évènement sera $\frac{54}{153}$.

Supposons ensuite que, dans le même exemple, on cherche la probabilité propre du fait, qu'on a tiré trois fois de suite la même carte.

Nous avons ici trois espèces de faits, 1.° ceux où l'on a amené trois cartes différentes ; la probabilité de chaque fait

fait déterminé de ce genre eſt $\frac{6}{1000}$, & il y en a 120 : 2.° ceux où l'on tire deux fois la même carte ; ces faits ſont au nombre de 90, & la probabilité de chacun eſt $\frac{3}{1000}$: 3.° ceux où l'on tire trois fois la même carte ; ils ſont au nombre de 10, & la probabilité de chacun eſt $\frac{1}{1000}$. Nous avons donc $\frac{1}{1000}$ pour la probabilité du fait déterminé, & $\frac{6.120 + 3.90 + 9}{1000.219}$ pour la probabilité moyenne des autres faits. La probabilité propre du fait allégué ſera donc $\frac{219}{1218}$.

Ainſi ſuppoſons, par exemple, que la probabilité du témoignage ſoit $\frac{99}{100}$, c'eſt-à-dire, que le témoin ne ſe trompe ou ne veuille tromper qu'une fois ſur cent, on aura, d'après ſon témoignage, la probabilité $\frac{99}{100}$ ou $\frac{9,900}{10,000}$ qu'on a tiré une carte déterminée ; la probabilité $\frac{9,818}{10,000}$ qu'on a tiré deux fois la même carte ; & la probabilité $\frac{9,540}{10,000}$ qu'on l'a tirée trois fois.

Suppoſons encore que l'obſervation ait conſtaté que, ſur vingt millions d'hommes, un ſeul ait vécu 120 ans, & que la plus longue vie ait été de 130 ; qu'un homme me diſe que quelqu'un vient de mourir à 120 ans, & que je cherche la probabilité propre de cet évènement : je regarderai d'abord comme un fait unique, celui de vivre plus de 130 ans, fait que je ſuppoſe n'être pas arrivé ; j'aurai donc 131 faits différens, dont celui de mourir à 120 ans eſt un ſeul. La probabilité de celui-ci ſera $\frac{1}{20,000,131}$; la probabilité

moyenne des 130 autres sera $\frac{20,000,130}{20,000,131.130}$; donc la probabilité propre cherchée sera $\frac{130}{20,000,260}$, ou environ $\frac{1}{15384}$.

V.

Cette méthode s'appliquera également aux évènemens indéterminés. Ainsi, en continuant le même exemple, si le témoin a dit seulement que l'on a deux fois amené la même carte, sans la nommer, alors ces dix évènemens, ayant chacun la probabilité $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100}$ exprimera leur probabilité moyenne; $\frac{2}{100}$ exprimera de même celle des 45 autres évènemens ayant chacun la probabilité $\frac{2}{100}$: ainsi la probabilité propre de l'évènement sera $\frac{1}{3}$.

Il peut paroître singulier que la probabilité propre de l'évènement, au lieu d'être la même ici que dans le cas de l'évènement déterminé, soit sensiblement moindre, qu'elle influe différemment sur la crédibilité du témoin; qu'ainsi le même homme soit moins croyable lorsqu'il dit, en général, qu'il a vu amener deux fois de suite la même carte, que lorsqu'il dit qu'il a vu amener deux fois de suite telle carte en particulier. Cela vient de ce que, dans le second cas, il y a neuf autres combinaisons possibles, dont l'énonciation ne seroit pas plus probable que celle qu'il a faite, au lieu que dans le premier, toutes les autres énonciations qu'il n'a pas faites, sont plus probables; c'est que dans le premier cas c'est seulement le fait extraordinaire qu'il a énoncé; & que dans le second, il a énoncé un fait extraordinaire, par rapport à une partie des évènemens possibles, & un fait commun par rapport à une autre partie. Dans le premier, il ne s'agit que du fait extraordinaire; dans le second, il s'agit du fait extraordinaire & du fait déterminé, qu'il faut comparer à la fois à

des faits déterminés plus ordinaires, & à des faits déterminés qui lui ſont ſemblables.

On ſuivra encore la même règle, s'il s'agit de faits indéterminés qui renferment pluſieurs combinaiſons d'une probabilité différente.

Suppoſons, par exemple, qu'on me diſe qu'un joueur de trictrac a cinq fois de ſuite amené plus de dix points.

Comme nons ne conſidérons ici que le nombre des points, nous avons, pour chaque coup, 11 évènemens poſſibles; c'eſt-à-dire, 11 dés, depuis 2 juſqu'à 12, dont les probabilités ſont $\frac{1}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{6}{36}$, $\frac{5}{36}$, $\frac{4}{36}$, $\frac{3}{36}$, $\frac{2}{36}$, & $\frac{1}{36}$, & les deux derniers ſont les ſeuls qui montent au-deſſus de 10. Cela poſé, comme on ne conſidère ici que la valeur de la ſomme des points dans chaque coup, il n'y aura que $\frac{15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5}$, ou 3003 évènemens, dont 6 ſeulement appartiennent à la combinaiſon propoſée; or, comme la probabilité de ces ſix coups eſt $\frac{1}{12^5}$, on aura $\frac{1}{12^5.6}$ pour leur probabilité moyenne, & $\frac{11^5}{12^5.2997}$ ſera la probabilité des autres coups: la probabilité propre de l'évènement ſera donc ici $\frac{2997}{11^5.6 + 2997}$; ou $\frac{2997}{969,303}$.

VI.

De la même manière que les évènemens, qui ont une probabilité propre au-deſſous de $\frac{1}{2}$, deviennent moins croyables à meſure que cette probabilité diminue, les évènemens vraiſemblables en eux-mêmes, & dont la probabilité propre eſt au-deſſus de $\frac{1}{2}$, deviennent plus croyables à meſure que cette probabilité augmente, quoiqu'atteſtés

par un nombre égal de témoins. C'eſt ainſi, par exemple, qu'un fait aſtronomique qui ſe trouveroit d'accord avec la théorie de la gravitation, ſeroit cru facilement ſur l'aſſertion d'un ſeul Savant, même par ceux qui n'auroient pas vérifié ſes calculs; tandis que, ſi le même Savant avoit annoncé un fait contraire à cette théorie, il auroit beſoin d'une aſſez grande autorité, même pour que l'on crût devoir raiſonnablement examiner ſes calculs.

VII.

Si nous conſidérons maintenant deux claſſes d'évènemens ſeulement A & B, que la probabilité des évènemens A ſoit a & b, celle des évènemens B, a étant plus grand que b; qu'il y ait m évènemens A, & n évènemens B différens, la probabilité propre d'un évènement déterminé de la claſſe des B ſera exprimée par $\frac{b.(m + n - 1)}{ma + b(m + 2n - 2)}$: quantité qui approchera de $\frac{b}{a + b}$ ſi m eſt beaucoup plus grand que n, mais ne pourra jamais être au-deſſous, & ne lui ſera rigoureuſement égale que lorſque $n = 1$. Elle approche beaucoup de $\frac{2b}{a + b}$, ſi $m = n$, & que a ſoit incomparablement plus grand que b; & la valeur de cette probabilité propre pourra d'ailleurs ſurpaſſer $\frac{2b}{a + b}$, mais ſeulement dans le cas où $n > m$, & elle aura $\frac{1}{2}$ pour ſa limite lorſque $a = b$.

Suppoſons, par exemple, qu'un certain évènement quelconque ne ſoit pas arrivé à un ſeul individu ſur cent millions d'individus de la même eſpèce. Alors $\frac{1}{100,000,002}$ exprimera la probabilité qu'il arrivera à un individu donné, & $\frac{100,000,001}{100,000,002}$ celle qu'il n'arrivera pas.

Si, après cela, un témoin raconte que cet évènement eſt arrivé à un individu déterminé, alors, comme il pouvoit également arriver à tous ceux de la même eſpèce, on aura pour m & n de très-grands nombres égaux entr'eux, a ſurpaſſera b incomparablement; en ſorte qu'on s'écartera peu de la vérité en ſuppoſant $\frac{1}{50.000,000}$ l'expreſſion de la probabilité propre de l'évènement.

Mais nous traiterons dans la ſuite plus en détail de l'application de cette méthode à la probabilité que peuvent avoir les évènemens naturels, pour ceux qui ne les ont point perſonnellement obſervés.

VIII.

Je vais maintenant eſſayer de faire à une queſtion de critique l'application des principes que je viens d'établir. Newton paroît être le premier qui ait eu l'idée d'appliquer le calcul des probabilités à la critique des faits. Il propoſe, dans ſon ouvrage ſur la chronologie, d'employer la connoiſſance de la durée moyenne des générations & des règnes, telle que l'expérience nous la donne, ſoit pour fixer d'une manière du moins approchée, des points de chronologie fort incertains, ſoit pour juger du plus ou du moins de confiance que méritent les différens ſyſtèmes imaginés pour concilier entr'elles des époques qui paroiſſent ſe contredire.

Quelques philoſophes ſe ſont ſervis depuis de cette évaluation de la durée moyenne des règnes, pour prouver le peu de probabilité de la durée attribuée par d'anciens hiſtoriens à certaines ſuites de Rois, & montrer par-là combien peu cette partie de leur hiſtoire méritoit de croyance. Ils ont penſé que la probabilité propre des faits devoit influer ſur le poids qu'il falloit attribuer aux témoignages qui les atteſtent, & en ont conclu que, malgré l'autorité des hiſtoriens les plus accrédités, les faits invraiſemblables devoient être rejetés.

Le ſavant Fréret, qui a combattu les principes de la chronologie de Newton, regardoit comme une eſpèce d'uſurpation l'uſage qui commençoit à s'introduire, d'employer dans la critique le calcul des probabilités : il a deſtiné un de ſes Mémoires à eſſayer d'en montrer l'inutilité & le danger. Ce calcul, ſelon lui, doit ſe borner à la théorie des jeux de haſard; on en connoiſſoit cependant alors des applications aux probabilités de la vie humaine, aux emprunts en rentes viagères ou en tontines, & même à quelques queſtions de Droit; mais il paroît que Fréret, quoiqu'il eût en phyſique, en mathématiques & ſur-tout en aſtronomie, des connoiſſances fort étendues, ne connoiſſoit pas les travaux de Halley, des Bernoulli, & de Moivre.

Il apporte pour motif principal de ſon opinion, que, dans les jeux de haſard, le nombre des combinaiſons poſſibles eſt fini, ou du moins donné par une théorie rigoureuſe: avantage que l'on perd néceſſairement lorſqu'on veut appliquer le calcul à la probabilité des faits naturels.

Il eſt vrai qu'alors on ne connoiſſoit pas, comme aujourd'hui, une méthode directe de calculer la probabilité des évènemens futurs ou inconnus d'après l'obſervation des évènemens paſſés, ou plutôt de déterminer la valeur moyenne de cette probabilité: mais on pouvoit employer le calcul d'après cette hypothèſe, que la ſuite des évènemens futurs ſera ſemblable à celle des évènemens paſſés; hypothèſe qu'on ſavoit déjà avoir une exactitude ſuffiſante, lorſque le nombre des obſervations eſt très-grand en lui-même, & par rapport à celui des évènemens inconnus ou futurs dont on cherche la probabilité.

Suivant toute apparence, quelques applications de calcul trop hypothétiques, fondées ſur de faux principes, ou même très-bizarres, qui avoient eu alors une ſorte de célébrité par leur ſingularité même, avoient frappé l'eſprit naturellement juſte & ſage de ce Savant, & l'avoient prévenu contre des recherches pour leſquelles ces premiers

eſſais n'étoient pas propres à inſpirer de la confiance; mais il ne nioit certainement pas le principe général, qu'il faut avoir égard à la probabilité propre, ſoit phyſique, ſoit morale, des évènemens; peu de critiques en ont même fait un uſage plus heureux, & il y a eu dans ce ſiècle peu d'érudits qui aient plus fortement ſenti l'utilité de l'étude des ſciences naturelles, & qui s'y ſoient livrés avec plus de zèle & de ſuccès.

Parmi ceux qui ont adopté le même principe, on doit citer M. de Voltaire, qui peut-être même en a quelquefois abuſé, ſur-tout lorſqu'il a voulu l'appliquer à la probabilité morale des évènemens, beaucoup plus difficile à évaluer que leur probabilité phyſique.

Dans le nombre des applications qu'il a faites de ce principe, on lui reproche ſur-tout d'avoir employé le peu de probabilité qu'il ſuppoſe à la très-longue durée du règne des ſept Rois de Rome, pour jeter de l'incertitude ſur cette partie de l'Hiſtoire Romaine. Comme ce fait eſt un de ceux auxquels il eſt le plus aiſé d'appliquer le calcul, nous l'avons choiſi pour exemple : nous allons donc chercher quelle eſt la probabilité propre de cet évènement, afin de voir ſi elle eſt aſſez petite pour affoiblir beaucoup le témoignage des hiſtoriens qui l'ont rapporté.

IX.

Nous obſerverons d'abord que ces Rois étoient électifs, & au lieu d'employer ici ou les générations des Rois héréditaires, qui ne peuvent s'y appliquer, ou celles des Rois électifs, qni nous donneroient un trop petit nombre d'obſervations, nous préférerons une hypothèſe qui ne doit pas s'écarter beaucup de la vérité, en prévenant d'ailleurs qu'elle eſt un peu trop favorable à la longue durée des règnes.

Nous ſuppoſerons donc, 1.° que les Rois électifs peuvent être élus, ou peuvent commencer à règner depuis l'âge de 30 ans juſqu'à celui de 60; & qu'il eſt également

probable qu'ils seront élus à une époque quelconque prise dans cet intervalle. Nous supposerons, 2.° que, depuis 30 jusqu'à 90 ans, la mortalité est constante, c'est-à-dire, comme si de 60 hommes de 30 ans il en mouroit un par année, un sur 45 hommes de 45 ans, un sur 30 hommes de 60 ans, &c. supposition un peu trop favorable à la durée de la vie.

Cela posé, la plus courte durée de chaque règne sera d'un an, la plus longue de 60; la plus courte durée de sept règnes sera sept ans, & la plus longue 420.

Il eût été plus exact de diminuer les règnes chacun d'une demi-année, de manière que la plus courte durée fût 3 ans $\frac{1}{2}$, & la plus longue 416 $\frac{1}{2}$, ou d'augmenter de 3 ans $\frac{1}{2}$ la durée des sept règnes; mais la différence n'est pas ici très-considérable, & nous donnons encore cet avantage à l'opinion favorable à la longue durée de ces règnes.

X.

Soit en général n la plus grande durée exprimée en années, pour celui qui est élu le plus jeune, m pour celui qui est élu le moins jeune, & p le nombre des règnes. Si l'on prend la formule

$$\frac{[(n - m + 1).x(1 - x) - x^{m+1} + x^{n+2}]^p}{(1 - x)^{2p}.\left[\frac{(n + m).(n - m + 1)}{2}\right]^p},$$

le coéfficient de x^r dans cette formule, développée en série, exprimera la probabilité que les p règnes dureront r années.

Or ici, $n = 60$, $m = 30$, $p = 7$, & comme il faut compter les règnes depuis la fondation jusqu'à la mort de Tarquin, $r = 257$.

Il faudra donc chercher le coéfficient de x^{257} dans la formule

$$\frac{[31x(1 - x) - (x^{31} - x^{62})]^7}{(1 - x)^{14}.45^7.31^7}.$$

XI.

X I.

Si on appelle P ce coéfficient qui exprime la probabilité que les ſept règnes ont duré 257 ans, & qu'on veuille chercher la probabilité propre que cette durée a eu lieu, on obſervera qu'il y a ici 414 évènemens, puiſque les règnes peuvent durer depuis 7 juſqu'à 420 ans; que la probabilité de l'évènement déterminé étant P, celle de la probabilité moyenne des 413 autres évènemens ſera $\frac{1 - P}{413}$, & qu'ainſi, la probabilité propre ſera $\frac{413 P}{1 + 412 P}$: c'eſt donc P qu'il nous reſte à chercher.

Pour cela, il ſuffira de développer le numérateur de la fonction ci-deſſus, qui, en n'ayant égard qu'aux termes où le coéfficient de x ne ſurpaſſe pas 257, donnera 24 termes; & comme on ſait qu'en général, le coéfficient de x^n dans $\frac{1}{(1 - x)^m}$ eſt $\frac{n + m - 1 \ldots\ldots n + 1}{1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots m - 1}$, on aura facilement chacun des 24 termes & la valeur de P, qui ſera $\frac{792}{1,000,000}$.

Nous aurons donc $P = \frac{792}{1,000,000}$, & la probabilité propre du fait ſera $\frac{246,169}{1,000,000}$, ou, à très-peu de choſe près, $\frac{1}{4}$.

X I I.

Si, au lieu de ce fait, nous examinons celui de l'Augure *Accius Nævius*, rapporté auſſi par les écrivains de l'Hiſtoire Romaine; comme juſqu'ici aucun raſoir n'a encore coupé de cailloux, en ſuppoſant ſeulement un million de faits contraires à ce récit, que nous puiſſions regarder comme certains, il ſuit de ce que nous avons dit, *n.° VII*, que la probabilité propre de cette aventure ſeroit $\frac{2}{1,000,000}$ à peu-près.

Supposons maintenant que, pour croire un fait, le placer dans la classe de ceux d'après lesquels on peut se permettre de raisonner, on exige une probabilité $\frac{9,999}{10,000}$, nous n'avons besoin que d'attribuer une probabilité $\frac{29,997}{29,998}$ au rapport des historiens qui ont parlé de la durée du règne des sept Rois de Rome; au lieu que, pour avoir la même probabilité, il en faudroit attribuer une de $\frac{449,949,001}{449,949,002}$ à l'historien qui a rapporté le fait.

On voit, dans le premier cas, un fait extraordinaire qui, tandis qu'un fait commun exigeroit seulement, pour avoir le même degré de croyance, qu'un ou plusieurs historiens ne se trompassent qu'une fois sur dix mille, exigeroit qu'ils ne se trompassent qu'une fois sur 29,998, ou près de 30000 Dans le second, on voit un fait tellement prodigieux, que la crédulité la plus excessive ne pourroit supposer aux historiens l'autorité nécessaire pour donner un motif suffisant de le croire.

XIII.

On auroit pu, au lieu de la méthode que nous avons suivie, supposer à chaque Roi de Rome l'âge que les historiens lui donnent à son avénement, & employer, au lieu de l'hypothèse de *Moivre*, celle de *Lambert*, qui est beaucoup plus exacte, & conduit aussi à des suites sommables. On auroit eu alors une probabilité propre très-sensiblement au-dessous de $\frac{1}{4}$, mais elle n'auroit pas été assez petite pour placer cette durée des règnes au nombre des évènemens qu'il faut rejeter, & elle seroit encore dans la classe de ceux qui exigent seulement des témoignages plus forts & beaucoup plus forts que n'en exigent les évènemens ordinaires.

XIV.

Supposons maintenant quil y ait eu deux classes d'historiens, dont les premiers aient porté la durée des sept

règnes à 257 ans, & les ſeconds à 140 ans ſeulement. En ſuivant les mêmes raiſonnemens, on trouvera que, ſi ces derniers étoient les ſeuls, la probabilité que ſept Rois ont régné 140 ans, eſt $\frac{8,887}{1,000,000}$; & par conſéquent la probabilité propre de ce fait, ſi l'hiſtoire l'avoit tranſmis ſeul, ſeroit $\frac{3,661,444}{4,652,557}$, c'eſt-à-dire, plus grande que $\frac{1}{2}$; & pour avoir une probabilité $\frac{9,999}{10,000}$, d'après le témoignage des hiſtoriens, il ſuffiroit que celle de ce témoignage fût $\frac{9,994}{10,000}$; c'eſt-à-dire, qu'au lieu qu'il faut, pour la durée de 257 ans, le témoignage d'un hiſtorien qui ne ſe trompe qu'une fois ſur 29,998, il ſuffiroit, pour la durée de 140 ans, du témoignage d'un hiſtorien qui ne ſe trompât qu'une fois ſur 1666.

Mais nous ſuppoſons des témoignages en faveur des deux durées, & d'après la théorie expoſée ci-deſſus, les probabilités propres des deux évènemens, & d'un autre évènement indéterminé quelconque qui auroit pu avoir lieu, ſeront,

Pour la durée de 140 ans.................. $\frac{3,652,557}{4,968,390}$,

Pour la durée de 257 ans.................. $\frac{325,512}{4,968,390}$,

Pour l'évènement indéterminé, non témoigné..... $\frac{990,321}{4,968,390}$.

Déſignant ces trois probabilités par a, b, c; celle du témoignage en faveur de la durée de 140 ans par x; celle du témoignage en faveur de la durée de 257 ans par y, nous aurons, pour probabilité réſultante du témoignage pour le premier évènement, $\frac{x.(1-y)}{1-xy}$; pour le ſecond, $\frac{y.(1-x)}{1-xy}$; pour que ni l'un ni l'autre n'ait lieu $\frac{(1-x).(1-y)}{1-xy}$; & par conſéquent,

$$\frac{a.x.(1-y)}{c+(a-c).x+(b-c).y+(c-a-b).xy},$$

$$\frac{b.y.(1-x)}{c+(a-c).x+(b-c).y+(c-a-b)xy},$$

$$\frac{c.(1-x).(1-y)}{c+(a-c).x+(b-c).y+(c-a-b)xy},$$

pour les probabilités des deux évènemens témoignés, & pour celle qu'aucun des deux n'a eu lieu. Pour que la probabilité fût égale entre les deux évènemens, il faudroit que l'on eût $x = \frac{by}{a+(b-a).y}$, & dans l'exemple proposé, $x = \frac{325,512.y}{3,652,557 - 3,327,045.y}$. Supposons $y = \frac{9,999}{10,000}$, nous aurons $x = \frac{9,987}{10,000}$; c'est-à-dire, qu'un témoignage qui se tromperoit une fois sur 770, devroit être cru sur la durée de 140 ans, plutôt que le témoignage qui ne se tromperoit qu'une fois sur 10,000, sur la durée de 257 ans.

Supposons enfin x seulement égal à $\frac{9}{10}$, & voyons quelle valeur devroit avoir y, pour que l'évènement auquel il se rapporte ait une probabilité égale à $\frac{9,999}{10,000}$. Dans ce cas on aura l'équation $y = \frac{338,589,476,666}{338,589,802,178}$; c'est-à-dire, qu'il faudroit un témoignage qui trompât moins qu'une fois sur un million trente mille; ainsi, pour avoir une probabilité $\frac{9,999}{10,000}$ de la durée de 257 ans, il suffira de pouvoir donner aux historiens qui l'ont rapportée, une probabilité telle qu'ils ne se trompent qu'une fois sur trente mille environ; mais si en même temps d'autres historiens qui se trompent une fois sur dix, ont fixé à ces mêmes règnes une durée de 140 ans, il faudra, pour avoir la même probabilité, en pouvoir supposer aux témoignages des premiers une telle, qu'ils ne se trompent qu'une fois sur environ un million trente mille.

MÉMOIRE
SUR LA GRANDEUR APPARENTE DES CORPS OPAQUES,
Vus sur un fond lumineux ou autrement.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 14 Nov. 1753. Relû le 4 Mars 1786.

LA matière sur laquelle j'entreprends aujourd'hui d'entretenir cette assemblée, a déjà été traitée, & elle mérite de l'être plus d'une fois. La question est de savoir si un corps opaque quelconque vu tout entier au-devant d'un corps lumineux, tel, par exemple, que le Soleil, paroîtroit plus petit que s'il étoit vu à l'opposite, sans cependant changer sa distance à l'œil de l'observateur. Après avoir souvent réfléchi aux raisons pour & contre, j'ai cru qu'en cette matière, comme en toute autre matière de science, la voie de l'expérience (quand on peut y avoir recours) étoit toujours la plus sûre, & celle qui nous conduisoit le plus infailliblement au but. C'est donc dans l'intention de découvrir si les corps opaques perdent sensiblement de leur grandeur apparente, lorsqu'ils sont vus sur un fond lumineux, que j'ai fait les expériences qui sont l'objet de ce Mémoire. Pour faire voir en peu de mots l'importance de cette matière, il suffira de faire remarquer que cette diminution, si elle existe, doit influer sur le diamètre de la Lune, dans la prédiction des éclipses de Soleil; sur le temps que Mercure & Vénus, dans leurs conjonctions écliptiques avec le Soleil, emploient à entrer sur son disque, & à en sortir; sur la grandeur réelle de ces planètes; & enfin sur plusieurs autres points de l'astronomie & de la physique, également intéressans pour le progrès de ces deux sciences. Avant que de rapporter mes expériences, je crois qu'il seroit bon de faire un précis histo-

rique de tout ce qui s'eſt paſſé juſqu'à ce jour, parmi les Aſtronomes, de plus intéreſſant ſur cette matière; je le crois même d'autant plus néceſſaire, qu'on ſera par-là plus à portée de voir ce que mes expériences y ont ajouté. Les paſſages de Mercure & de Vénus au-devant du diſque du Soleil, obſervés dans le ſiècle paſſé, ont fait naître l'idée de la diminution de la grandeur apparente des corps opaques, lorſqu'ils ſont vus ſur un fond lumineux. Gaſſendi, un des grands philoſophes de ſon temps, en a fait la remarque, pour la première fois, en 1631, dans la conjonction écliptique de Mercure: perſonne, avant lui, n'avoit été aſſez heureux pour voir cette planète ſur le Soleil. Ce célèbre philoſophe fut dans le plus grand étonnement de voir que Mercure lui paroiſſoit à peine ſous un angle d'un tiers de minute; il n'avoit ſous ſes yeux que des obſervations qui avoient toutes été faites à la vue ſimple ou avec de très-courtes lunettes, & dans des circonſtances où Mercure préſente à la Terre, ſinon tout ſon côté éclairé, au moins une aſſez grande partie. Il s'attendoit de le voir paroître ſur le Soleil, à peu-près de la même grandeur que ces obſervations l'avoient établi, c'eſt-à-dire, ſous un angle de deux ou trois minutes au moins. En liſant ſa Lettre à Schickard, intitulée *de Mercurio in Sole viſo*, l'on y voit qu'étant bien éloigné de penſer que Mercure dût lui paroître ſi petit, il l'avoit d'abord pris pour quelque tache qui s'étoit formée nouvellement; qu'il reconnut enfin, par le mouvement propre & uniforme de cette prétendue tache, en peu de temps, que c'étoit Mercure: d'où il conclut la néceſſité de diminuer la grandeur apparente des aſtres, beaucoup plus qu'on n'auroit pu ſe l'imaginer.

L'obſervation de Gaſſendi fut confirmée deux fois, dans le courant du ſiècle, une fois en 1639, par un paſſage de Vénus ſur le Soleil, qui fut obſervé en Angleterre par *Horoccius* & *Crabtrée ;* & une autre fois en 1661, par un paſſage de Mercure ſur le Soleil, qui fut obſervé à Dantzick par *Hevelius*. Horoccius n'ignoroit pas ce qui avoit été

remarqué dans le passage de Mercure sur le Soleil en 1631, touchant le diamètre apparent de cette planète; cela lui servit d'avertissement pour le diamètre de Vénus, de sorte que cet Astronome ne fut pas surpris au point que l'avoit été Gassendi pour qui la chose avoit été nouvelle. Voici comment Horoccius s'exprime dans son Traité intitulé *Mercurius in Sole visus*, pag. 112, c. I. *Præcipuè autem diametri Veneris apparentis mirabilem parvitatem lectoris consideratione dignam commendarem, nisi consimili in Mercurio novitate Astronomorum admirationem præoccupasset Gassendus: at qui veritatem primus docere non possum, secundus confirmo. Videant ergo, jam altero & notabiliori exemplo, quantùm decipiant planetarum radii in æstimandis eorum diametris.*

Hevelius, qui nous a conservé ce précieux Traité de Horoccius, sur le passage de Vénus au-devant du Soleil, dit, à l'occasion du diamètre de cette planète, que Mercure ne lui avoit paru, en 1661, que de 12 secondes, lorsqu'il passa sur le Soleil; qu'on ne devoit pas s'en étonner, puisque le diamètre de Vénus, que les Astronomes les plus exacts faisoient encore de près de 4 minutes dans son périgée, n'avoit été trouvé que de 1′ 16″ seulement dans son passage au-devant du Soleil.

Comme les diamètres de Mercure & de Vénus, qui avoient été observés dans leurs passages au-devant du Soleil, différoient si considérablement de ceux que tous les Astronomes attribuoient à ces planètes, cela fit croire à plusieurs savans de ces temps-là, que quelque illusion optique pouvoit en être la cause. Schickard, célèbre professeur en astronomie & en hébreu dans l'université de Tubinge, fut de ce sentiment; il composa, à l'occasion du diamètre de Mercure observé par Gassendi, une dissertation qu'il adressa à ce philosophe: on y voit les raisons qui lui faisoient croire que cette planète, lorsqu'elle est vue sur le Soleil, devoit perdre de sa grandeur apparente. La dilatation de la lumière du Soleil qui, par sa nature, se répand de tous côtés, & se renfle aux approches des

corps, en eſt, ſelon lui, la cauſe principale. Les lumières dont on a coutume de ſe ſervir pour éclairer les appartemens pendant la nuit, lui ſervent d'exemple: ſi l'on fait préſenter au-devant d'une de ces lumières un bâton, & qu'on l'obſerve de loin, il paroîtra dentelé profondément à l'endroit par où paſſe la lumière; d'où, par analogie, il conclut que les mêmes apparences doivent ſuivre Mercure lorſqu'il paſſe au-devant du Soleil. Horoccius convient avec Schickard, que la lumière ſe dilate à un point preſque incroyable, lorſque, pour l'apercevoir, nous n'avons d'autre ſecours que celui de la vue ſimple. Il admet auſſi l'expérience de cet Aſtronome, mais il la croit tout-à-fait étrangère à ſon ſujet; il prétend en effet que la diminution du bâton dont il eſt queſtion dans l'expérience de Schickard, n'a d'autres cauſes que les humeurs de l'œil, qui rompent & qui amplifient les rayons de la lumière; mais que ſi l'on reçoit ſur un mur l'ombre du bâton, elle paroîtra d'une grandeur uniforme. Or, continue Horoccius, c'eſt l'ombre de Mercure & de Vénus que l'on obſerve, lorſque l'on reçoit ſur un tableau, dans la chambre obſcure, l'image du Soleil qu'on a fait paſſer à travers une lunette, ce qui modère tellement les rayons de cet aſtre, que la vue n'en eſt point offenſée. On n'a donc rien à craindre alors de la trop grande dilatation des rayons du Soleil, & Vénus & Mercure ont été vus de la même grandeur qu'ils devoient paroître. Pour mieux combattre ſon adverſaire, Horoccius ſe ſert des éclipſes de Soleil, parce qu'à la ſimple vue l'on juge toujours la partie éclipſée trop petite, au lieu que les lunettes la repréſentent, auſſi-bien que le diamètre de la Lune, dans ſa véritable grandeur apparente: il cite l'éclipſe du 22 Mai 1639, & celle du 12 Mai 1621, dont il a obſervé la première & Gaſſendi la ſeconde.

Mais quel fonds peut-on faire ſur ces obſervations dont parle Horoccius? Quand même Gaſſendi & lui auroient excellé dans l'art d'obſerver, cet art étoit alors très-borné, les

les moyens leur manquoient pour l'exactitude, puisque le micromètre n'étoit point encore connu. Sur une quantité aussi grande qu'est celle du diamètre apparent de la Lune, comparé au diamètre apparent de Mercure, ils pouvoient aisément se tromper dans leur estime d'une ou deux minutes, sans que l'erreur pût être sensible. Les observations de Bouillaud, le plus célèbre Astronome de ces temps-là, ne sont marquées que dans cette précision, & par conséquent les deux observations dont parle Horoccius, n'attaquent en rien le sentiment de Schickard.

Il est aisé de voir, par ce qui vient d'être dit, que quoiqu'on eût, du temps de Gassendi & d'Horoccius, l'idée de la diminution des corps opaques lorsqu'ils sont vus sur un fond lumineux, on n'avoit cependant pu parvenir à établir rien de certain sur ce sujet. Personne en effet n'avoit cherché les moyens de mesurer avec exactitude les diamètres de Mercure & de Vénus, lorsqu'ils nous présentent leur côté éclairé. On peut joindre à cela que la méthode grossière dont les Astronomes s'étoient servie pour mesurer le diamètre de ces planètes dans leurs passages au-devant du Soleil, avoit dû influer sur l'exactitude de leurs observations.

M. Huguens, qui est venu dans la suite, a à la vérité observé le diamètre éclairé de Vénus, avec une exactitude qui a surpassé de beaucoup celle de ses prédécesseurs; mais comme il ne paroît pas avoir eu en vue la question présente, je n'insisterai pas sur son observation: je me contenterai seulement de faire remarquer, comme en passant, qu'entre son résultat & celui d'Horoccius & de Crabtrée, il y a 17 à 18 secondes de différence, dont Vénus leur auroit paru plus petite dans son passage au-devant du Soleil. Or, quoique l'observation d'Horoccius & de Crabtrée (comme je l'ai remarqué un peu plus haut) ne soit pas à l'abri de toute censure, cette quantité m'a paru trop considérable pour ne pas mériter attention, d'autant mieux

que j'ai pris un milieu entre les résultats de ces deux Astronomes.

L'expérience faite par Schickard, du bâton au-devant d'une chandelle, quoique simple & grossière, m'ayant paru mériter quelqu'attention, j'ai imaginé un moyen de la répéter beaucoup plus exactement.

J'ai pris une lame de cuivre d'un pouce de largeur & de cinq à six de longueur, médiocrement polie. Je l'ai élevée au dessus d'une table, de façon que ses deux surfaces fussent perpendiculaires, & ses deux grands côtés parallèles à l'horizon; je l'ai arrêtée dans cette position, par ses deux extrémités. J'ai mis, à la distance d'environ six pieds de cette règle, un large oculaire de sept pouces & quelques lignes de foyer. Cet oculaire étoit fermement arrêté sur une règle de bois placée horizontalement. Cette règle portoit un chassis peint avec du blanc de céruse, & bien uni, de manière que l'oculaire étoit entre le chassis & la lame de cuivre. Le chassis étoit destiné à recevoir l'image de la lame de cuivre; il pouvoit s'approcher ou s'écarter de l'oculaire à volonté, étant construit de façon que la règle de bois entroit dedans fort exactement, & il étoit facile de l'arrêter à un point fixe quelconque, par une vis qu'on avoit fait pratiquer en dessous. Le tout étoit fixé très-solidement, & de niveau avec la lame de cuivre. Je plaçai, pendant la nuit, une très-forte bougie au-devant de la lame, & une autre aussi forte par-derrière. J'avois partagé verticalement la lame de cuivre par un grand carton, afin que la bougie la plus proche de l'oculaire n'éclairât que la moitié de la lame; & d'ailleurs la flamme de la bougie plus éloignée étoit assez longue pour être aperçue au-dessus & au-dessous de la partie obscure de la lame. Les choses étant ainsi disposées, j'approchai mon chassis jusqu'à ce que je visse distinctement la peinture de mon objet, & ayant serré la vis, je l'arrêtai à ce point. Les principaux phénomènes que je me contenterai de rapporter, sont au nombre de

deux. Il partoit des deux bords de l'image de la partie éclairée de la lame, une lumière blanchâtre qui, ſemblable à la queue d'une comète, alloit toujours en s'affoibliſſant, à proportion qu'elle s'éloignoit des bords de l'image de la lame, & qui finiſſoit à peu de diſtance. Une ſemblable lumière paroiſſoit auſſi ſur les bords de la repréſentation de la partie obſcure de la lame, mais avec cette différence qu'elle s'étendoit, dans celle-ci, ſur une partie de la largeur de cette repréſentation. Pour meſurer actuellement la partie éclairée & celle qui étoit opaque, j'avois fait diviſer une échelle en 100.es de lignes, & l'ayant fait évider en dedans, je mis à la place des lignes, des ſoies de cocon très-déliées. Ces ſoies formoient une eſpèce de réticule, dont je me ſervis au lieu de micromètre, & que j'avois jugé très-propre pour en faire les fonctions. Il m'apprit, par un grand nombre d'obſervations réitérées & faites avec grand ſoin, que la partie opaque de la lame paroiſſoit $\frac{1}{20}$ de ligne plus petite que la partie éclairée; mais, pour en rendre l'effet encore plus ſenſible, j'ai imaginé l'expérience ſuivante.

J'ai fait tourner & arrondir, le plus exactement qu'il m'a été poſſible, deux plaques de cuivre dont la plus grande avoit onze lignes, & la plus petite neuf lignes & demie de diamètre; je les ai ſubſtituées à la lame de cuivre, & je les ai placées à deux pouces ou environ de diſtance l'une de l'autre; leur direction répondoit à celle de l'oculaire & du chaſſis, afin qu'abaiſſant ou élevant l'une des pièces, je puſſe faire concourir leurs images l'une ſur l'autre. Je plaçai une ſeule bougie en devant, mais un peu à côté; & le tout s'étant peint ſur le chaſſis, je fis mouvoir une des pièces, juſqu'à ce que le bord inférieur d'une des images raſât le bord ſupérieur de l'autre; je fis même en ſorte qu'elles avançaſſent un peu l'une ſur l'autre, ſans cependant que la choſe pût être trop ſenſible. Je changeai la bougie de poſition en la plaçant par-derrière, & faiſant en ſorte que les deux cercles fuſſent vus tout entiers ſur

la flamme de la bougie; j'aperçus alors très-distinctement & sans peine une interruption entre les deux ombres, qui me laissoit entrevoir la lumière. Je vis aussi, comme dans la première expérience, une lumière blanchâtre qui passoit par l'intervalle que formoit l'interruption des deux ombres, & qui s'étendoit sur une partie de ces ombres. Que peut-on conclure de cette expérience, sinon que les rayons de la lumière, pour former cette interruption & se faire apercevoir, s'étoient fléchis deux fois & en différens sens avant que de continuer leur route jusqu'à l'oculaire; qu'outre ces modifications quils avoient souffertes, ils avoient aussi un peu avancé sur la surface du premier cercle avant que d'aller joindre l'autre cercle, ce qui se prouve par cette lumière pâle & blanchâtre que j'ai aperçue de part & d'autre sur les deux cercles; & que par conséquent les corps opaques perdent de leur grandeur apparente quand ils sont vus tout entiers sur un corps lumineux.

On ne peut pas opposer à mes expériences ce que nous avons vu qu'Horoccius avoit objecté à Schickard. Mon oculaire me peignoit la représentation de mes cercles, précisément de la même façon que les objectifs ou les lunettes nous représenteroient, soit une éclipse de Soleil, soit un passage de Vénus ou de Mercure sur le disque apparent de cet astre; mais, pour avoir une démonstration complète de cette diminution, & pour savoir en même temps, d'une façon encore plus exacte, quelle en doit être la quantité relativement aux lunettes de différentes longueurs, & aux objets plus ou moins éclairés, j'avois commencé plusieurs expériences de différentes espèces, que le temps ne m'a pas permis d'achever: j'en rapporterai cependant une que j'ai faite il y a plusieurs mois avec une lunette de sept pieds & demi, dans une maison, rue des Postes. L'on peut voir d'un donjon appartenant à cette maison, un globe qui est placé à l'extrémité du dome des Invalides: le diamètre apparent de ce globe vu à cette distance, est environ quinze fois plus petit que le diamètre

apparent du Soleil, & par conſéquent je pouvois eſpérer de voir ce globe tout entier ſur le Soleil, quand cet aſtre viendroit à paſſer par-derrière. Ayant ſaiſi ce moment, je meſurai le diamètre horizontal du globe, que je trouvai égal à 165 parties de mon micromètre. Il eſt bon de faire remarquer que les bords de ce globe m'ont paru tranchés avec une ſi grande netteté, que j'ai pu m'aſſurer, à une partie de micromètre près, de la quantité que je rapporte, & s'il y a eu quelqu'erreur dans l'obſervation, j'oſe dire qu'elle a toute été en excès. Dans le cas préſent, le globe étoit vu tout entier ſur un corps très-lumineux; il falloit enſuite que je me trouvaſſe entre le Soleil & le globe, à peu-près ſur la même ligne, afin qu'il l'éclairât de mon côté, pour meſurer une ſeconde fois le même diamètre, ſans être obligé de changer ma diſtance de ce globe. Dans ce ſecond cas, le diamètre du globe ne m'a paru guère plus grand que 175 parties du même micromètre, ni plus petit que 173; d'où je conclus qu'il m'avoit paru de 9 à 10 parties plus petit lorſque je l'obſervai au-devant du Soleil, qu'à ſon oppoſite. Ces 9 à 10 parties répondent, dans mon micromètre, à près de 6 ſecondes de degré.

Ce ſeroit donc de cette quantité, ou à peu-près, dont ſeroient diminués les diamètres des corps opaques vus ſur un fond lumineux; mes premières expériences ſeroient cette quantité un peu plus grande. Il réſulte toujours de toutes ces expériences, que les corps opaques, vus ſur un fond lumineux, éprouvent à nos yeux une diminution réelle, lorſque nous meſurons leurs diamètres apparens avec quelqu'inſtrument, dans cette poſition, & que cette diminution eſt d'environ 5 à 6 ſecondes; ce que j'ai cru pouvoir être fort utile dans l'aſtronomie; j'invite, au ſurplus, les Aſtronomes à tenter de nouvelles expériences & obſervations ſur une matière auſſi intéreſſante.

MÉMOIRE

Sur le Froid observé à l'Observatoire royal & aux Chartreux, à la fin de 1783.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 20 Janvier 1784.

J'AVOIS deux thermomètres placés à côté l'un de l'autre, un à esprit-de-vin, que j'ai construit; & un à mercure, de M. Lavoisier, pareil à celui de M. Cassini, & qui ont été présentés à l'Académie par cet Académicien. Il est divisé en huitièmes, comme celui de M. de Cassini; & ayant été éprouvés dans les caves, ils ont marqué le même point.

Le 29, à 7 heures $\frac{1}{2}$ du matin, thermomètre à esprit de-vin . . . . — 9^d.

A 6 heures du soir . . . . — 10^d & $10\frac{1}{2}$.

Thermomètre de M. Lavoisier . . . . — $9\frac{1}{8}$.

A 3 heures après midi . . . . — $7^d\frac{1}{2}$ & 8.

Le 30, à 7 heures $\frac{1}{2}$ & à 8 heures, thermomètre à esprit-de-vin . . . . — $12\frac{1}{4}$.

Thermomètre de M. Lavoisier . . . . — $12\frac{6}{8}$.

A 2 heures après midi, thermomètre à esprit-de-vin . . — $9\frac{7}{8}$.

Termomètre de M. Lavoisier . . . . — $10\frac{1}{8}$.

A 5 heures après midi, thermomètre à esprit-de-vin . . . — 11.

Thermomètre de M. Lavoisier . . . . — $11\frac{3}{8}$.

A 9 heures du soir, thermomètre de M. Lavoisier . . . — 12.

Thermomètre de M. Lavoisier . . . . — $12\frac{2}{8}$.

Le 31, à 7 h $\frac{1}{2}$ du matin, thermomètre à esprit-de-vin . . — 11.

Thermomètre de M. Lavoisier . . . . — $11\frac{2}{8}$.

Mais il paroît que le plus grand froid est arrivé entre minuit & 5 heures du matin: en effet voici les observations de M. Cassini qui le confirment.

Son thermomètre étoit plus élevé que le mien de 7 à

8 pieds, étant placé extérieurement à l'embrasure de la fenêtre du cabinet, du quart-de-cercle mobile, plein nord.

Le 28 Décembre, à 8 heures du matin.......... — 3^d.
Le 29, à 8 heures du matin.................. — 7.
Le 30, à 7 heures $\frac{1}{2}$ du matin................ — 12 $\frac{7}{8}$.
A 9 heures du soir.......................... — 14 $\frac{5}{8}$.
A minuit $\frac{1}{4}$.............................. — 15 $\frac{2}{8}$.

Pendant la nuit du 30 au 31, le ciel se couvre, le froid diminue, & le dégel se prépare.

Le 31, à 8 heures du matin.................... — 10^d
A midi.................................... — 7 $\frac{1}{2}$.

Ces observations, du temps du plus grand froid, s'accordent avec ce que le P. Dom Germain a observé aux Chartreux de Paris, & qu'il a bien voulu me communiquer.

Le 20 Décembre, le thermomètre bien placé, vu à 7 heures & demie, 7^d au-dessous de zéro. Baromètre 28 pouces 3 lignes. Vent N. N. O.

Le 28 il a neigé toute la journée; il est tombé 7 ou 8 pouces de neige. Le Thermomètre est resté à 2 degrés au-dessous de zéro. Le Baromètre 27 pouces 4 lignes. Vent N. E.

Le temps s'est découvert pendant la nuit.

Le 29 le thermomètre, à 8 heures, étoit à 10^d au-dessous de zéro. Le baromètre 27 pouces 10 lignes. Vent N. O. A 2 heures après midi, 7^d sous zéro.

Le 30, à 8 heures, 13^d $\frac{1}{2}$ au-dessous de zéro. Le baromètre 27 pouces 9 lignes. Vent N. E. A 2 heures après midi, 11^d au-dessous de zéro.

Le 31, à 5 heures du matin, 15^d au-dessous de zéro. Le Baromètre 27 pouces 7 lignes. Le vent E. Sur les 6 heures du matin, le temps s'est couvert. A 2 heures après midi, 5^d sous zéro. Le temps s'est adouci, & le 1.er Janvier il a commencé à dégeler. A 2 heures après midi, 4^d degrés $\frac{1}{2}$ au-dessous de zéro. Vent de S. E.

REMARQUE
SUR
LES VENTS QUI RÈGNENT À PARIS ET DANS LES ENVIRONS.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 3 Mars 1784.

J'AI l'honneur d'annoncer à l'Académie que je lui demande à prendre date parmi les Mémoires qu'elle a destinés à l'impression, dans le volume de 1781, pour une conclusion que j'ai tirée d'après un très-grand nombre d'observations que j'ai faites, tant pendant mes voyages, que depuis mon retour; conclusion qu'on peut aussi entrevoir dans la dissertation du Docteur Halley, sur les vents généraux & alizés.

Cette conclusion, dis-je, est que, dans notre climat, à Paris & dans les environs, les vents généraux sont de la partie de l'Ouest, c'est-à-dire, qu'ils sont variables du Nord-ouest au Sud-ouest, selon les saisons; que ces vents soufflent ici perpétuellement, comme les vents généraux & alizés sont perpétuellement de la partie de l'Est entre les tropiques. Les autres vents variables que nous ressentons, étant, selon moi, des espèces de vents rampans sur la surface de la terre, n'empêchent point que les vents de Nord-ouest au Sud-ouest ne soient constans au-dessus d'eux, c'est-à-dire, à 1200 ou 1500 toises & même plus, au-dessus de la surface de la terre.

C'est

C'eſt de cette concluſion, comme d'un fait, que je demande à prendre date, à l'Académie, parmi ſes Mémoires pour l'année 1781.

J'ai l'honneur de prévenir encore l'Académie que je travaille actuellement à un Mémoire ſur le froid que nous avons reſſenti cet hiver à Paris, comparé avec les hivers de 1684, 1709, 1740 & 1776; que ce Mémoire eſt déjà fort avancé; & que j'y fais entrer l'influence de ces vents généraux dont je parle.

REMARQUES ET OBSERVATIONS SUR L'ASTRONOMIE DES INDIENS, & sur l'ancienneté de cette Astronomie.

Par M. LE GENTIL.

Lû le 13 Mars 1784.

J'AI déjà fait part à l'Académie, dans deux différens Mémoires, de ce que j'avois pu recueillir dans mon voyage à Pondichery, sur l'astronomie des Brames, & sur la conformité de cette astronomie avec celle des anciens Chaldéens : je vais l'entretenir aujourd'hui sur quelques nouvelles connoissances que j'ai acquises au sujet de cette astronomie.

La religion & l'astronomie sont tellement liées ensemble chez les Indiens, qu'il est évident qu'elles sont à peu-près de même date chez ces peuples : il y a même lieu de croire que l'astronomie a précédé la religion, telle qu'elle existe aujourd'hui ; en sorte que la religion, dans l'Inde, se peut dire en quelque sorte la fille de l'astronomie.

C'est sans doute une raison, indépendamment de celle du climat, c'est sans doute, dis-je, une raison pourquoi l'astronomie n'a fait aucuns progrès dans l'Inde, depuis son origine, ou depuis ses premiers inventeurs, que je suppose être des Indiens ; pourquoi les Indiens, de nos jours, n'observent point le ciel ; pourquoi enfin ils restent, à cet égard, dans une inaction si singulière à nos yeux. S'ils cultivent l'astronomie, ils n'y sont pas portés par les mêmes vues que nous, mais uniquement par des motifs de religion : ils montroient, à Pondichery, la plus grande indifférence pour mes instrumens d'astronomie, & pour les observations célestes que je faisois avec leur secours. Cette indifférence vient évidemment de ce qu'ils ne veulent pas emprunter la moindre chose des étrangers, & de ce

qu'ils se persuadent en savoir assez pour remplir le but unique qu'ils se sont de tout temps proposé en cultivant l'astronomie. En effet, cette science, toute imparfaite qu'elle peut être encore chez eux, leur a suffi, dans cet état d'imperfection, depuis plus de quatre mille ans, pour maintenir leur religion. Leurs tables du Soleil & de la Lune, qui ne paroissent pas avoir une date moins ancienne, sont encore passablement d'accord avec le ciel dans les conjonctions & les oppositions de la Lune, & en cela leur objet est rempli. Il est vrai que ces tables auroient certainement besoin de très-grandes corrections dans tout autre point de l'orbite lunaire, dans les quadratures, par exemple; mais que leur importent ces corrections? Il n'arrive point d'éclipses dans ces circonstances. Les quadratures ne sont donc nullement intéressantes pour eux. Le premier & le second quartier de la Lune n'ont de rapport à aucun article de leur religion. Or, il n'en est pas de même des éclipses qui ont, dans tous les temps, épouvanté les peuples foibles & ignorans. On sait que le peuple saisira toujours avec avidité les contes qu'on pourra lui faire sur ce phénomène; c'est ainsi que les Indiens ont de tout temps été bercés par les Brames, & endormis avec la fable, que les signes que l'on remarque quelquefois dans le Soleil & dans la Lune (car ils ne connoissent point les termes d'éclipses), proviennent d'un grand dragon ou serpent qui, dans ce moment, cherche à avaler le Soleil ou la Lune; & que ce n'est qu'avec les prières les plus ardentes & les plus ferventes, qu'ils parviendront à obtenir la délivrance de l'un ou de l'autre astre que le dragon cherche à dévorer: malheur qui, s'il arrivoit, leur ajoutent les Brames, entraîneroit pour jamais la privation de la lumière dans le monde entier.

Presque tous les termes astronomiques des éclipses sont tirés de cette fable, chez les Indiens: de-là les Brames ont imaginé le terme de *pat-ona-chandren*, qui veut dire *la Lune offensée par le dragon*, pour exprimer la distance

de la Lune à ſon nœud; c'eſt ce que nous appelons *l'argument de la latitude.*

Les Brames devoient donc annoncer aux peuples des phénomènes effrayans; ils devoient leur en marquer le jour & l'heure; leur prédire, pour ainſi dire, à point nommé, un évènement capable, par ſes ſuites, de les obliger d'avoir recours à la divinité, & ſur-tout aux Brames eux-mêmes, comme ſe diſant les interprètes de la divinité, & les médiateurs des peuples auprès d'elle. En conſéquence les Brames, pour s'attirer la vénération & le reſpect de ces peuples, & les tenir continuellement dans la crainte & dans la dépendance, ont eu un beſoin eſſentiel du calcul des éclipſes. Pour le faire, il leur a fallu étudier les mouvemens du Soleil & de la Lune. Nous ſommes donc redevables à la religion des Brames, de tous les fragmens d'aſtronomie que nous retrouvons épars chez les Indiens, fragmens qui ne ſont viſiblement que des reſtes ou des débris d'un dépôt conſidérable d'obſervations aſtronomiques, & de recherches qui ont péri, & qui avoient ſervi de baſe aux Indiens pour établir leurs élémens, & leur théorie des éclipſes.

Ils ont dans l'Inde, à ce qu'il m'a paru, deux différentes méthodes de calculer les éclipſes: tous les Indiens ſavans que j'ai vus & interrogés là-deſſus, à Pondichery, ſe ſont accordés en cela. L'une de ces méthodes ſe nomme, ſelon eux, *vaquiam,* qui veut dire *nouveau;* & l'autre *ſittandum,* c'eſt-à-dire, *ancien.*

La méthode que j'ai apportée avec moi, & que j'ai fait imprimer, eſt ſelon le *vaquiam:* je n'ai pu me procurer l'ancienne.

Huit à dix ans avant mon voyage, M. de l'Iſle, de cette Académie, avoit déjà eu connoiſſance de deux méthodes de calculer les éclipſes, ſelon les Indiens; l'une lui fut communiquée en 1750 par le P. Patoüillet; l'autre en

1754 par le P. Duchamp, Miſſionnaire. Ces deux méthodes, qui reviennent à peu-près au même, ſe trouvent au dépôt de la Marine; mais qu'elles ſont loin de réunir l'ordre, la méthode, & la clarté néceſſaires pour être facilement entendues! & j'ai eu ſouvent occaſion, en liſant & étudiant ces méthodes, de n'avoir pu les connoître avant mon départ. Cependant, à l'aide des connoiſſances que j'ai pu acquérir à Pondichery, ſur l'aſtronomie du pays, de la façon de procéder des Brames, d'envelopper & de cacher leurs opérations aſtronomiques, je ſuis parvenu a débrouiller pluſieurs élémens très-importans de la théorie du Soleil, de la Lune, & des éclipſes, & de les comparer à ceux qui me furent communiqués à Pondichery en 1768 & 1769.

J'ai fait voir, dans mon Aſtronomie Indienne, que les Brames de la côte de Coromandel avoient une époque qu'ils nommoient *caly-ougam*, & que cette époque remontoit trois mille cent deux ans avant Jéſus-Chriſt.

Dans la méthode communiquée par le Père Patouillet, à M. de l'Iſle, l'auteur ſemble, à la vérité, dater d'une autre époque que de *caly-ougam;* mais il déguiſe ſa marche, & s'il ne paroît partir que de la mort de Salivaganam, arrivée la onzième année de la période de ſoixante ans des Brames, l'an 78 de Jéſus-Chriſt, c'eſt un moyen de plus qu'il a employé de marcher à l'ombre de grands nombres qui maſquent & voilent ſon principal point de départ. En effet, malgré les détours qu'il emploie, ſans doute pour n'être point découvert, j'ai retrouvé l'époque *caly-ougam*, & la préceſſion des équinoxes qu'il fait de 54″, comme la ſuppoſent généralement tous les Brames.

Une choſe eſt très-curieuſe, ce ſont des tables du Soleil & de la Lune, que l'on trouve à la ſuite de cette méthode, mais elles n'appartiennent point à la méthode; elles en ſuppoſent encore une autre tout-à-fait différente, que nous n'avons point, & qui vraiſemblablement eſt perdue; car

il y a tout lieu de croire que le P. Patouillet en auroit eu communication ainſi que des tables. Au ſurplus, j'ai trouvé la clef de ces tables; je peux parler ainſi, car ces tables n'ont aucun titre; les chiffres n'y ont nulle valeur apparente: on ne diſtingue, au premier coup d'œil, qu'une multitude de nombres aſſez ſimples en apparence, rangés cependant avec une eſpèce d'ordre, mais que le Miſſionnaire, qui n'entendoit point la matière, n'a pu débrouiller ſans doute. Il a pris ces nombres tels qu'on les lui a donnés, avec les fautes (car il y en a), & nous les a tranſmis de même.

Ces tables ont une forme lapidaire, c'eſt-à-dire, que je conjecture que, dans le principe, elles furent gravées ſur des pierres d'où on les aura extraites. Je crois avoir quelques raiſons de le ſoupçonner, & même d'aſſez vraiſemblables; d'après les calculs que j'ai faits, leur époque paroîtroit environ mille ans plus ancienne encore que l'Ère *caly-ougam*, qui remonte déjà trois mille cent deux ans avant Jéſus-Chriſt. Ces tables auroient par cette raiſon précédé le déluge; mais ſi en effet elles avoient été gravées ſur des pierres, il n'y auroit rien d'étonnant qu'elles euſſent reſiſté, & échappé à l'inondation générale; & Josèphe ne ſemble-t-il pas favorable à cette opinion?

Ces tables, pour le Soleil, ſont compriſes ſous neuf carrés-longs, ou parallèlogrammes, renfermant chacune ſoixante-dix petites caſes. Dix de ces caſes ſont horizontales, ou de ſuite; & ſept ſont verticales.

Afin de conſerver l'authenticité de ces tables, je les préſente à l'Académie dans la forme qu'elles ont dans le manuſcrit: j'ai cru qu'il ſuffiſoit d'en expoſer ici le premier & le neuvième carré, qui donneront ſuffiſamment l'idée des ſept autres.

La première ſuite de chiffres du premier carré, celle qui eſt en tête, renferme les nombres naturels depuis 1 juſqu'à 10.

Pareillement la première ſuite du carré ſuivant renferme la ſuite des nombres naturels depuis 10 juſqu'à 20, & ainſi de ſuite dans les ſept autres carrés qui ſuivent; en ſorte que le neuvième carré renferme à ſa première ſuite les chiffres de la neuvième dixaine, ou depuis 80 juſqu'à 90 degrés.

Or, ayant ſuppoſé que ces nombres étoient une eſpèce de titre renfermant des degrés, j'en ai dès-lors conclu, avec la plus grande facilité, les autres nombres de chaque carré.

Cette première ſuite de chiffres n'étant donc évidemment autre choſe, ſelon moi, que des degrés qui repréſentent la diſtance du Soleil à ſon apogée & à ſon périgée en même temps; la ſeconde ſuite ſera l'équation du centre du Soleil, exprimée en minutes de degré, & la troiſième ſera les ſecondes de ces minutes.

La quatrième renfermera le mouvement journalier du Soleil, exprimé en minutes de degré, en partant de ſon périgée; & la cinquième marquera les ſecondes de ces minutes.

Ce mouvement, par cette raiſon, va en diminuant dans la table.

La ſixième ſuite de caſes renferme pareillement le mouvement journalier du Soleil, mais en partant de ſon apogée, en ſorte que ce mouvement-ci fait tout le contraire du premier, puiſqu'il va inſenſiblement en augmentant; enfin la ſeptième ſuite donne les ſecondes.

Ces deux mouvemens s'avancent donc, pour ainſi dire, en ſens contraire l'un de l'autre, pour ſe rencontrer & s'accorder enſemble à 90 degrés, où doit être la moyenne diſtance du Soleil à la Terre. Là, ils ſont de la même quantité; ils forment ce que nous appelons le moyen mouvement journalier, qui eſt, dans le Soleil, de 59′ 8″, ſelon ces tables.

On voit encore que l'auteur ſuppoſe l'équation du centre du Soleil, de 130′ 34″ (2^d 10′ 34″) à 90 degrés juſte de ſon périgée : c'eſt ce que nous appelons la plus grande équation du centre du Soleil, que Ptolémée faiſoit de 2^d 23′ 10″ ; mais les tables Indiennes ne la ſuppoſent, comme l'on voit, que de 2^d 10′ ½ : les Aſtronomes modernes ne trouvent que 1^d 56′. L'on en doit conclure que la détermination des Indiens approche beaucoup davantage de la nôtre, que ne fait celle de Ptolémée.

Les tables de la Lune ont la même forme que celles du Soleil : on y trouve le moyen mouvement journalier de la Lune, de 790′ 35″ (13^d 10′ 35″), & la plus grande équation de ſon centre, de 302′ 26″ (5^d 2′ 26″). M. Caſſini la ſuppoſe de 4^d 58′ 44″, & M. Halley de 4^d 57′ 46″.

Cette équation eſt la ſeule qui ait lieu dans les ſyzygies. C'eſt auſſi la ſeule qu'il importoit aux Brames de connoître dans leur ſyſtème d'appliquer l'aſtronomie au maintien de la religion.

On remarque dans la Lune une autre inégalité, dont on attribue la découverte à Ptolémée ; celle-ci peut encore aller juſqu'à 2^d ½. Elle eſt très-conſidérable, comme l'on voit ; mais comme elle ne ſe fait remarquer que dans les quadratures, les Brames qui ne font nulle attention à ces points de l'orbite lunaire, l'ont de tout temps ignorée, ils s'inquiètent même fort peu de ſon exiſtence ; ſi on leur en parle, ils ont l'air de ne pas ſeulement vous écouter.

A la ſuite de ces tables du Soleil & de la Lune, on en trouve une autre intitulée *(pour les Planètes)*, & qui ne renferme cependant que les diamètres du Soleil & de la Lune. Cette table eſt conſtruite avec un art tout-à-fait ingénieux, que ni les Hypparque, ni les Ptolémée, ni aucun aſtronome Grec de l'école d'Alexandrie, n'ont jamais connu ; mais il a fallu encore deviner cette table, car le titre que l'on voit qu'elle porte, n'en peut guère indiquer l'uſage. Elle m'a paru fondée ſur trois ſuppoſitions, dont

dont l'une eſt conforme aux obſervations modernes les plus préciſes.

La première de ces trois ſuppoſitions eſt que, dans tous les cas poſſibles, depuis 0^d juſqu'à 90^d, le demi-diamètre apparent de la Lune & celui du Soleil ajoutés enſemble, ſont égaux à un demi-degré, ou à $30'$. Cette ſuppoſition eſt à la vérité en défaut d'un peu plus d'une minute; mais il n'y a guère plus d'un ſiècle que nous ne connoiſſions pas en Europe la ſomme des demi-diamètres du Soleil & de la Lune, à une minute près.

La ſeconde ſuppoſition, qui ſuit de la nature de ces tables, eſt que le demi-diamètre du Soleil apogée eſt égal au demi-diamètre de la Lune dans ſes moyennes diſtances; cette ſuppoſition eſt confirmée par les obſervations de nos jours: en effet, ſelon M. Caſſini, ces diamètres ne diffèrent entr'eux, dans ces circonſtances, que de $4''$, & ſelon M. Halley, ils ne diffèrent point du tout.

Enfin la troiſième ſuppoſition eſt que le demi-diamètre apparent du Soleil, dans ſes moyennes diſtances, excède de $2'\ 30''$ celui de la Lune apogée, ſuppoſition qui n'eſt en excès que de $1'\ 5$ à $6''$.

D'après ces trois ſuppoſitions, l'auteur Indien a conſtruit ſa table dans la même forme que les précédentes. Les nombres naturels qui ſont en tête de chaque carré, depuis 1 juſqu'à 90^d, repréſentent donc, pour le Soleil, les degrés de ſon éloignement à ſon apogée; & pour la Lune, ce ſont les degrés de ſon éloignement à ſa moyenne diſtance à la Terre, en allant à ſon apogée: en conſéquence, la ſeconde ſuite de caſes renferme les demi-diamètres apparens du Soleil, depuis ſon apogée juſqu'à 90^d de diſtance; la troiſième ſuite donne les ſecondes.

La quatrième ſuite donne les demi-diamètres apparens de la Lune, depuis ſa moyenne diſtance juſqu'à ſon apogée; la cinquième renferme les ſecondes.

Il ſuit de-là, que les demi-diamètres du Soleil vont en croiſſant, dans cette table, & ceux de la Lune en diminuant,

& cela ſelon une proportion qui eſt telle qu'un demi-diamètre quelconque, pris à volonté dans cette table, celui du Soleil, par exemple, à quelque degré qu'il réponde, eſt toujours complétement à un demi-degré de celui de la Lune, & réciproquement.

Je n'ai plus qu'un mot à dire concernant la latitude de la Lune, dont la table termine tout ce qui appartient au Soleil & à la Lune. L'inclinaiſon de l'orbite de la Lune n'eſt, dans cette table, que de $4^d\ 30'$; c'eſt le ſeul élément de la théorie de la Lune, qui diffère de nos tables, d'une quantité même aſſez conſidérable, car cette inclinaiſon s'obſerve de 5 degrés au moins.

Cette différence d'un demi-degré ou 30 minutes, ſuffit pour faire trouver écliptique une pleine Lune qui pourroit cependant n'être pas éclipſée; mais dans ce cas même, la Lune n'éviteroit l'ombre de la Terre que d'une très-petite quantité; elle en effleureroit au moins la pénombre, & vraiſemblablement en apercevroit-on quelques veſtiges.

Nous ne ſavons pas comment les Brames ont déterminé l'inclinaiſon de l'orbite de la Lune: s'ils l'ont déduite des éclipſes, on ſait qu'à une ſi petite diſtance du nœud, une erreur de 4 à 5 ſecondes dans la latitude, en occaſionne une de 4 à 5 minutes, à 90 degrés du nœud, dans l'arc qui meſure l'inclinaiſon de l'orbite.

Il eſt beaucoup plus vraiſemblable de penſer qu'ils ont déterminé cette inclinaiſon, en comparant la Lune à des étoiles remarquables. Cette méthode qu'ils paroiſſent avoir ſuivie dans toutes les obſervations qu'ils ont faites originairement ſur la Lune, étoit infiniment plus ſûre que la première; pour qu'ils ſe trompaſſent en effet d'un demi-degré ſur l'inclinaiſon, il eût fallu qu'ils ſe fuſſent trompés dans leurs obſervations, d'une quantité égale au diamètre entier de la Lune, ce qui eſt impoſſible.

Enfin des Aſtronomes qui ont déterminé la plus grande équation du centre de la Lune, à deux ou trois minutes près de ce que nous trouvons aujourd'hui pour cette

équation, ne peuvent pas avoir commis une erreur de 30 minutes & même plus sur l'inclinaison de l'orbite lunaire. Il se peut très-bien, & je serois assez porté à le penser, que les Brames, en construisant leurs tables, aient diminué à dessein l'inclinaison de l'orbite lunaire; à moins que l'on n'aime mieux supposer encore que cette inclinaison a augmenté depuis la construction de ces tables, comme on admet une diminution dans l'obliquité de l'écliptique depuis deux à trois mille ans.

Un fait est certain, c'est que la même table qui donne ici la latitude de la Lune de degré en degré, l'inclinaison de son orbite de $4^d\ 30'$ seulement, donne également la déclinaison du Soleil pour les mêmes degrés, & l'obliquité de l'écliptique de 24 degrés juste, mais que nous n'observons cependant aujourd'hui que de $23^d\ 28'\ \frac{1}{4}$; en sorte que la somme de l'obliquité de l'écliptique & de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, est de $28^d\ 30'$ dans ces tables, & de 28^d 29 à $30'$ dans les nôtres; ce qui sembleroit indiquer que les Brames auroient bien observé; & que l'inclinaison de l'orbite de la Lune auroit augmenté d'un degré ou environ, depuis leurs premières observations & la construction de leurs tables.

Dans la supposition que les Brames auroient diminué à dessein l'inclinaison observée de l'orbite de la Lune, on en pourroit peut-être trouver la raison dans les motifs qui les engagent à prédire les éclipses, mais je réserve ces détails pour nos assemblées particulières.

TABLES INDIENNES des mouvemens du Soleil, de la Lune, & de leurs diamètres apparens ; de la latitude de la Lune, & de l'obliquité de l'Écliptique, dont il est question dans le Mémoire précédent.

Pour le Soleil.

Ravimanda,	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Padacani.	2.	4.	7.	9.	11.	13.	16.	18.	20.	23.
Danagatti.	20.	20.	0.	19.	38.	57.	15.	33.	51.	8.
Bougogatti.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
	26.	26.	26.	26.	25.	25.	24.	24.	24.	23.
	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.
	50.	50.	50.	50.	51.	51.	51.	52.	52.	53.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
25.	27.	29.	32.	34.	36.	38.	41.	43.	45.
24.	40.	55.	10.	24.	37.	49.	0.	11.	21.
61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
22.	22.	21.	21.	20.	29.	16.	17.	17.	16.
56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	56.	57.
54.	54.	55.	55.	56.	57.	58.	59.	59.	0.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
47.	49.	51.	53.	55.	57.	60.	62.	63.	65.
30.	38.	45.	51.	56.	59.	0.	0.	59.	57.
61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.	61.
15.	14.	13.	12.	10.	9.	7.	6.	5.	4.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
1.	2.	3.	4.	6.	7.	9.	10.	11.	12.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
67.	69.	71.	73.	75.	77.	79.	70.	72.	84.
53.	49.	43.	36.	27.	17.	6.	54.	40.	25.
61.	61.	61.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
3.	2.	0.	59.	57.	56.	55.	54.	52.	51.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
13.	14.	16.	17.	19.	20.	21.	22.	24.	25.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
86.	87.	89.	91.	92.	94.	95.	97.	98.	100.
8.	49.	28.	5.	40.	15.	50.	23.	53.	20.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
49.	45.	45.	44.	42.	41.	40.	38.	37.	35.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.
27.	29.	31.	32.	34.	35.	36.	38.	39.	41.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
101.	103.	104,	105.	107.	108.	109.	110.	112.	113.
45.	9.	32.	53.	11.	28.	43.	13.	7.	15.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.
34.	31.	30.	28.	26.	24.	22.	20.	18.	16.
57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	57.	58.
43.	45.	46.	48.	50.	52.	56.	57.	58.	0.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
114.	115.	116.	117.	118.	119.	120.	121.	121.	122.
21.	25.	28.	27.	27.	23.	17.	9.	59.	47.
60.	60.	60.	60.	60.	60.	60.	59.	59.	59.
13.	11.	9.	6.	6.	4.	1.	59.	57.	55.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.
3.	4.	7.	8.	10.	12.	15.	17.	21.	21.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
123.	124.	124.	125.	126.	126.	127.	127.	128.	128.
33.	14.	58.	36.	11.	44.	15.	44.	11.	36.
59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.
53.	51.	48.	45.	42.	40.	38.	36.	34.	32.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.	58.
23.	25.	28.	31.	34.	36.	38.	40.	42.	44.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
128.	129.	129.	129.	130.	130.	130.	130.	130.	130.
59.	19.	36.	51.	5.	15.	22.	21.	31.	34.
59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.	59.
30.	27.	24.	22.	20	17.	15.	12.	11.	8.
58.	58.	58.	58.	58.	58.	59.	59.	59.	59.
46.	49.	52.	54.	56.	59.	1.	4.	5.	8.

Pour la Lune.

Chandra.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Padácani.	5.	10.	16.	21.	26.	31.	37.	42.	47.	52.
	20.	40.	0.	19.	38.	35.	12.	28.	44.	59.
	860.	860.	860.	860.	859.	859.	859.	859.	859.	858.
	15.	15.	15.	11.	52.	43.	32.	21.	3.	51.
	720.	720.	720.	720.	721.	721.	721.	721.	722.	722.
	55.	55.	55.	59.	8.	27.	38.	49.	4.	19.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
58.	63.	68.	73.	79.	84.	89.	94.	99.	104.
13.	26.	38.	50.	9.	13.	23.	31.	37.	40.
858.	858.	857.	857.	857.	856.	856.	856.	855.	855.
36.	16.	58.	38.	22.	51.	30.	2.	48.	0.
722.	722.	722.	723.	723.	724.	724.	725.	725.	726.
35.	54.	5.	37.	48.	19.	40.	8.	21.	10.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
109.	114.	119.	124.	128.	133.	137.	142.	146.	151.
39.	35.	26.	12.	51.	26.	57.	28.	57.	37.
854.	854.	853.	853.	852.	851.	851.	850.	850.	849.
43.	7.	42.	9.	48.	50.	50.	58.	16.	58.
726.	727.	727.	728.	728.	729.	729.	730.	730.	730.
37.	8.	28.	1.	22.	20.	40.	10.	14.	12.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
156.	160.	165.	169.	173.	178.	182.	186.	190.	194.
5.	25.	0.	23.	45.	3.	15.	24.	30.	34.
849.	848.	847.	847.	846.	845.	845.	844.	844.	843.
10.	34.	58.	23.	39.	58.	23.	38.	3.	31.
732.	732.	733.	733.	734.	735.	735.	736.	737.	737.
0.	24.	12.	47.	31.	12.	47.	32.	7.	36.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
198.	202.	206.	210.	213.	227.	221.	224.	228.	231.
34.	30.	24.	16.	58.	36.	11.	45.	15.	44.
842.	842.	841.	840.	839.	839.	837.	836.	835.	834.
51.	58.	21.	35.	42.	0.	45.	40.	35.	31.
738.	739.	739.	740.	741.	742.	743.	748.	745.	746.
19.	12.	49.	35.	28.	10.	25.	30.	38.	39.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
235.	238.	241.	244.	247.	250.	253.	256.	259.	261.
6.	24.	37.	45.	45.	46.	41.	32.	27.	55.
833.	832.	831.	830.	829.	828.	821.	826.	824.	823.
35.	34.	31.	12.	33.	47.	1.	30.	48.	20.
747.	748.	749.	750.	751.	752.	753.	754.	756.	757.
35.	36.	39.	58.	31.	29.	3.	40.	21.	61.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
264.	267.	269.	271.	274.	276.	278.	280.	282.	284.
30.	3.	28.	49.	6.	18.	28.	34.	28.	20.
822.	822.	821.	890.	819.	818.	816.	815.	814.	813.
53.	53.	13.	13.	2.	13.	58.	45.	54.	41.
758.	758.	759.	759.	762.	762.	764.	765.	766.	767.
13.	50.	57.	57.	8.	57.	12.	15.	16.	39.

Azamayanamou.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
285.	287.	289.	290.	292.	293.	294.	295.	297.	298.
54.	35.	5.	39.	6.	28.	45.	57.	4.	6.
812.	811.	810.	809.	808.	806.	805.	804.	803.	802.
34.	25.	20.	5.	7.	43.	42.	31.	16.	9.
768.	769.	770.	772.	773.	774.	775.	776.	777.	779.
36.	45.	50.	5.	3.	37.	39.	39.	54.	1.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
299.	299.	300.	301.	301.	301.	301.	309.	309.	302.
0.	50.	37.	10.	25.	59.	52.	4.	15.	26.
800.	799.	798.	797.	796.	794.	793.	792.	791.	790.
56.	30.	21.	20.	11.	51.	38.	23.	13.	35.
780.	781.	782.	783.	784.	786.	787.	788.	789.	790.
14.	31.	49.	50.	59.	19.	33.	47.	57.	35.

Pour les Planètes.

Abazarda.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Padacani.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
Danam.	1.	2.	3.	4.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
Bouſſam.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
	59.	58.	57.	56.	54.	53.	52.	51.	50.	49.

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	21.	22.	23.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
47.	46.	45.	43.	43.	42.	41.	39.	38.	37.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
24.	25.	26.	27.	29.	30.	31.	32.	33.	34.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
36.	35.	34.	33.	31.	30.	28.	27.	27.	26.

31.	32,	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
36.	37.	38.	39.	40.	41.	42.	43.	44.	45.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
24.	23.	22.	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.	15.
46.	47.	48.	49.	50.	51.	52.	53.	54.	55.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.
14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	8.	6.	5.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
15.	15.	15.	15.	15.	15.	16.	16.	16.	16.
56.	57.	58.	58.	59.	0.	1.	2.	2.	3.
14.	14.	14.	14.	14.	14.	13.	13.	13.	13.
4.	3.	2.	2.	1.	0.	59.	58.	57.	57.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
4.	4.	5.	6.	7.	7.	8.	8.	9.	9.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
56.	56.	53.	54.	53.	53.	52.	52.	51.	51.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
10.	10.	11.	12.	12.	12.	12.	13.	13.	13.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
50.	50.	49.	48.	48.	48.	48.	47.	47.	47.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.	16.
13.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	14.	15.	15.
13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.	13.
47.	46.	46.	46.	46.	46.	46.	46.	45.	45.

Les Tables ſuivantes repréſentent la latitude de la Lune & l'obliquité de l'écliptique : la clé que j'ai trouvée pour ouvrir l'entrée aux Tables précédentes ſervira pour les ſuivantes.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	Cranticalam.
24.	48.	73.	197.	121.	145.	170.	194.	218.	242.	Chachivik.
23.	46.	8.	28.	44.	57.	10.	20.	23.	30.	Chebacalam.
4.	9.	14.	18.	23.	28.	37.	37.	42.	46.	
44.	28.	11.	53.	34.	13.	52.	30.	8.	46.	

11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
266.	290.	314.	338.	361.	385.	408.	432.	455.	478.
28.	25.	15.	1.	41.	17.	47.	10.	28.	38.
51.	55.	60.	65.	69.	74.	78.	83.	87.	62.
23.	59.	35.	10.	44.	15.	45.	17.	42.	8.

21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
501.	524.	547.	570.	592.	614.	636.	659.	680.	702.
41.	35.	22.	5.	27.	46.	58.	2.	50.	39.
96.	100.	105.	109.	113.	118.	122.	126.	130.	135.
30.	55.	18.	57.	52.	22.	26.	38.	53.	0.

31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
723.	745.	766.	787.	808.	828.	848.	868.	887.	908.
56.	33.	40.	31.	9.	33.	47.	45.	37.	7.
139.	143.	147.	150.	154.	158.	162.	166.	169.	173.
3.	5.	3.	58.	50.	40.	26.	9.	49.	25.

41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
927.	946.	965.	983.	1001.	1019.	1037.	1054.	1071.	1088.
21.	27.	13.	41.	52.	50.	29.	48.	47.	26.
176.	180.	183.	187.	190.	194.	197.	200.	203.	206.
58.	30.	53.	23.	44.	2.	17.	29.	36.	40.

51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
1104	1120.	1136.	1152.	1167.	1181.	1196.	1220.	1223.	1237.
50.	54.	40.	5.	10.	54.	16.	14.	44.	15.
209.	212.	215.	218.	221.	223.	226.	228.	231.	233.
39.	35.	29.	17.	0.	41.	18.	49.	18.	43.

61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
1250.	1262.	1274.	1286.	1297.	1308.	1319.	1329.	1338.	1348.
3.	31.	36.	20.	27.	30.	3.	9.	48.	7.
236.	238.	240.	242.	244.	246.	248.	250.	251.	253.
2.	18.	29.	35.	45.	27.	20.	7.	50.	29.

71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
1356.	1365.	1373.	1380.	1387.	1394.	1400.	1406.	1411.	1416.
55.	20.	20.	53.	55.	29.	49.	33.	52.	46.
255.	256.	257.	259.	260.	261.	262.	263.	264.	265.
5.	34.	58.	19.	36.	47.	54.	57.	51.	40.

81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.
1421.	1425.	1428.	1431.	1435.	1436.	1437.	1439.	1439.	1440.
8.	6.	36.	29.	5.	14.	55.	0.	41.	0.
266.	267.	267.	267.	268.	268.	269.	269.	269.	270.
22.	0.	23.	59.	47.	47.	8.	28.	46.	0.

SUPPLÉMENT

Où l'on fait voir que les Équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration, & que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées.

Par M. MONGE.

I.

ON sait que toutes les équations aux différences ordinaires à deux variables, appartiennent à des courbes réelles. En effet, pour le premier ordre, elles peuvent toutes, excepté une seule, être mises sous la forme $M dx + N dy = 0$; & par conséquent, étant pris un point à volonté, c'est-à-dire, étant données les valeurs de x & de y, on peut toujours trouver par cette équation l'inclinaison de la tangente à la courbe en ce point, ou, ce qui revient au même, trouver la direction du point décrivant, parce que cette direction est déterminée par le rapport de dy à dx, que donne cette équation. Pour le second ordre, toutes les équations à deux variables, excepté une seule, peuvent être mises sous la forme $L ddy + M ddx + N = 0$, L, M, N, renfermant les variables avec leurs différences premières. Ainsi, étant donné un point à volonté, & la direction de la tangente en ce point, ce qui détermine $x, y, \frac{dy}{dx}$; & faisant la valeur de ddx, une hypothèse arbitraire, ce dont on est le maître; il est toujours possible, au moyen de

l'équation différentielle, de trouver la valeur de ddy, & par conséquent, le changement de direction que le point décrivant éprouve dans cet endroit de la courbe, ou, ce qui revient au même, de trouver le rayon de courbure de la courbe. Il en est de même des ordres supérieurs.

Lorsque les équations différentielles du premier ordre renferment plus de deux variables, on peut les diviser en deux classes; les unes, comme les suivantes,

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$
$$z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

sont élevées par rapport aux différences, & elles sont toutes regardées comme absurdes; les autres peuvent être ramenées à la forme linéaire

$$Ldx + Mdy + Ndz \ldots = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens $L, M, N \ldots$ peuvent renfermer les variables sous des radicaux; & parmi ces dernières, celles qui ne satisfont pas à certaines conditions, sont encore regardées comme absurdes. Le nombre des conditions dont il s'agit ici, est toujours égal au nombre des variables, moins deux; par exemple, pour le cas de trois variables, si l'équation différentielle est mise sous la forme $dz = pdx + qdy$, l'équation de condition est $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, que l'on peut développer de la manière suivante:

$$L\left[\left(\frac{dM}{dz}\right) - \left(\frac{dN}{dy}\right)\right] + M\left[\left(\frac{dN}{dx}\right) - \left(\frac{dL}{dz}\right)\right] + N\left[\left(\frac{dL}{dy}\right) - \left(\frac{dM}{dx}\right)\right] = 0.$$

Pour le cas de quatre variables, si l'équation différentielle est mise sous la forme $dz = pdu + qdx + rdy$, les conditions sont

$$\left(\frac{ddp}{dxdy}\right) = \left(\frac{ddq}{dudy}\right),$$

$$\left(\frac{ddp}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{ddr}{du\,dx}\right),$$

& on peut les développer comme dans le cas précédent.

S'il y a cinq variables, & que l'équation différentielle ſoit ſous la forme $dz = pdv + qdu + rdx + sdy$, les trois conditions ſont

$$\left(\frac{d^3\,p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3\,q}{dv\,dx\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^3\,p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3\,r}{dv\,du\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^3\,p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3\,s}{dv\,du\,dx}\right);$$

& ainſi de ſuite, pour un plus grand nombre de variables.

Je me propoſe de faire voir qu'il n'y a aucune équation différentielle qui ſoit abſurde, ſi toutefois l'on entend par le mot qu'elle exprime, une propriété impoſſible, imaginaire,....... &c. Je ferai voir que toutes les équations différentielles expriment des propriétés réelles, ſoit qu'elles ſatisfaſſent ou non aux conditions que je viens de rapporter; je montrerai qu'elles ſont toutes ſuſceptibles d'une véritable intégration, & pour jeter ſur cette matière un plus grand jour, j'expoſerai ce que ſignifient, dans l'eſpace, celles qui ſont à trois variables.

I I.

De toutes les équations aux différences ordinaires du premier ordre, & à deux variables, il n'y en a qu'une ſeule qui ne ſoit pas linéaire, & cette équation eſt

$$M^2 dx^{2m} + N^2 dy^{2m} = 0,$$

M, N étant fonctions de x, y; or, cette équation ne peut rien exprimer de réel, à moins que l'on n'ait en même temps $M = 0$, $N = 0$, ou que l'on n'ait en même temps $dx = 0$, $dy = 0$. Le premier de ces deux réſultats ne peut pas être regardé comme une intégrale, parce

parce qu'il ne renferme pas de conſtante arbitraire; donc, la véritable intégrale de cette équation eſt le ſyſtème des deux équations ſimultanées $x = a, y = b$; c'eſt-à-dire, que l'équation dont il s'agit n'appartient pas à une ligne courbe, mais à un point unique quelconque, pris ſur le plan des x, y. Il y a donc cette différence entre les équations linéaires du premier ordre à deux variables, & la ſeule équation de cet ordre qui ſoit élevée, que les premières appartiennent toutes à des courbes, & que l'intégrale de chacune d'elles eſt une équation unique, complétée par une ſeule conſtante arbitraire; tandis que la dernière appartient à un point, & que ſon intégrale eſt le ſyſtème de deux équations finies ſimultanées, & complétées par deux arbitraires.

La propriété de l'équation aux différences ordinaires élevées, du premier ordre & à deux variables, avoit déjà été obſervée; mais comme cette équation eſt unique, on l'avoit regardée comme une exception à la règle générale, & l'on n'avoit pas remarqué que c'étoit le commencement d'une chaîne immenſe, à laquelle tenoient les plus grandes difficultés du calcul intégral. En effet, parmi les équations aux différences ordinaires à trois variables, celles qui ſatisfont à la condition que j'ai rapportée dans l'*article précédent*, & qui eſt connue ſous le nom de *condition d'intégrabilité*, appartiennent toutes à des ſurfaces courbes, & l'intégrale de chacune d'elles eſt une équation unique, complétée par une ſeule conſtante arbitraire; mais toutes les équations qui ne ſatisfont pas à cette condition, ſont en nombre infini, & elles n'appartiennent pas à des ſurfaces; leurs lieux ſont des courbes à double courbure, tracées dans l'eſpace, & l'intégrale de chacune d'elles eſt le ſyſtème de deux équations ſimultanées. Enfin, parmi ces équations, il n'y en a qu'une ſeule,

$$M^2 dx^{2m} + N^2 dy^{2m} + P^2 dz^{2m} = 0,$$

dont l'intégrale ſoit le ſyſtème de trois équations finies ſimultanées, $x = a, y = b, z = c$; elle n'appartient ni à une ſurface courbe, ni à une courbe à double courbure; ſon lieu eſt un point unique pris arbitrairement dans l'eſpace.

Pour les équations aux différences ordinaires du premier ordre, à quatre variables, l'intégrale de celles qui ſatisfont en même temps aux deux conditions que j'ai rapportées, eſt une ſeule équation complétée par une ſeule conſtante arbitraire; l'intégrale de celles qui ne ſatisfont qu'à une ſeule de ces deux conditions, eſt le ſyſtème de deux équations ſimultanées; l'intégrale de celles qui ne ſatisfont à aucune des deux conditions, eſt le ſyſtème de trois équations finies ſimultanées; enfin il n'y en a qu'une ſeule,

$$M^2 du^{2m} + N^2 dx^{2m} + P^2 dy^{2m} + Q^2 dz^{2m} = 0,$$

dont l'intégrale ſoit le ſyſtème de quatre équations ſimultanées, $u = a, x = b, y = c, z = e$. Il en eſt de même pour un plus grand nombre de variables.

Ainſi l'objet des équations connues ſous le nom de *conditions d'intégrabilité*, n'eſt pas, comme on l'a cru juſqu'ici, d'indiquer celles des équations différentielles dont les intégrales ſont poſſibles, mais de faire connoître le nombre des équations finies ſimultanées dont doivent être compoſées les intégrales qui ſont toujours poſſibles. Avant que d'aller plus loin, éclairciſſons ce qu'on vient de voir, par des exemples ſimples.

III.

EXEMPLE I. Soit propoſée l'équation

$$(A) \qquad dz^2 = a^2 (dx^2 + dy^2),$$

dans laquelle a eſt une conſtante donnée. Il eſt bien évident que cette équation appartient à la courbe à double courbure, dont les élémens ſont un angle conſtant avec le plan des x, y; ainſi les équations de toutes les droites

qui font le même angle avec le plan des x, y, doivent ſatisfaire à la propoſée, quelles que ſoient d'ailleurs les directions de ces droites; or ces équations ſont

$$(B) \qquad x = \alpha z + \beta,$$

$$(C) \qquad y = z\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \alpha^2\right)} + \gamma,$$

α, β, γ étant trois conſtantes arbitraires; donc le ſyſtème de ces deux équations priſes ſimultanément eſt une ſolution de la propoſée. En effet, ſi l'on différencie ces deux équations, les deux conſtantes arbitraires β, γ, s'évanouiront, & l'on aura

$$dx = \alpha dz,$$

$$dy = dz\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \alpha^2\right)};$$

& éliminant α entre ces deux dernières équations, on aura

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Quoique le ſyſtème des deux équations (A), (B), ſoit complété par trois conſtantes arbitraires, α, β, γ, on va voir qu'il n'eſt pas l'intégrale complète de l'équation (A), & que cette intégrale complète eſt encore plus générale.

Si l'on élimine entre (A) & (B) la conſtante α, l'équation réſultante

$$(x - \beta)^2 + (y - \gamma)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

ſera celle de toutes les ſurfaces coniques dont les ſommes ſeront dans le plan des x, y, & dont les côtés feront avec ce plan l'angle conſtant; ſi l'on fait $\gamma = \varphi\beta$, φ étant une fonction arbitraire, l'équation

$$(x - \beta)^2 + (y - \varphi\beta)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

appartiendra ſeulement à celles de ces ſurfaces coniques dont le ſommet ſera placé ſur une certaine courbe tracée dans le plan des x, y, l'équation de cette courbe étant

$y = \varphi x$; & ſi l'on conſidère deux de ces ſurfaces courbes conſécutives, elles ſe couperont en une droite dont on aura la ſeconde équation, en différenciant l'équation des cônes par rapport au paramètre variable ζ; ainſi les équations de cette droite ſeront

$$(D) \qquad (x - \zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

$$(E) \qquad x - \zeta + (y - \varphi\zeta)\varphi'\zeta = 0.$$

Cette droite formera encore avec le plan des x, y, l'angle conſtant, & elle ſera une de celles qui ſatisfont à l'équation *(A)*. Mais ſi l'on conſidère la ſuite des ſurfaces coniques, on aura une ſuite de droites comme la précédente, qui ne différeront de poſition qu'en vertu du paramètre variable ζ; & toutes ces droites ſe trouvant deux à deux conſécutivement ſur une même ſurface conique, elles ſe couperont néceſſairement deux à deux conſécutivement, & elles ſeront par conſéquent les tangentes d'une même courbe à double courbure: donc les tangentes de cette courbe à double courbure étant également inclinées au plan des x, y, les élémens de cette courbe feront, avec ce plan, des angles conſtans; donc enfin les équations de cette courbe ſeront l'intégrale complète de la propoſée.

Or il eſt évident que l'on aura les équations de la courbe à double courbure, en différenciant les deux équations *(D)*, *(E)*, par rapport au paramètre variable ζ; de plus, l'équation *(E)* eſt déjà la différentielle de *(D)* priſe de cette manière: donc l'intégrale complète de l'équation *(A)* eſt le ſyſtème des trois équations ſimultanées,

$$(D) \qquad (x - \zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

$$(E) \qquad x - \zeta + (y - \varphi\zeta)\varphi'\zeta = 0,$$

$$(F) \qquad -1 - (\varphi'\zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)\varphi''\zeta = 0,$$

dont les deux dernières ſont les différentielles première

& ſeconde de *(D)*, priſes en ne faiſant varier que l'indéterminée ζ, & dans leſquelles φ eſt une fonction arbitraire; c'eſt-à-dire, que cette intégrale eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée ζ entre les trois équations *(D)*, *(E)*, *(F)*.

Il eſt facile de vérifier cette intégrale par la différenciation : en effet, les différentielles des deux équations *(D)*, *(E)*, priſes par rapport à ζ, ayant lieu, il s'enſuit que l'on peut différencier ces deux équations, en regardant ζ comme conſtante, ce qui donnera

$$(d) \quad (x - \zeta)\,dx + (y - \varphi\zeta)\,dy = \frac{z\,dz}{a^2},$$

$$(e) \quad dx + dy\,\varphi'\zeta = 0;$$

& éliminant entre les quatre équations *(D)*, *(E)*, *(d)*, *(e)*, les trois indéterminées ζ, $\varphi\zeta$, $\varphi'\zeta$, on aura

$$(A) \quad dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Le filet d'une vis dont l'axe eſt perpendiculaire au plan des x, y, eſt un cas particulier de cet exemple; & le filet d'une vis tracée ſur une ſurface cylindrique à baſe quelconque, & perpendiculaire au plan des x, y, en eſt le cas général.

IV.

EXEMPLE II. Soit propoſée l'équation

$$(A) \quad z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

dans laquelle a eſt une conſtante donnée. Il eſt évident, à cauſe de la proportion

$$a : z :: \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

que ſi l'on conçoit un cercle dont le rayon ſoit a, dont le centre ſoit dans le plan des x, y, & dont le plan ſoit perpendiculaire à ce dernier, la propoſée appartient à toutes les courbes dont l'élément fait avec le plan des x, y, le même angle que l'élément du cercle pris à même hauteur, ou, ce qui revient au même, pris pour un z égal à celui

de la courbe; donc tous les cercles, dont le rayon eſt a, dont les plans ſont parallèles aux z, & dont les centres ſont placés dans le plan des x, y, doivent ſatisfaire à la propoſée : or les équations de ces cercles ſont

$$(B)\quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = a^2,$$
$$(C)\quad x - \alpha = \gamma\,(y - \beta),$$

α, β, γ étant trois conſtantes arbitraires; donc le ſyſtème de ces deux équations priſes ſimultanément, eſt une ſolution particulière de l'équation (A). En effet, ſi l'on différencie les deux (A), (B), on aura

$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy + z\,dz = 0,$$
$$dx = \gamma\,dy,$$

& ſi l'on élimine entre ces quatre équations les trois arbitraires α, β, γ, l'équation réſultante ſera la propoſée. Quoique le ſyſtème des deux équations (A), (B) ſoit complété par trois arbitraires, on verra cependant que l'intégrale complète de la propoſée eſt encore plus générale.

L'équation (B) appartient à une ſphère dont le rayon eſt a, & dont le centre eſt placé ſur le plan des x, y, en un point dont les coordonnées ſont α, β; ſi l'on fait $\beta = \varphi\alpha$, l'équation

$$(D)\quad (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2$$

appartiendra à toutes les ſphères de même rayon, dont les centres ſeront placés dans le plan des x, y, ſur une certaine courbe, l'équation de cette courbe étant $y = \varphi x$; ſi parmi ces ſphères on en conſidère deux conſécutives, elles ſe couperont ſuivant un cercle, dont on aura la ſeconde équation en différenciant l'équation de la ſphère par rapport au paramètre variable β; ainſi les équations de ce cercle ſeront

$$(D)\quad (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2$$
$$(E)\quad x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\,\varphi'\alpha = 0,$$

& ces équations satisferont encore à la proposée. Mais si l'on considère la suite des sphères, dont les centres sont placés sur la même courbe, on aura une suite de cercles comme le précédent, qui ne différeront qu'en vertu du paramètre variable $\mathfrak{C}$; tous ces cercles se trouvant deux à deux consécutivement sur une même sphère, ils pourront se couper deux à deux consécutivement, & la suite de leurs points d'intersection formera une courbe à double courbure touchée par tous les cercles: donc chaque élément de cette courbe à double courbure étant commun à un des cercles, cet élément fera, avec le plan des x, y, l'angle comporté par la proposée; donc les équations de cette courbe à double courbure seront l'intégrale complète de l'équation *(A)*.

Or il est évident que, pour avoir les équations de cette courbe à double courbure, il faut différencier les équations *(D)*, *(E)*, par rapport au paramètre variable α; de plus l'équation *(E)* est déjà la différentielle de *(D)* prise de cette manière: donc il suffira de différencier *(E)*; donc l'intégrale complète de la proposée sera le système des trois équations simultanées

$$(D)\ (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2,$$
$$(E)\ x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha = 0,$$
$$(F)\ -1 - (\varphi'\alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)\varphi''\alpha = 0;$$

dont les deux dernières sont les différentielles première & seconde de *(D)*, prise en regardant α comme seule variable, & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire; c'est-à-dire que l'intégrale complète est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations *(D)*, *(E)*, *(F)*; & que, dans chaque cas particulier, cette intégrale ne peut être exprimée que par le système de deux équations simultanées.

Pour vérifier ce résultat par la différenciation, il faut remarquer que les différentielles des deux équations *(D)*, *(E)*, prises par rapport à α, ont lieu, & qu'ainsi on peut

différencier les deux équations *(D)*, *(E)*, en regardant α comme conſtante : or ſi l'on exécute cette différenciation, on a les deux équations

$$(d)\ (x - \alpha)dx + (y - \varphi\alpha)dy + z dz = 0;$$
$$(e)\ dx + dy\varphi'\alpha = 0,$$

& ſi, entre les quatre équations *(D)*, *(E)*, *(d)*, *(e)*, on élimine les trois indéterminées α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$, on trouve

$$(A)\ z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

donc l'intégrale que l'on vient de trouver eſt exacte.

V.

EXEMPLE III. Soit propoſée l'équation

$$(A)\quad \left.\begin{matrix}(xdy - ydx)^2\\ (ydz - zdy)^2\\ (zdx - xdz)^2\end{matrix}\right\} = a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

dans laquelle a eſt une conſtante donnée. Si l'on met cette équation ſous la forme

$$d.\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)};$$

il ſera facile de reconnoître qu'elle appartient à toutes les courbes à double courbure dont les tangentes ſont en même-temps tangentes à une ſphère dont le rayon eſt a, & dont le centre eſt à l'origine ; donc les équations de toutes les tangentes à la ſphère ſeront une ſolution particulière de la propoſée : or les équations de ces tangentes ſont

$$(B)\ \alpha x + \beta y + z\sqrt{(a^2 - \alpha^2 - \beta^2)} = a^2;$$
$$(C)\ x - \alpha = \gamma(y - \beta),$$

α, β étant les coordonnées du point de contact, & γ déterminant la direction de la tangente ; donc ſi, dans ces équations

équations, on regarde comme arbitraires les trois quantités α, β, γ, on aura une ſolution particulière de la propoſée, ce dont il eſt facile de s'aſſurer par la différenciation.

Quoique les deux équations *(B)*, *(C)*, ſoient complétées par trois arbitraires, on va voir cependant qu'elles ne ſont pas encore l'intégrale complète de l'équation *(A)*.

L'équation *(B)* eſt celle du plan tangent à la ſphère pour un point de contact, dont les coordonnées, dans les ſens des x & y, ſont reſpectivement α, β: ſi l'on fait $\beta = \varphi\alpha$, on détermine le point de contact à être placé ſur une certaine courbe, dont la projection ſur le plan des x, y, a pour équation $y = \varphi x$; & l'équation du plan tangent devient

$$(D)\quad \alpha x + y\varphi\alpha + z\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]} = a^2.$$

Si l'on conſidère deux plans tangens conſécutifs, ces plans ſe couperont ſuivant une droite tangente à la ſphère, & on aura la ſeconde équation de cette droite, en différenciant celle du plan par rapport au paramètre variable α; ainſi les deux équations de cette droite ſeront

$$(D)\quad \alpha x + y\varphi\alpha + z\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]} = a^2,$$

$$(E)\quad x + y\varphi'\alpha - z\,\frac{\alpha + \varphi\alpha\,\varphi'\alpha}{\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]}} = 0;$$

& parce que la droite, à laquelle appartiennent ces deux équations, eſt tangente à la ſphère, il s'enſuit qu'elles ſatisfont à la propoſée. Mais ſi l'on conſidère la ſuite de tous les plans qui touchent la ſphère dans les points pris ſur la courbe, on aura une ſuite de droites comme la précédente, & ces droites priſes deux à deux conſécutivement ſe couperont, puiſqu'elles ſeront deux à deux dans un même plan tangent; donc elles ſeront les tangentes d'une même courbe à double courbure; & les équations de cette courbe à double courbure ſeront l'intégrale complète de la propoſée. Or il eſt évident que, pour

avoir les équations de cette courbe à double courbure, il faut différencier les équations *(D)*, *(E)*, de la droite, par rapport au paramètre variable α; de plus l'équation *(E)* étant déjà la différentielle de *(D)* prise de cette manière, il suffira de différencier *(E)*: donc en faisant, pour abréger,

$$a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2 = (\psi\alpha)^2,$$

l'intégrale complète de la proposée sera le système des quatre équations simultanées

$$\begin{array}{ll} (D) & \alpha x + y\varphi\alpha + z\psi\alpha = a^2, \\ (E) & x + y\varphi'\alpha + z\psi'\alpha = 0, \\ (F) & y\varphi''\alpha + z\psi''\alpha = 0, \\ & \alpha^2 + (\varphi\alpha)^2 + (\psi\alpha)^2 = a^2, \end{array}$$

dans lesquelles φ & ψ sont des fonctions arbitraires; de ces quatre équations la dernière est destinée à l'élimination actuelle de la fonction surabondante; & *(E)*, *(F)*, sont les différences première & seconde de *(D)*, prises en regardant α comme seule variable. L'élimination d'une des fonctions étant faite, l'intégrale sera le résultat de l'élimination de α entre les trois équations *(D)*, *(E)*, *(F)*.

Il est facile de vérifier ce résultat par la différenciation, comme ceux des deux exemples précédens.

Dans mon Mémoire sur les développées des courbes à double courbure *(Tome X des Savans étrangers)*, j'ai donné le nom d'*Arrête de rebroussement* à la courbe touchée par toutes les droites qui constituent une surface développable; d'après cela, l'équation dont il s'agit ici appartient à l'arrête de rebroussement d'une surface quelconque développable circonscrite à la sphère.

VI.

Les trois exemples que je viens de rapporter suffisent pour faire voir, 1.° que les équations aux différences ordi-

naires à trois variables élevées, & qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, ne sont pas absurdes, mais qu'elles expriment des propriétés réelles; 2.° que ces équations sont susceptibles d'une véritable intégration, & que leurs lieux sont des courbes à double courbure qui ne peuvent être exprimées que par le système de deux équations simultanées, les autres équations, quand leur nombre est plus grand que deux, étant destinées à éliminer des indéterminées, ou des fonctions surabondantes; 3.° que les intégrales de ces équations différentielles doivent être complétées par une fonction arbitraire, ce que les Géomètres ne s'étoient encore permis que pour les intégrales des équations aux différences partielles.

Ces considérations ouvrent un nouveau champ à l'analyse & à la géométrie, & elles donnent lieu à un calcul intégral qui mérite l'attention des Géomètres, car on verra dans la suite que l'intégration des équations aux différences partielles élevées, ne dépend que de ce genre de calcul.

Je vais exposer quelques résultats d'une assez grande généralité.

VII.

THÉORÈME I. L'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires à trois variables,

$$(A) \quad F\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

dans laquelle les variables elles-mêmes n'entrent pas, & où F est une fonction quelconque de deux quantités, algébrique ou transcendante, déterminée ou arbitraire, est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations suivantes,

$$(B) \quad F\left(\frac{x-\alpha}{z}, \frac{y-\varphi\alpha}{z}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(D) \quad \left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans lesquelles F est la même fonction de deux quantités que celle de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Pour le démontrer, il faut observer que les différentielles des deux équations *(B)*, *(C)*, par rapport à l'indéterminée α ont lieu, & que par conséquent on peut différencier ces équations en regardant α comme constante, ce qui, en faisant pour abréger

$$\frac{x-\alpha}{z} = m, \frac{y-\varphi\alpha}{z} = n,$$

donne

$$\left(\frac{dF}{dm}\right) dm + \left(\frac{dF}{dn}\right) dn = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[\left(\frac{ddF}{dm^2}\right) + \left(\frac{ddF}{dm\,dn}\right)\varphi'\alpha\right] dm \\ + \left[\left(\frac{ddF}{dm\,dn}\right) + \left(\frac{ddF}{dn^2}\right)\varphi'\alpha\right] dn \end{array}\right\} = 0;$$

or ces deux dernières équations ne peuvent pas subsister indépendamment de la valeur de la fonction F, à moins que l'on n'ait en même-temps les deux équations suivantes $dm = 0$, $dn = 0$, ou

$$\frac{x-\alpha}{z} = \frac{dx}{dz},$$
$$\frac{y-\varphi\alpha}{z} = \frac{dy}{dz};$$

donc éliminant α & $\varphi\alpha$ de l'équation *(B)*, au moyen des deux dernières, on aura la proposée

$$F\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

VIII.

L'ÉQUATION $dz^2 = a^2 (dx^2 + dy^2)$ de l'*article III*, est dans le cas du théorème précédent, car elle peut être mise sous la forme

$$a^2 \left(\frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2} \right) - 1 = 0;$$

aussi nous avons vu que son intégrale complète est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre l'équation suivante,

$$a^2 \left[\left(\frac{x - \alpha}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - \varphi\alpha}{z} \right)^2 \right] - 1 = 0,$$

& ses deux différentielles première & seconde, prises en regardant α comme seule variable.

IX.

THÉORÈME II. Les trois quantités X, Y, Z, étant composées chacune des trois variables x, y, z, l'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires du premier ordre,

$$F \left(\frac{dX}{dZ}, \frac{dY}{dZ} \right) = 0,$$

est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations suivantes,

$$F \left(\frac{X - \alpha}{Z}, \frac{Y - \varphi\alpha}{Z} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha} \right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2} \right) = 0,$$

dans lesquelles la fonction F est la même que celle de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Ce théorème se démontre comme le précédent.

X.

L'ÉQUATION

$$z^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2 (dx^2 + dy^2)$$

de l'*article IV*, est dans le cas du dernier théorème, car on peut le mettre sous la forme

$$\frac{z^2 dz^2}{a^2 - z^2} = dx^2 + dy^2,$$

ou ſous la ſuivante,

$$[d\sqrt{(a^2 - z^2)}]^2 = dx^2 + dy^2:$$

auſſi nous avons vu que ſon intégrale complète eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre l'équation

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2 - z^2} + \frac{(y - \varphi\alpha)^2}{a^2 - z^2} = 1;$$

& ſes différentielles, première & ſeconde, priſes en regardant α comme ſeule variable.

X I.

Il ſuit de tout ce qu'on vient de voir, que ſi l'on conçoit une ſurface courbe dont l'équation $M = 0$, outre les trois coordonnées x, y, z, renferme encore un paramètre variable α, & une fonction arbitraire de ce paramètre, repréſentée par $\varphi\alpha$; & que ſi l'on imagine toutes les ſurfaces courbes différentes que l'on obtiendroit en donnant ſucceſſivement à α toutes les valeurs poſſibles, & en ſuppoſant que la forme de la fonction φ ſoit invariable, deux quelconques de ces ſurfaces, priſes conſécutivement, ſe couperont en une courbe, dont les équations ſeront

$$(A) \qquad M = 0,$$

$$(B) \qquad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

la ſuite de ces courbes d'interſection compoſera une ſurface courbe qui ſera l'enveloppe de toutes les premières, & on aura l'équation finie de cette enveloppe, en x, y, z, en éliminant le paramètre variable α entre les deux équations *(A)*, *(B)*; mais cette élimination n'eſt pas poſſible en général, parce que la fonction φ eſt arbitraire.

De plus, ſi l'on conſidère les courbes d'interſection dont la ſuite compoſe l'enveloppe, deux quelconques de ces

courbes, prises consécutivement, se couperont en un certain point dont les coordonnées seront déterminées par les trois équations

$$(A) \qquad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

& la suite de ces points composera une courbe à double courbure, dont on auroit les deux équations finies, en éliminant le paramètre α entre les trois équations *(A)*, *(B)*, *(C)*. La courbe à double courbure dont il s'agit ici, non-seulement touche toutes les surfaces possibles comprises dans l'équation $M = 0$, mais encore chacun de ses élémens se trouve sur trois de ces surfaces prises consecutivement; enfin cette courbe est la limite de l'enveloppe.

Pour avoir l'équation différentielle de l'enveloppe, délivrée de la fonction arbitraire φ, il faut différencier l'équation *(A)*, & par rapport à x & par rapport à y, en regardant α & $\varphi\alpha$ comme constantes dans ces deux cas, ce qui est permis à cause de l'équation *(B)*; on aura donc alors les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0;$$

entre lesquelles, éliminant les deux quantités α & φa; on aura une équation aux différences partielles, $V = 0$, qui appartiendra à l'enveloppe, indépendamment de la forme de la fonction φ qui a disparu, c'est-à-dire, qui appartiendra à toutes les enveloppes que l'on auroit en donnant, dans $M = 0$, à la fonction φ, successivement toutes les formes possibles.

Quant à la limite, nous avons déjà vu que pour avoir

ſon équation il faut différencier aux différences ordinaires les deux équations *(A)*, *(B)*, en regardant α & $\varphi\alpha$ comme conſtantes, ce qui eſt permis en vertu des équations *(B)* *(C)*, & éliminer entre les quatre équations

$$(A) \qquad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$d(A) \qquad dM = 0,$$

$$d(B) \quad d.\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

les trois quantités α, $\varphi\,\alpha$, $\varphi'\alpha$, ce qui produit une équation $U = 0$ du premier ordre, aux différences ordinaires élevées à trois variables, & pour laquelle la condition d'intégrabilité n'eſt pas ſatisfaite.

XII.

ACTUELLEMENT les deux équations

$$V = 0,$$

$$U = 0$$

dont la première eſt aux différences partielles, & dont la ſeconde eſt aux différences ordinaires, ſont telles, que l'une quelconque étant donnée, il eſt toujours facile d'obtenir l'autre ſans connoître leurs équations intégrales.

1.° Étant donnée l'équation aux différences partielles, $V = 0$, ſi l'on ſubſtitue pour p ou pour q ſa valeur priſe dans $dz = pdx + qdy$ (ſuppoſons que ce ſoit la valeur de p que l'on ſubſtitue), on aura une équation $V' = 0$, composée des variables x, y, z, de leurs différences ordinaires dx, dy, dz, & de la quantité q; & le réſultat de l'élimination de la quantité q entre les deux équations

$$V' = 0,$$

$$\left(\frac{dV'}{dq}\right) = 0,$$

donnera l'équation aux différences ordinaires $U = 0$.

2.° Réciproquement, étant donnée $U = 0$, ſi l'on ſubſtitue

pour dz sa valeur $p\,dx + q\,dy$, on aura une équation $U' = 0$, composée des variables x, y, z, des différences partielles p, q, & de la quantité $\frac{dy}{dx}$. Je représente cette dernière quantité par ω; cela posé, le résultat de l'élimination de ω entre les deux équations

$$U' = 0,$$
$$\left(\frac{dU'}{d\omega}\right) = 0,$$

donnera l'équation aux différences partielles $V = 0$.

Par exemple, dans l'*article III*, l'équation $M = 0$ est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

& les deux équations $V = 0$, $U = 0$, sont

$$p^2 + q^2 = a^2,$$
$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

La première de ces deux équations étant posée, pour avoir la seconde, il faut substituer pour p sa valeur $\frac{dz - q\,dy}{dx}$, ce qui donne

$$q^2(dx^2 + dy^2) - 2q\,dy\,dz + dz^2 - a^2dx^2 = 0;$$

différencier cette dernière équation en regardant q comme seule variable, ce qui donne

$$q(dx^2 + dy^2) = dy\,dz,$$

en vertu de laquelle la précédente devient

$$q\,dy\,dz = dz^2 - a^2dx^2;$$

& éliminant q entre les deux dernières, on trouve l'équation aux différences ordinaires

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Réciproquement étant donnée l'équation

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$

pour trouver l'équation aux différences partielles, il faut

ſubſtituer pour dz ſa valeur $pdx + qdy$, ce qui, en faiſant $\frac{dy}{dx} = \omega$, donne

$$\omega^2 (q^2 - a^2) + 2\omega pq + p^2 - a^2 = 0;$$

différencier cette équation en regardant ω comme ſeule variable, ce qui donne

$$\omega (q^2 - a^2) + pq = 0,$$
$$\omega pq + p^2 - a^2 = 0;$$

& éliminant ω, on trouve l'équation aux différences partielles

$$p^2 + q^2 = a^2.$$

X I I I.

POUR démontrer en général la propoſition de l'*article précédent*, je ferai d'abord remarquer que le réſultat de l'élimination des deux quantités α, β, entre les trois équations

$$\varphi (\alpha, \beta) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi (\alpha, \beta)}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi (\alpha, \beta)}{d\beta}\right) = 0,$$

eſt le même que celui qu'on obtiendroit en éliminant d'abord α entre les deux équations

$$\varphi (\alpha, \beta) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi (\alpha, \beta)}{d\alpha}\right) = 0,$$

ce qui donneroit un premier réſultat $\psi \beta = 0$; puis en éliminant β entre les deux équations

$$\psi \beta = 0,$$
$$d\left(\frac{\psi \beta}{d\beta}\right) = 0.$$

Cela poſé, l'équation aux différences ordinaires $U = 0$, eſt le réſultat de l'élimination des quantités α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$ entre les quatre équations

$$M = 0,$$

$$dM = 0,$$

$$\frac{dM}{d\alpha} = 0;$$

$$\frac{ddM}{d\alpha^2} = 0;$$

ou bien ſi l'on repréſente par $k = 0$, le réſultat de l'élimination de $\varphi\alpha$, entre les deux premières, l'équation $U = 0$, eſt alors le réſultat de l'élimination de α, entre les deux équations

$$k = 0,$$

$$\left(\frac{dk}{d\alpha}\right) = 0.$$

Pareillement, l'équation aux différences partielles $V = 0$, eſt le réſultat de l'élimination des quantités α, $\varphi\alpha$, dz entre les quatre équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0,$$

$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

ou bien, en repréſentant $\frac{dy}{dx}$ par ω, on aura l'équation $V = 0$, en éliminant d'abord $\varphi\alpha$ & dz entre les équations

$$M = 0,$$

$$dM = 0,$$

$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

puis après avoir repréſenté le réſultat par $k' = 0$, en éliminant α & ω entre les ſuivantes,

$$k' = 0,$$

$$\left(\frac{d\,k'}{d\,\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dk'}{d\,\omega}\right) = 0;$$

& pour faire cette dernière opération, on peut, en vertu du lemme, éliminer d'abord α entre $k' = 0$, & $\left(\frac{dk'}{d\,\alpha}\right) = 0$, ce qui donnera un résultat $k'' = 0$, & éliminer ensuite ω entre $k'' = 0$, & $\left(\frac{d\,k''}{d\,\omega}\right) = 0$.

Or l'équation $k' = 0$ étant le résultat de l'élimination de dz entre $k' = 0$, & $dz = pdx + qdy$, le résultat de l'élimination de α entre $k' = 0$, & $\left(\frac{dk'}{d\,\alpha}\right) = 0$, sera le même que celui de l'élimination de dz entre

$$U = 0,$$

$$\& \ dz = pdx + qdy;$$

donc on aura l'équation $V = 0$, en éliminant d'abord dz entre ces deux dernières équations, ce qui donnera un résultat $k'' = 0$, & éliminant ensuite ω entre les deux suivantes

$$k'' = 0,$$

$$\left(\frac{dk''}{d\,\omega}\right) = 0;$$

ce qui est la première partie de la proposition.

Quant à la seconde partie, il faut observer que puisque l'équation $V = 0$, résulte des deux suivantes

$$U = 0,$$

$$dz = pdx + qdy,$$

réciproquement l'équation $U = 0$ doit résulter de ces deux-ci,

$$V = 0,$$

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

par l'élimination des deux quantités p, q: or l'élimination actuelle d'une de ces deux quantités étant faite, ce qui donne un résultat que je repréſente par $h = 0$, il ne reſte aucune équation pour éliminer l'autre de ces quantités; donc, ſi c'eſt q qui reſte, pour le faire diſparoître, il faut l'éliminer entre les deux équations

$$h = 0,$$

$$\left(\frac{dh}{dq}\right) = 0;$$

ce qui eſt la ſeconde partie de la propoſition.

X I V.

Nous avons vu *(XII)* que l'intégrale de l'équation aux différences partielles $V = 0$ eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux équations

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

& que celle de l'équation aux différences ordinaires élevées $U = 0$, eſt le réſultat de l'élimination de la même indéterminée α entre les trois ſuivantes,

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0:$$

il ſuit de-là, que des deux équations $V = 0$, $U = 0$, l'une quelconque étant propoſée, ſi l'on connoît l'intégrale de l'autre, ſous la forme que je viens de rapporter, on

connoîtra auſſi celle de la première; c'eſt-à-dire, que ſi l'on connoît l'intégrale de l'équation $U = o$, & que cette intégrale ſoit ſous la forme des trois équations (A), (B), (C), on aura celle de l'équation $V = o$, en ſupprimant l'équation (C). Réciproquement étant connue l'intégrale de l'équation $V = o$, ſous la forme des deux équations (A), (B), on aura celle de l'équation $U = o$, en combinant les deux équations (A), (B), avec la différentielle de (B) priſe en regardant l'indéterminée α comme ſeule variable.

Ainſi le calcul intégral des équations aux différences ordinaires élevées, & celui des équations aux différences partielles ſont abſolument dépendans l'un de l'autre; & de la perfection de l'une de ces eſpèces de calcul s'enſuivroit néceſſairement celle de l'autre.

X V.

TOUT ce qui précède ne préſenteroit qu'un cercle inutile, ſi les formes des équations que l'on fait intégrer ſe correſpondoient dans l'un & l'autre calcul; mais je vais faire voir, par deux exemples, que certaines équations aux différences ordinaires, compriſes dans les formes que j'ai traitées ci-deſſus, correſpondent à des équations aux différences partielles que l'on ne peut encore intégrer par aucune autre méthode, & réciproquement.

Exemple I. L'équation aux différences ordinaires

$$(U)\left\{\begin{array}{l}(x\,dy - y\,dx)^2 \\ +(y\,dz - z\,dy)^2 \\ +(z\,dx - x\,dz)^2\end{array}\right\} = a^2(dx^2 + dy + dz^2),$$

dont j'ai trouvé l'intégrale par des conſidérations géométriques, & qui appartient aux arrêtes de rebrouſſement de toutes les ſurfaces développables circonſcrites à la même ſphère, n'eſt compriſe dans aucune des formes générales dont j'ai donné les intégrales; mais ſi l'on ſubſtitue pour

dz sa valeur $p\,dx + q\,dy$, & qu'ensuite on élimine $\frac{dy}{dx}$ au moyen de la différentielle, prise en regardant $\frac{dy}{dx}$ comme seule variable, l'équation aux différences partielles que l'on obtiendra, sera

$$z - px - qy = a^2\sqrt{(1 + p^2 + q^2)},$$

qui appartient à toutes les surfaces développables circonscrites à la même sphère. Or cette équation est comprise dans celles que M. de la Grange a intégrées, & en faisant, pour abréger

$$z - \alpha x - \varphi\alpha . y - a^2\sqrt{[1 + \alpha^2 + (\varphi\alpha)^2]} = M,$$

son intégrale est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations suivantes:

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation aux différences ordinaires (U), est le résultat de l'élimination de la même indéterminée α entre les trois équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

Exemple II. Réciproquement l'équation aux différences partielles

$$(V)\quad \left\{\begin{array}{l} bx^2(z + px - qy)^2 \\ + aby^2(z - px + qy)^2 \\ + az(z + px + qy)^2 \end{array}\right\} = 0.$$

ne peut s'intégrer par aucune des méthodes connues; mais si l'on substitue pour p sa valeur prise dans $dz = pdx + qdy$, & qu'après avoir différencié en regardant q comme seule variable, on élimine q, on aura

$$(xdz + zdx)^2 + a(zdy + ydz)^2 + b(xdy + ydz)^2 = 0,$$

équation aux différences ordinaires élevées, comprise dans dans le cas du *théorème III*, & dont l'intégrale, en faisant, pour abréger,

$$\left(\frac{xz - \alpha}{xy}\right)^2 + a\left(\frac{yz - \varphi\alpha}{xy}\right)^2 + b = M,$$

est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation aux différences partielles *(V)*, est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux premières seulement de ces trois équations, c'est-à-dire, entre

$$M = 0$$
$$\& \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0.$$

XVI.

JUSQU'ICI il n'a été question, dans ce Mémoire, que des équations aux différences ordinaires élevées; mais les équations aux différences ordinaires linéaires à trois variables, & qui ne satisfont pas aux anciennes conditions d'intégrabilité, ne sont pas absurdes, elles appartiennent de même toutes à des courbes à double courbure, & elles sont toutes susceptibles d'une véritable intégration; enfin la

la recherche de leur intégrale ne dépend que de l'intégration d'une équation aux différences ordinaires à deux variables.

En effet, ſoit

$$(A) \qquad Ldx + Mdy + Ndz = 0,$$

une équation aux différences ordinaires, linéaire, & qui ne ſatisfaſſe pas à la condition d'intégrabilité; d'après ce ce qu'on vient de voir ſur les équations élevées, on mettra pour dz ſa valeur $pdx + qdy$, ce qui donnera

$$(L + Np)\,dx + (M + Nq)\,dy = 0;$$

puis, après avoir différencié cette équation, en ne faiſant varier que $\frac{dy}{dx}$, on éliminera $\frac{dy}{dx}$, ce qui ſe réduit à égaler à zéro les coéfficiens de dx & dy, & l'on aura les deux équations ſimultanées,

$$(B) \qquad L + Np = 0,$$

$$(C) \qquad N + Nq = 0.$$

Cela fait, on intégrera ou l'une ou l'autre de ces deux équations, en regardant comme conſtante la variable qui n'a pas varié dans la différence partielle ; par exemple, on intégrera la première,

$$Ldx + Ndz = 0,$$

en regardant y comme conſtante, & on complétera l'intégrale par une fonction arbitraire de y; enfin on ſubſtituera dans (C) pour q ſa valeur tirée de l'intégrale, ce qui produira une ſeconde équation ſans différentielles; & ces deux équations appartiendront à la courbe à double courbure, qui eſt le lieu de la propoſée.

XVII.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$(A) \qquad dz = xy\,(x\,dx + y\,dy).$$

Les deux équations aux différences partielles sont, pour ce cas,

$$(B) \qquad p = x^2 y,$$
$$(C) \qquad q = xy^2,$$

l'intégrale de la première est

$$z = \frac{x^3 y}{3} + \varphi y;$$

φ étant une fonction arbitraire; je la différencie en regardant y comme seule variable, ce qui donne

$$q = \frac{x^3}{3} + \varphi' y;$$

& substituant pour q cette valeur dans (C), je trouve

$$xy^2 = \frac{x^3}{3} - \varphi' y;$$

donc l'intégrale de la proposée est le système des deux équations simultanées,

$$z = \frac{x^3 y}{3} + \varphi y$$
$$xy^2 = \frac{x^3}{3} + \varphi' y.$$

Cette intégrale peut être mise sous une autre forme, car les deux équations (B), (C), peuvent être remplacées par les suivantes,

$$py - qx = 0,$$
$$p = x^2 y.$$

Or l'intégrale de la première est $z = \varphi\,(x^2 + y^2)$; &

pour que la feconde foit fatisfaite, il faut que l'on ait $xy = z\varphi'(x^2 + y^2)$; donc l'intégrale complète de la propofée eft encore le fyftème des deux équations fimultanées,

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$
$$xy = z\varphi'(x^2 + y^2),$$

ce qu'il eft facile de vérifier par la différenciation. Ainfi la propofée appartient à une courbe à double courbure tracée fur une furface quelconque de révolution, l'axe coïncidant avec la ligne des z; mais la projection de cette courbe fur le plan perpendiculaire à l'axe, dépend de la courbe génératrice, d'une manière énoncée par la feconde des deux équations intégrales.

XVIII.

Exemple II. Soit propofé d'intégrer

$$(A) \qquad dz = xy(dx - dy).$$

Les deux équations aux différences partielles deviennent

$$(B) \qquad p = xy,$$
$$(C) \qquad q = -xy;$$

l'intégrale de la première eft $z = \frac{x^2 y}{2} + \varphi y$, & pour que l'équation (C) foit fatisfaite, il faut que l'on ait

$$xy + \frac{x^2}{2} + \varphi' y = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation (A) eft le fyftème des deux équations fimultanées

$$z = \frac{x^2 y}{2} + \varphi y,$$
$$xy + \frac{x^2}{2} + \varphi' y = 0.$$

Autrement, les deux équations *(B)*, *(C)*, peuvent être remplacées par les deux ſuivantes,

$$p + q = 0,$$
$$p = xy.$$

L'intégrale de la première eſt

$$z = \varphi\,(x - y);$$

& pour que la ſeconde ſoit ſatisfaite, il faut que l'on ait

$$xy = \varphi'\,(x - y);$$

donc l'intégrale complète de la propoſée eſt encore le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$z = \varphi\,(x - y),$$
$$xy = \varphi'\,(x - y),$$

c'eſt-à-dire, que la propoſée *(A)* appartient à une courbe à double courbure, tracée ſur une ſurface cylindrique à baſe quelconque, les droites de la ſurface étant parallèles à la droite qui partage en deux parties égales l'angle formé par les axes des x & des y; mais la projection de la courbe ſur le plan des x, y, dépend de la baſe de la ſurface cylindrique, d'une manière exprimée par la ſeconde des deux équations intégrales.

XIX.

Si le nombre des variables étoit plus grand que trois, on ſe comporteroit d'une manière analogue, c'eſt-à-dire, qu'on ſubſtitueroit d'abord pour dz ſa valeur

$$p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots \&c.$$

& qu'enſuite, pour éliminer $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ ..... &c. on différencieroit le réſultat, en regardant chacune de ces

quantités comme ſeule variable, ce qui produiroit un nombre d'équations ſuffiſant pour l'élimination ; & alors on auroit des équations aux différences partielles, que l'on traiteroit comme celles des deux cas précédens.

Exemple III. Soit propoſé d'intégrer

$$u\,du + y\,dx + z\,dy + x\,dz = 0.$$

Je ſubſtitue pour dz ſa valeur, & je trouve

$$(u + px)\,du + (y + qx)\,dx + (z + rx)\,dy = 0;$$

je différencie, en regardant $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, chacune en particulier, comme ſeule variable, & j'élimine ces deux quantités; ce qui, dans le cas où toutes les différences ſont linéaires, ſe réduit à égaler à zéro les coéfficiens de du, dx, dy, & j'obtiens les trois équations aux différences partielles,

$$u + px = 0,$$
$$y + qx = 0,$$
$$z + rx = 0.$$

L'intégrale de la première eſt

$$xz + u^2 = \varphi(x, y),$$

φ étant une fonction de deux quantités; & pour que les deux autres équations ſoient ſatisfaites, il faut que l'on ait

$$y + \varphi'(x, y) = 0,$$
$$z + \varphi''(x, y) = 0,$$

φ' & φ'' étant les coéfficiens de dx & dy, dans la différentielle de la fonction φ; donc, l'intégrale complète de la propoſée eſt le ſyſtème des trois équations ſimultanées

$$xz + u^2 = \varphi(x, y),$$
$$y = \varphi'(x, y),$$
$$z = \varphi''(x, y).$$

XX.

Le nombre des équations intégrales n'eſt pas toujours, comme dans le cas précédent, égal au nombre des variables diminué d'une unité.

Exemple IV. Soit propoſée l'équation

$$(A) \qquad udu + xdx + xdy + zdz = 0.$$

On voit d'abord qu'on peut la réduire à trois termes, ſous la forme ſuivante:

$$udu + x(dx + dy) + zdz = 0,$$

dont l'intégrale eſt évidemment le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$u^2 + z^2 + \varphi(x + y) = 0,$$

$$2x - \varphi'(x + y) = 0.$$

Ainſi toutes les fois que la propoſée ſera ſuſceptible d'être réduite à trois termes, ſon intégrale ne contiendra pas plus de deux équations; mais dans tous les cas où elle ſera ſuſceptible de cette forme, il ne ſera pas toujours auſſi facile que dans cet exemple ſimple, de l'y ramener; alors, en opérant comme dans l'*article XX*, le calcul indiquera la réduction des équations. En effet, ſi dans la propoſée on met pour dz ſa valeur $pdu + qdx + rdy$, on aura les trois équations aux différences partielles,

$$u + pz = 0,$$

$$x + qz = 0,$$

$$x + rz = 0;$$

l'intégrale de la première eſt

$$(E) \qquad z^2 + u^2 = \varphi(x, y),$$

φ étant ſuppoſée une fonction de deux quantités; & pour que les deux autres ſoient ſatisfaites, il faut que l'on ait

$$(F) \qquad -2x = \varphi'(x, y),$$

$$(G) \qquad -2x = \varphi''(x, y),$$

φ' & φ'' étant les coëfficiens de dx & dy dans la différentielle de $\varphi(x, y)$.

Mais les deux équations *(F)*, *(G)*, étant entre les deux mêmes variables x & y, il s'enſuit que la fonction φ, qui étoit regardée comme compoſée de deux quantités, n'eſt compoſée que d'une ſeule; car ſi l'on fait

$$\varphi(x, y) = z^{\text{I}}, \ \& \ dz^{\text{I}} = p^{\text{I}}dx + q^{\text{I}}dy,$$

les équations *(F)*, *(G)*, deviennent

$$(F^{\text{I}}) \quad -2x = p^{\text{I}},$$

$$(G^{\text{I}}) \quad -2x = q^{\text{I}},$$

ce qui donne $p^{\text{I}} - q^{\text{I}} = 0$, & par conſéquent

$$z^{\text{I}} = \psi(x + y),$$

ψ étant une fonction arbitraire de la ſeule quantité $x + y$; donc l'équation *(E)* deviendra

$$z^2 + u^2 = \psi(x + y),$$

& une des deux équations (F^{I}) ou (G^{I}) ſera employée: & pour que l'autre ſoit ſatisfaite, il faudra que l'on ait

$$-2x = \psi'(x + y);$$

donc l'intégrale de la propoſée *(A)* eſt le ſyſtème des deux dernières équations priſes ſimultanément, comme on l'avoit trouvée d'abord.

Conclusion.

Les équations aux différences ordinaires, ſoit élevées, ſoit linéaires, qui ne ſatisfont pas aux conditions d'intégrabilité, ne renferment rien d'abſurde, ſi l'on entend par-là qu'elles expriment des propriétés impoſſibles, imaginaires . . . . ; elles énoncent toutes des propriétés réelles, & elles ſont ſuſceptibles d'une véritable intégration en quantités finies. Ce qu'il y avoit d'abſurde, c'étoit que leurs intégrales puſſent être exprimées par une ſeule équation ; par exemple, pour le cas de trois variables, il étoit abſurde que l'équation appartînt à une ſurface courbe, ce que l'on ſuppoſoit tacitement; dans ce cas

elle appartient à une courbe à double courbure, qui peut être déterminée par une ſeule équation différentielle, mais qui ne peut être exprimée en quantités finies, que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées.

Des Équations aux différences ordinaires élevées du ſecond ordre, & pour un nombre de variables plus grand que deux.

X X I.

DANS le Mémoire que j'ai donné ſur les développées des courbes à double courbure, imprimé parmi ceux des Savans étrangers, *tome X,* j'ai fait voir, 1.° que, quoique chaque courbe eût un nombre infini de développées, elle n'avoit cependant, pour chacun de ſes points, qu'un ſeul rayon de courbure; 2.° que lorſque la courbe étoit à double courbure, la ſuite des centres de courbure formoit une ligne courbe qui n'étoit pas une des développées; 3.° que x, y, z, étant les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe, l'expreſſion du carré du rayon de courbure pour ce point, en ne faiſant nulle aucune différence ſeconde, étoit

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 : \left\{\begin{array}{l} (dxddy - dyddx)^2, \\ + (dzddx - dxddz)^2, \\ + (dyddz - dzddy)^2. \end{array}\right.$$

Si donc on vouloit avoir l'équation différentielle de toutes les courbes à double courbure, dont le rayon de courbure eſt conſtant, il faudroit égaler l'expreſſion précédente à une conſtante a, ce qui donneroit

$$(A)\ (dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 = a^2 \left\{\begin{array}{l} (dxddy - dyddx)^2, \\ + (dzddx - dxddz)^2, \\ + (dyddz - dzddy)^2; \end{array}\right.$$

équation élevée, du genre de celles que l'on regarde ordinairement comme abſurdes, & qui cependant exprime une

une propriété réelle, & qui est susceptible d'une véritable intégration, même en quantités finies.

XXII.

D'ABORD il est évident que tous les cercles dont le rayon est a, quelles que soient d'ailleurs leurs positions dans l'espace, doivent satisfaire à cette équation; or les équations d'un cercle placé d'une manière quelconque dans l'espace, sont

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = a^2,$$
$$x - \alpha + (y - \beta)\varepsilon + (z - \gamma)\eta = 0,$$

α, β, γ, étant les coordonnées du centre, & ε, η, déterminant les deux directions du plan du cercle; donc, si dans ces deux équations on regarde les cinq quantités α, β, γ, ε, η, comme des constantes arbitraires, elles satisferont à l'équation aux différences ordinaires du second ordre *(A)*; ce qu'il est facile de vérifier par la différenciation; car si l'on différencie aux différences ordinaires, premières & secondes, chacune de ces équations, on aura en tout six équations, entre lesquelles éliminant les cinq constantes arbitraires, on trouvera l'équation *(A)*. Mais quoique les équations au cercle contiennent cinq arbitraires, elles ne sont encore qu'un cas particulier de l'intégrale complète; car les angles que les élémens consécutifs de la circonférence du cercle font entr'eux, sont égaux & dans un même plan, & l'on peut concevoir une courbe telle que ces angles, sans cesser d'être égaux, soient dans des plans perpétuellement différens: les équations de cette courbe satisferoient à l'équation *(A)*, puisque son rayon de courbure seroit constant; & elles ne seroient pas comprises dans celle du cercle, puisque la courbe seroit à double courbure.

Les trois coordonnées rectangulaires de la courbe que l'on considère étant x, y, z, soient α, β, γ, les coordonnées respectives du centre de courbure qui correspond

à ce point; de plus soient $\beta = \varphi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$, les équations de la courbe qui passe par tous les centres de courbure, φ & ψ, étant deux fonctions de α. Cela posé, la longueur du rayon de courbure devant être égale à une constante a, on aura d'abord

$$(B)\ (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + (z - \psi\alpha)^2 = a.$$

Puis, dans toute courbe à double courbure, les distances d'un même centre quelconque de courbure aux trois points consécutifs de la courbe, dont il est le centre, sont toujours égales entr'elles; donc la distance du point de la courbe au centre de courbure correspondant ne change pas, lorsqu'on fait varier deux fois de suite l'ordonnée α; donc les différences première & seconde de l'équation (B), prises en regardant α comme seule variable, doivent avoir lieu; donc on aura encore

$$(C)\ x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'\alpha = 0,$$

$$(D)\left\{\begin{array}{c} -1 - (\varphi'\alpha)^2 - (\psi'\alpha)^2 \\ + (y - \varphi\alpha)\varphi''\alpha + (z - \psi\alpha)\psi''\alpha \end{array}\right\} = 0.$$

La considération qui vient de fournir les dernières équations est générale, & elle appartient à toutes les courbes à double courbure; mais la courbe dont il s'agit, a cela de particulier, que son rayon de courbure étant constant, la distance du même centre de courbure à quatre points consécutifs de la courbe est toujours la même; donc la distance du point de la courbe au centre de courbure ne change pas encore, lorsqu'on fait varier une troisième fois l'ordonnée; donc la différence troisième de l'équation (B), prise en regardant α comme seule variable, doit encore avoir lieu; donc on aura la quatrième équation

$$(E)\left\{\begin{array}{c} - 3\varphi'\alpha\varphi''\alpha - 3\psi'\alpha\psi''\alpha \\ + (y - \varphi\alpha)\varphi'''\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'''\alpha \end{array}\right\} = 0.$$

Ainſi, en repréſentant l'équation *(B)* par $M = 0$, le ſyſtème des quatre équations ſimultanées,

$$(B) \quad M = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(D) \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

$$(E) \quad \left(\frac{d^3M}{d\alpha^3}\right) = 0,$$

appartient à la courbe dont le rayon de courbure eſt conſtant & $= a$, & il exprime la même choſe que l'équation aux différences ſecondes ordinaires *(A)*.

Les quatre équations que je viens de trouver ſeroient l'intégrale finie de l'équation *(A)*, ſi leur nombre n'excédoit pas celui des variables x, y, z; mais, entre ces quatre équations, on peut éliminer x, y, z, & il reſte entre α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, une équation de condition qui doit être ſatisfaite, pour que les trois équations employées à l'élimination ſoient l'intégrale demandée.

Il réſulte au moins de-là que les fonctions φ & ψ ne doivent pas être toutes deux arbitraires; & que l'une des deux étant priſe à volonté, la forme de l'autre s'enſuit, pour que la courbe dont les équations ſont $\beta = \varphi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$, paſſe par les centres de courbure d'une courbe dont la courbure eſt conſtante. De plus, ſi l'on élimine les coordonnées x, y, z, l'équation réſultante eſt en α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, préciſément la même que l'équation *(A)* en x, y, z, ce qui tient à une propriété remarquable des courbes de courbure conſtante, & que nous expoſerons bientôt.

XXIII.

QUOIQUE les quatre équations *(B)*, *(C)*, *(D)*, *(E)*, ne préſentent qu'un réſultat différentiel, leur conſidération

conduit cependant à l'intégrale première de l'équation *(A)*. En effet ſi, de ces quatre équations, on différencie les deux premières, en regardant α comme conſtante, ce qui eſt permis en vertu de la ſeconde & de la troiſième; & qu'entre les quatre équations *(B)*, *(C)*, $d(B)$, $d(C)$, on élimine les fonctions φ, φ', on aura les deux équations

$$(b) \quad (x-\alpha)^2(dy^2+dx^2)+2(x-\alpha)(z-\psi\alpha)dxdz + (z-\psi\alpha)^2(dy^2+dz^2)=a^2dy^2,$$

$$(c) \quad (x-\alpha)(dy^2+dx^2)+[(x-\alpha)\psi'\alpha+(z-\psi\alpha)]dxdz + (z-\psi\alpha)\psi'\alpha(dy^2+dz^2)=0.$$

Puis, après avoir pris dans l'équation $d.(B)$, la valeur de $\varphi'\alpha$, qui eſt $\varphi'\alpha = -\frac{\psi'\alpha dz + dx}{dy}$, ſi on la différencie en regardant α comme conſtante, ce qui eſt encore permis, en vertu de l'équation *(E)*, on trouvera

$$\varphi''\alpha = -\frac{dz}{dy}\psi''\alpha.$$

Enfin ſubſtituant cette valeur de $\varphi''\alpha$ dans *(D)*, on aura la troiſième équation

$$(d) \quad -(dx^2+dy^2)-(dy^2+dz^2)(\psi'\alpha)^2-2dxdz\psi'\alpha + (x-\alpha)\psi''\alpha dxdz+(z-\psi\alpha)\psi''\alpha(dy^2+dz^2)=0;$$

les trois équations *(b)*, *(c)*, *(d)*, ſont le réſultat de l'élimination de la fonction φ & de ſes différences entre les quatre équations *(B)*, *(C)*, *(D)*, *(E)*, & celles de leurs différentielles que l'on a pu prendre en regardant α comme conſtante.

Or, ſi l'on repréſente l'équation *(b)* par $N=0$, les équations *(c)*, *(d)* ſeront $\left(\frac{dN}{d\alpha}\right)=0$, $\left(\frac{ddN}{d\alpha^2}\right)=0$, ce quil eſt facile de reconnoître à l'inſpection; donc une des intégrales, première & complète de l'équation *(A)*

aux différences ordinaires ſecondes, eſt le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$(b) \qquad N = 0,$$

$$(c) \qquad \left(\frac{dN}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(d) \qquad \left(\frac{ddN}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

Il eſt facile de vérifier ce réſultat par la différenciation, car ſi l'on différencie aux différences ordinaires les deux premières de ces équations, en regardant α comme conſtante, ce qui eſt permis en vertu de la ſeconde & de la troiſième ; & qu'entre les quatre équations *(b)*, *(c)*, *d (b)*, *d (c)*, on élimine les trois quantités α, $\psi\alpha$, $\psi'\alpha$, le réſultat de l'élimination ſera l'équation *(A)* de l'*article XXII.*

XXIV.

Si, au lieu d'éliminer la fonction φ & ſes différentielles φ', φ'' entre les équations *(B)*, *(C)*, *d (B)*, *d (C)*, on eût éliminé la fonction ψ & ſes différentielles ψ', ψ'', on auroit trouvé, en faiſant, pour abréger,

$$(x - \alpha)^2 (dz^2 + dx^2) + 2(x - \alpha)(y - \varphi\alpha)\,dx\,dy \\ + (y - \varphi\alpha)^2 (dy^2 + dz^2) - a^2 dz^2 = N^1,$$

que l'autre intégrale première & complète de l'équation *(A)* eſt le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$(b') \qquad N^1 = 0,$$

$$(c') \qquad \left(\frac{dN^1}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(d') \qquad \left(\frac{ddN^1}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

intégrale qui eſt complétée par la fonction arbitraire φ,

comme l'autre l'étoit par la fonction ψ, & qu'on peut vérifier de même par la différenciation.

X X V.

ACTUELLEMENT que nous avons les deux intégrales premières & complètes de l'équation *(A)*, il est facile de trouver son intégrale finie. Pour cela il faut observer que, s'il étoit possible d'éliminer α entre les trois équations de la première intégrale, ce qui produiroit deux équations sans α, & ensuite d'éliminer encore α entre les trois équations de la seconde intégrale, ce qui produiroit deux autres équations sans α; on auroit alors quatre équations sans α, qui contiendroient les quantités différentielles $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, & les deux fonctions arbitraires φ, ψ; & en éliminant entre ces quatre équations les deux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, les deux équations résultantes seroient l'intégrale finie de l'équation *(A)*. Mais, quoique les éliminations dont il s'agit ici ne puissent pas se faire en général, on peut néanmoins les indiquer; d'ailleurs il est nécessaire de remarquer que α devant être éliminé d'abord entre les trois équations *(b)*, *(c)*, *(d)*, prises en particulier, & ensuite entre les trois autres *(b')*, *(c')*, *(d')*, prises de même en particulier, avant de combiner ces six équations, il faut accentuer α dans un des systèmes, par exemple, dans le second. D'après cela, en faisant, pour abréger,

$$(x - \alpha)(dy^2 + dx^2) + 2(x - \alpha)(z - \psi\alpha)\, dx dz$$
$$+ (z - \psi\alpha)^2 (dy^2 + dz^2) - a^2 dy^2 = N,$$
$$(x - \alpha')(dz^2 + dx^2) + 2(x - \alpha')(y - \varphi\alpha')\, dx dy$$
$$+ (y - \varphi\alpha')^2 (dy^2 + dz^2) - a^2 dz^2 = L,$$

l'intégrale finie & complète de l'équation *(A)* est le résultat

de l'élimination des quatre quantités α, α^1, $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, entre les six équations suivantes,

$$L = 0, \qquad N = 0,$$
$$\left(\frac{dL}{d\alpha'}\right) = 0, \qquad \left(\frac{dN}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddL}{d\alpha'^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{ddN}{d\alpha^2}\right) = 0:$$

& parce que les deux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, ne ſont pas ſous les fonctions arbitraires, l'élimination actuelle de ces quantités eſt poſſible. Cette élimination étant faite, il reſtera quatre équations ſans différentielles, & l'intégrale finie de l'équation *(A)* ſera le réſultat de l'élimination des deux indéterminées α, α^1 entre ces quatre équations, que je ne rapporte pas, parce qu'elles ſont d'un trop grand développement.

On opérera d'une manière analogue pour avoir l'intégrale finie d'une équation aux différences ordinaires d'un ordre quelconque, toutes les fois qu'on aura toutes ſes intégrales premières complètes.

On voit donc, non-ſeulement que l'équation *(A)* aux différences ſecondes ordinaires, qui ne ſatisfait pas aux conditions d'intégrabilité, n'eſt pas abſurde, & qu'elle exprime une propriété réelle, puiſqu'elle appartient à toutes les courbes à double courbure, dont le rayon de courbure eſt conſtant & $= a$; mais encore que cette équation eſt ſuſceptible de deux véritables intégrations aux différences premières & d'une intégration en quantités finies; enfin que ſes deux intégrales premières ſont complétées chacune par une fonction arbitraire particulière, & que ſon intégrale finie eſt complétée par ces deux fonctions.

XXVI.

AVANT que de quitter cet exemple, je rapporterai quelques propriétés de la courbe qui en eſt l'objet, moins

parce qu'elles sont très-remarquables, que pour donner une idée des résultats auxquels peut conduire la considération des équations aux différences ordinaires élevées.

1.° Nous avons vu, *article XXIII*, qu'en faisant, pour abréger,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + (z - \psi\alpha)^2 - a^2 = M,$$

le système des quatre équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^3M}{d\alpha^3}\right) = 0,$$

appartient à la courbe dont la courbure est constante; mais que ce système n'est pas une intégrale, parce qu'en éliminant entre ces quatre équations, les trois coordonnées x, y, z, on arrive à une équation de condition qui est entre α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, la même que l'équation aux différences ordinaires secondes, en x, y, z. Il résulte de-là que la courbe dont les coordonnées sont α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, est aussi de courbure constante; & parce que les quatre équations expriment que quatre points consécutifs de la seconde courbe sont à égales distances du même point correspondant de la première, il s'ensuit que le rayon de courbure de la seconde courbe est le même, de grandeur & de position, que celui de la première.

Donc, *lorsque la courbure d'une courbe est constante, cette courbe, & celle qui passe par ses centres de courbure, sont réciproques, c'est-à-dire, que ces deux courbes sont réciproquement, l'une, la ligne des centres de courbure de l'autre.*

On

On pourroit arriver à ce résultat par une autre considération, car j'ai fait voir dans le Mémoire sur les développées *(Savans étrangers, tome X)*, que les équations d'une courbe à double courbure étant $y = \varphi x$, $z = \psi x$, & α, β, γ, étant les coordonnées de la courbe qui passe par ses centres, pour avoir en α, β, γ, les équations de cette dernière, il falloit, en faisant, pour abréger,

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - \varphi x)^2 + (\gamma - \psi x)^2 - a^2 = M,$$

éliminer x entre les trois équations

$$\left(\frac{d\,M}{d\,x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,x^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^3\,M}{d\,x^3}\right) = 0;$$

donc, si le rayon de courbure de la première courbe est constant, & $= a$, il faut de plus, que l'on ait $M = 0$. Ainsi, une courbe de courbure constante étant donnée, les équations de la ligne de ses centres satisfont aux quatre équations

$$M = 0; \qquad \left(\frac{d\,M}{d\,x}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,x'^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d^3\,M}{d\,x^3}\right) = 0.$$

Mais nous avons vu, *article XXIII*, que la ligne des centres étant donnée, les équations de la courbe de courbure constante satisfaisoient aux quatre équations

$$M = 0, \qquad \left(\frac{d\,M}{d\,\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,\alpha^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d^3\,M}{d\,\alpha^3}\right) = 0.$$

De plus, les x, y, z entrent dans M, de la même manière que les α, β, γ; donc, la courbe de courbure

conſtante, & celle qui paſſe par ſes centres de courbure, ſe déduiſent l'une de l'autre de la même manière, & ſont par conſéquent réciproques, comme je l'ai énoncé plus haut.

2.° L'élément de la courbe qui paſſe par les centres de courbure d'une autre courbe, eſt toujours dirigé dans le plan normal à la ſeconde, car deux centres de courbure conſécutifs ſont toujours ſur le même plan normal; mais lorſque la courbure d'une courbe eſt conſtante, l'élément de ſa ligne des centres eſt de plus perpendiculaire au rayon de courbure commun; donc les tangentes correſpondantes des deux courbes ſont toujours à la même diſtance, & dirigées dans des plans rectangulaires.

Donc, *lorſque la courbure d'une courbe eſt conſtante, cette courbe & celle qui paſſe par ſes centres de courbure, ſont par-tout à la même diſtance l'une de l'autre; elles s'entrelacent perpétuellement, en ſe préſentant toujours leurs concavités, à peu-près comme les torons d'une corde à deux brins, & leurs tangentes aux extrémités du rayon de courbure commun ſont dans des plans rectangulaires.*

Le filet d'une vis à baſe circulaire, eſt évidemment une courbe à courbure conſtante, & ſes équations ſatisfont à l'équation *(A)*. La ligne des centres de cette courbe eſt le filet d'une autre vis de même pas & de même axe, mais tracée ſur un cylindre d'un diamètre plus ou moins grand que celui de la première, ſuivant que l'inclinaiſon conſtante de la tangente de la première eſt plus ou moins grande que 45 degrés; & le diamètre du cylindre de la ſeconde courbe eſt tel que, pour le même pas, l'inclinaiſon des tangentes des deux courbes ſont complément l'une de l'autre.

Enfin, tout le monde connoît les vis à deux filets équidiſtans; on les emploie fréquemment dans les arts, & principalement dans les balanciers des monnoies: lorſque les tangentes de ces filets font des angles de 45 degrés avec le plan de la baſe du cylindre, ces deux courbes ſont réciproquement l'une la ligne des centres de courbure de l'autre,

XXVII.

THÉORÈME I. La différence dx de la variable principale étant constante, si l'on a une équation aux différences secondes ordinaires à trois variables

$$(A)\quad F\left(\frac{ddy}{dx^2},\ \frac{ddz}{dx^2}\right) = 0,$$

dans laquelle il n'entre que les différences secondes & la différence première constante dx; l'intégrale première de cette équation sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations suivantes,

$$(B)\quad F\left(\frac{dy - \alpha dx}{x dx},\ \frac{dz - \varphi\alpha . dx}{x dx}\right) = 0,$$

$$(C)\qquad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(D)\qquad \left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans lesquelles la fonction F est la même que celle de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Pour le démontrer, soit fait, pour abréger,

$$\frac{dy - \alpha dx}{x dx} = u,\ \frac{dz - \varphi\alpha dx}{x dx} = v,$$

les deux premières équations intégrales (B), (C), deviendront

$$(B')\quad F(u, v) = 0,$$

$$(C')\quad \left(\frac{dF}{du}\right) + \left(\frac{dF}{dv}\right)\varphi'\alpha = 0;$$

si l'on différencie ces deux dernières équations, en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu des deux équations (C), (D), les différentielles seront toutes deux de la forme

$$M du + N dv = 0;$$

elles ne pourront pas ſubſiſter ſimultanément, & indépendamment de la forme de la fonction F, à moins que l'on n'ait en même-temps $du = 0$, $dv = 0$; ou, développant les valeurs de du & dv, à moins que l'on n'ait

$$\frac{dy - \alpha dx}{x dx} = \frac{ddy}{dx^2},$$

$$\frac{dz - \varphi\alpha dx}{x dx} = \frac{ddz}{dx^2};$$

or ſi l'on élimine de l'équation (E) les quantités α, $\varphi\alpha$, au moyen des deux dernières équations, on aura la propoſée (A); donc, &c.

XXVIII.

THÉORÈME II. La différence dx de la variable principale étant toujours regardée comme conſtante, & les quantités Y, Z étant compoſées l'une & l'autre, d'une manière quelconque, des trois variables x, y, z, & de leurs différences premières; ſi l'on a une équation aux différences ordinaires ſecondes

$$F\left(\frac{dY}{dx^2}, \frac{dZ}{dx^2}\right) = 0,$$

dans laquelle il n'entre que les différences des quantités x, Y, Z, l'intégrale première de cette équation ſera le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$F\left(\frac{Y - \alpha dx}{x dx}, \frac{Z - \varphi\alpha . dx}{x dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans leſquelles F eſt la fonction de la propoſée, & où φ eſt une fonction arbitraire.

Ce théorème eſt une ſuite du précédent.

XXIX.

THÉORÈME III. Quel que soit le nombre des variables $u, x, y, z \ldots$, parmi lesquelles u est la variable principale, dont la différence première du est regardée comme constante; de plus, les trois quantités X, Y, Z, étant composées d'une manière quelconque de toutes les variables & de leurs différences premières; si l'on a une équation aux différences ordinaires secondes

$$F\left(\frac{dY}{dX}, \frac{dZ}{dX}\right) = 0,$$

qui ne renferme que les différences des quantités X, Y, Z, une des intégrales premières de cette équation sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$F\left(\frac{Y - \alpha du}{X}, \frac{Z - \varphi \alpha du}{X}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

XXX.

THÉORÈME IV. Quel que soit le nombre des variables parmi lesquelles u est la variable principale, dont la différence première du est regardée comme constante; de plus, les trois quantités U, V, W, étant composées d'une manière quelconque de toutes les variables; si l'on a l'équation aux différences ordinaires secondes

$$F\left(\frac{ddU}{ddW}, \frac{ddV}{ddW}\right) = 0,$$

outre l'intégrale première déduite du théorème précédent, cette équation en aura encore une autre, qui sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α' entre les trois équations suivantes

$$F\left[\frac{udU - (U - \alpha')du}{udW - Wdu}, \frac{udV - (V - \varphi\alpha')du}{udW - Wdu}\right] = 0;$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha'}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha'^2}\right) = 0.$$

Ces deux derniers théorèmes ſe démontrent comme le premier.

CONCLUSION.

On voit donc, 1.° que les équations aux différences ordinaires ſecondes, qui ne ſatisfont pas aux anciennes conditions d'intégrabilité, & par une analogie évidente celles des ordres ſupérieurs, n'énoncent rien d'abſurde; qu'elles ſont ſuſceptibles d'une véritable intégration, & que leurs intégrales ſont complétées par des fonctions arbitraires; 2.° que celles de ces équations qui ne renferment que trois variables, appartiennent à des courbes à double courbure, dont elles expriment la génération; & c'eſt lorſque cette génération ne dépend pas ſeulement de quelques points donnés à volonté, mais de courbes priſes arbitrairement, que les intégrales de ces équations différentielles ſont complétées par des fonctions arbitraires.

Des Équations aux différences partielles du premier ordre.

XXXI.

On a déjà vu qu'étant propoſée une équation aux différences partielles du premier ordre, & à trois variables, repréſentée par $V = 0$, ſi l'on ſubſtitue dans cette équation pour p ou q, pour p, par exemple, ſa valeur priſe dans l'équation $dz = pdx + qdy$, & qu'on élimine q du résultat, au moyen de ſa différentielle priſe en regardant q comme ſeule variable, on aura une équation aux différences ordinaires $U = 0$, qui en général ſera élevée. On a vu pareillement que ſi l'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires eſt le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

M étant trouvée par intégration, & contenant une fonction arbitraire de α, l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles $V = 0$, est le résultat de l'élimination de α entre les deux premiéres de ces équations intégrales; en sorte que de la perfection du calcul intégral des équations aux différences ordinaires, s'ensuivroit celle du calcul des équations aux différences partielles.

Ce que j'ai dit dans le Mémoire précédent sur l'intégration des équations aux différences partielles linéaires, est un cas particulier de la méthode que je viens de proposer, car l'équation linéaire est toujours de la forme

$$Lp + Mq + N = 0.$$

Si l'on élimine p, au moyen de l'équation $dz = pdx + qdy$, on a $$Ldz + Ndx + q\,(Mdx - Ldy) = 0;$$
& si l'on différencie cette dernière équation, en regardant q comme seule variable, on a

$$Mdx - Ldy = 0,$$

& par conséquent

$$Ldz + Ndx = 0,$$

qui sont les deux équations que j'ai données, & que M. de la Grange avoit publiées auparavant.

XXXII.

Les intégrales de toutes les équations aux différences partielles, même du premier ordre & à trois variables, ne sont pas susceptibles d'être mises sous la forme précédente, parce que cette forme suppose tacitement que l'équation

appartient à une ſurface courbe; & il y a un nombre infini d'équations aux différences partielles qui appartiennent à des courbes à double courbure, & dont l'intégrale ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, entre leſquelles il n'y a rien à éliminer, ou par le ſyſtème de trois équations, entre leſquelles il faut éliminer une indéterminée, comme je vais le faire voir dans l'exemple ſuivant.

Soit propoſé d'intégrer l'équation

$$p - Ay = \varphi(q + Ax),$$

dans laquelle A eſt une conſtante, & où φ eſt une fonction arbitraire.

Ce que cette équation a de remarquable, c'eſt que ſi l'on fait $A = 0$, elle devient $p = \varphi q$, qui appartient à toutes les ſurfaces développables, & dont l'intégrale eſt connue; tandis que ſi on laiſſe ſubſiſter A, elle n'appartient plus à une ſurface courbe, mais à une courbe à double courbure.

En effet, ſoit fait, pour abréger,

$$q + Ax = \alpha,$$

ce qui donnera

$$p - Ay = \varphi\alpha.$$

Il eſt clair que la quantité α eſt une indéterminée ſur la valeur de laquelle rien ne doit être prononcé, & qui eſt deſtinée à diſparoître par élimination. Si l'on ſubſtitue pour p & q les valeurs précédentes dans $dz = pdx + qdy$, on aura

$$dz = dx\varphi\alpha + \alpha dy - A(xdy - ydx).$$

Actuellement, ſi cette équation aux différences ordinaires étoit intégrable en regardant α comme conſtant, & ſi ſon intégrale complétée par une fonction arbitraire de α étoit $M = 0$, il eſt évident, par les principes de ce genre de calcul, que l'intégrale complète de la propoſée ſeroit

feroit le réfultat de l'élimination de α entre les deux équations $M = 0$, $\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$; mais l'équation aux différences ordinaires ne fatisfait pas aux conditions d'intégrabilité, elle appartient à une courbe à double courbure, qui ne peut être exprimée en quantités finies, que par le fyftème de deux équations, & d'après l'*article XVI*, fi la quantité α étoit une conftante abfolue, ces deux équations feroient

$$z = x\varphi\alpha + \alpha y + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\psi'\left(\frac{y}{x}\right) = -Ax^2.$$

De plus, α n'eft pas une conftante abfolue, elle doit feulement être regardée comme conftante dans l'intégration précédente, c'eft-à-dire, que cette intégration eft prife en regardant comme conftantes les deux quantités $\frac{y}{x}$ & α; donc la fonction ψ qui complète l'intégrale doit être compofée de ces deux quantités; donc l'intégrale complète de la propofée eft le réfultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$(A) \quad z = x\varphi\alpha + \alpha y + \psi\left(\frac{y}{x}, \alpha\right)$$

$$(B) \quad x\varphi'\alpha + y + \psi''\left(\frac{y}{x}, \alpha\right)$$

$$(C) \quad \psi'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right) = -Ax^2,$$

dont la feconde eft la différentielle de la première, prife en regardant α comme feule variable, & dans lefquelles ψ eft une fonction arbitraire de deux quantités, ψ' & ψ'' étant les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$. Le réfultat de cette élimination comporte deux équations qui font celles de la courbe à double

courbure, à laquelle appartient l'équation aux différences partielles.

Parmi les équations aux différences partielles, il y en a donc qui appartiennent à des courbes à double courbure; leur intégrale finie ne peut être exprimée que par le système de deux équations entre lesquelles il n'y a rien à éliminer, & cette intégrale est complétée par une fonction arbitraire de deux quantités, ce que les Géomètres ne s'étoient encore permis que pour les intégrales des équations à quatre variables.

Comme la conclusion précédente est extraordinaire, je vais la vérifier de plusieurs manières.

1.° Si, dans l'intégrale, on fait $A = 0$, l'équation *(C)* donne $\psi' = 0$, ce qui indique que la quantité $\frac{y}{x}$ n'entre pas dans la fonction ψ; ainsi cette intégrale se réduit aux deux équations

$$z = x\phi\,\alpha + \alpha y + \psi\,\alpha$$
$$x\phi'\alpha + y + \psi'\alpha = 0,$$

qui sont l'intégrale connue de l'équation $p = \phi\,q$, que l'on obtient en faisant de même dans la proposée $A = 0$.

2.° Si l'on différencie l'équation *(A)* en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu de *(B)*, on trouve

$$p = \phi\,\alpha - \frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right),$$

$$q = \alpha + \frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right):$$

si l'on substitue pour ψ', sa valeur, prise dans *(C)*, on a

$$p = \phi\,\alpha + Ay,$$
$$q = \alpha - Ax;$$

& enfin, éliminant α, on obtient

$$p - Ay = \phi\,(q + Ax),$$

qui est la proposée.

3.° Si l'on prend des cas particuliers, c'eſt-à-dire, ſi l'on donne aux fonctions φ, ψ, des formes déterminées, & qu'on élimine α entre les trois équations *(A)*, *(B)*, *(C)*, on aura deux équations qui, par la différenciation, ſatiſferont à la propoſée.

XXXIII.

En opérant d'une manière analogue, on trouve qu'étant propoſée l'équation aux différences partielles à quatre variables u, x, y, z,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) + Aux = \varphi\left[\left(\frac{dz}{du}\right) - Axy, \left(\frac{dz}{dx}\right) - Auy\right],$$

dans laquelle A eſt une conſtante abſolue, & φ une fonction arbitraire de deux quantités; ſon intégrale complète eſt le réſultat de l'élimination des deux indéterminées α, β, entre les quatre équations ſuivantes,

$$z = \alpha u + \beta x + y\varphi(\alpha, \beta) + \psi\left(\frac{ux}{y}, \alpha, \beta\right),$$
$$u + y\varphi'(\alpha, \beta) + \psi'' = 0,$$
$$x + y\varphi''(\alpha, \beta) + \psi''' = 0,$$
$$\psi' = Ay^2,$$

dont la deuxième & la troiſième ſont les différentielles de la première, priſes en regardant α pour l'une, & β pour l'autre, comme ſeule variable; dans leſquelles ψ eſt une fonction arbitraire de trois quantités; où φ' & φ'' ſont les deux coéfficiens de la différence de φ; & où ψ', ψ'', ψ''', ſont les coéfficiens de la différence de ψ.

Le calcul intégral des équations aux différences ordinaires, & celui des équations aux différences partielles, dépendant réciproquement l'un de l'autre, tous les pas que l'on fait dans la ſeconde de ces deux eſpèces de calculs, ſont utiles à la première; ainſi, je vais rapporter quelques théorèmes, qui ne ſont pas compris dans ceux de M. de la Grange.

XXXIV.

Je supposerai que le nombre des variables soit quelconque, & je ferai, pour abréger,

$$dz = p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots\ldots$$

Théorème I. Les quantités U, X, Y, étant des fonctions données respectivement en u, x, y, l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles

$$F(z, pU, qX, rY \ldots\ldots) = 0,$$

ne dépend que des quadratures.

Soit fait

$$pU = \alpha rY,$$
$$qX = \beta rY,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

α, β.... étant des indéterminées sur la valeur desquelles on ne doit rien statuer, & qui sont destinées à disparoître par l'élimination ; & soient substituées dans la proposée pour pU, qX.... leurs valeurs, l'équation deviendra

$$f(z, \alpha, \beta, \ldots, rY) = 0,$$

de laquelle on pourra tirer la valeur de rY en z, α, β.....Soit cette valeur

$$rY = \mathrm{f}(z, \alpha, \beta \ldots\ldots),$$

on en conclura

$$pU = \alpha \mathrm{f}(z, \alpha, \beta \ldots\ldots),$$
$$qX = \beta \mathrm{f}(z, \alpha, \beta \ldots\ldots);$$

substituant pour p, q, r.... ces valeurs dans

$$dz = p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots,$$

on aura

$$\frac{dz}{\mathrm{f}(z, \alpha, \beta \ldots\ldots)} = \frac{\alpha\,du}{U} + \frac{\beta\,dx}{X} + \frac{dy}{Y} \ldots\ldots$$

équation dont l'intégrale, en regardant α, β... comme conſtantes, ne dépend que des quadratures, & doit être complétée par une fonction arbitraire des conſtantes hypothétiques α, β.... Soit $M = 0$, cette intégrale ainſi complétée; elle ne pourra pas être employée ſeule, parce qu'il faut indiquer ce qui a été regardé comme conſtant dans l'intégration; on aura donc, ſimultanément,

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Toutes ces équations devant avoir lieu, indépendamment des valeurs de α, β... ſi l'on élimine ces indéterminées, on aura l'intégrale complète de la propoſée. L'élimination dont il s'agit ici, ne peut pas s'exécuter en général, parce que les quantités α, β... ſont ſous la fonction arbitraire & ſous ſes différences partielles.

XXXV.

THÉORÈME II. Les quantités L, M, N, P..... en même nombre que les variables, étant compoſées des variables & des différences partielles premières, de manière que toutes les équations ſuivantes, moins une, étant poſées, la dernière s'enſuive néceſſairement,

$$dL = 0,$$

$$dM = 0,$$

$$dN = 0,$$

$$dP = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

ſi l'on a une équation compoſée de toutes ces quantités; & que je repréſente par

$$F(L, M, N, P \ldots\ldots\ldots) = 0,$$

F étant une fonction quelconque donnée, algébrique ou tranſcendante, arbitraire ou déterminée; on aura l'intégrale de cette équation, en éliminant d'abord toutes les différences partielles, & une des deux fonctions arbitraires φ ou ψ, entre les équations ſuivantes,

$$L = \varphi(\alpha, \beta \ldots\ldots),$$
$$M = \psi(\alpha, \beta \ldots\ldots),$$
$$N = \alpha,$$
$$P = \beta,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$F(\varphi, \psi, \alpha, \beta \ldots\ldots) = 0;$$

dans leſquelles F eſt la même fonction que celle de la propoſée; ce qui produira une équation unique que je repréſente par $M = 0$, puis en éliminant toutes les indéterminées α, $\beta \ldots\ldots$ entre les équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple. Soit propoſée l'équation

$$F[p, q, r \ldots\ldots (z - pu - qx - ry \ldots\ldots)] = 0,$$

dans laquelle F indique une fonction quelconque donnée. Comme de toutes les équations

$$dp = 0,$$

$$dq = 0,$$
$$dr = 0,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$d(z - pu - qx - ry\dots\dots) = 0,$$

une quelconque ſuit de toutes les autres, la propoſée eſt dans le cas du théorème, & ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination des indéterminées α, β.... entre les équations ſuivantes,

$$F\{\varphi(\alpha, \beta\dots), \alpha, \beta\dots[z - u\varphi(\alpha, \beta\dots) - \alpha x - \beta y\dots]\} = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{d\beta}\right) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

M. de la Grange avoit donné un réſultat analogue, ſeulement pour le cas de deux variables principales.

XXXVI.

Sur les équations aux différences partielles des ordres ſupérieurs.

Ce que nous avons dit des équations aux différences partielles du premier ordre, a pareillement lieu pour celles des ordres ſupérieurs; c'eſt-à-dire qu'en faiſant, pour abréger,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

ſi l'on ſubſtitue dans une équation aux différences partielles ſecondes $V = 0$, pour r & t leurs valeurs en dp, dq, dx, dy, priſes dans les équations précédentes, on aura une équation qui ne renfermera plus d'autres différences

partielles secondes que s; & si l'on différencie cette équation en regardant s comme seule variable, & qu'ensuite on élimine s au moyen de cette différentielle, on aura une équation $U = 0$ aux différences ordinaires entre les variables x, y, z, p, q, dont l'intégrale fournira celle de la proposée.

Le résultat aux différences ordinaires que j'ai représenté en général par $U = 0$, peut arriver sous plusieurs formes très-différentes.

1.° Ce résultat peut comporter deux équations aux différences ordinaires, ce qui aura toujours lieu lorsque la proposée sera linéaire, & dans quelques cas des différences élevées; alors si les intégrales de ces deux équations aux différences ordinaires sont $M = \alpha$, $N = \beta$, α & β étant les constantes arbitraires introduites par les intégrations, l'intégrale première de la proposée sera $M = \varphi N$.

2.° Si le résultat aux différences ordinaires ne renferme qu'une seule équation élevée, & que l'intégrale complète de cette équation soit le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre trois équations de cette forme

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

l'intégrale première de la proposée sera le résultat de l'élimination de α entre les deux premières équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0.$$

3.° Enfin si le résultat aux différences ordinaires est une équation linéaire unique, & pour laquelle les anciennes conditions d'intégrabilité ne soient pas satisfaites, on se

comportera

comportera d'une manière analogue à ce que j'ai fait, *article XXXII.*

Je vais apporter un exemple pour chacun de ces trois cas.

XXXVII.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation aux différences partielles secondes

$$rt - s^2 + A = 0,$$

dans laquelle A est une constante.

Je substitue pour r & t leurs valeurs prises dans

$$dp = rdx + sdy,\ dq = sdx + tdy,$$

ce qui donne

$$s(dqdy + dpdx) = dpdq + Adxdy.$$

Je différencie cette équation en regardant s comme seule variable, & j'élimine s, ce qui, dans ce cas où s est linéaire, se réduit à égaler à zéro chacun des deux membres; & j'ai les deux équations aux différences ordinaires

$$dqdy + dpdx = 0,$$
$$dpdq + Adxdy = 0,$$

desquelles on tire

$$dp = -dy\sqrt{(A)},$$
$$dq = dx\sqrt{(A)}:$$

or ces deux équations sont des différences exactes, & leurs intégrales complètes sont

$$p + y\sqrt{(A)} = \alpha,$$
$$q + x\sqrt{(A)} = \beta;$$

donc faisant $\alpha = \varphi\beta$, l'intégrale complète première de la proposée est

$$p + y\sqrt{(A)} = \varphi[q - x\sqrt{(A)}].$$

Si dans la proposée on fait $A = 0$, elle devient $rt - s^2 = 0$, équation des surfaces développables; & si on fait la même supposition dans l'intégrale, on a $p = \varphi q$, qui est une des intégrales premières de cette équation.

Actuellement, l'intégrale que l'on vient de trouver, est précisément l'équation que j'ai traitée, *article XXXII;* donc l'intégrale complète de la proposée est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$z = x\varphi\alpha + \alpha y + \psi\left(\frac{y}{x}, \alpha\right),$$

$$x\varphi'\alpha + y + \psi''\left(\frac{y}{x}, \alpha\right),$$

$$\psi'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right) = x^2 \sqrt{(A)},$$

dont la seconde est la différentielle de la première, prise en regardant α comme seule variable; & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire d'une quantité, ψ est une fonction arbitraire de deux quantités, ψ' & ψ'' sont les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$.

Ainsi la proposée appartient à une courbe à double courbure, excepté dans le cas où l'on a $A = 0$; alors elle appartient à toutes les surfaces développables.

XXXVIII.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$(rt - s^2)^2 + 4rs = 0.$$

Je chasse r & t, au moyen des équations

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

ce qui donne

$$\left.\begin{matrix}[dpdq - s(dqdy + dpdx)]^2 \\ + 4sdxdy^2(dp - sdy)\end{matrix}\right\} = 0;$$

différenciant cette équation, en regardant s comme ſeule variable, & éliminant enſuite s au moyen de cette différentielle, je trouve l'équation aux différences ordinaires,

$$dpdq = dy^2.$$

Or, cette équation élevée eſt compriſe dans celles que j'ai traitées, *article VII,* & en faiſant, pour abréger,

$$(p - \alpha)(q - \varphi\alpha) - y^2 = M,$$

ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

donc une des intégrales premières de la propoſée eſt le ſyſtème des deux premières de ces trois équations, c'eſt-à-dire, le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux ſuivantes,

$$(p - \alpha)(q - \varphi\alpha) - y^2 = 0,$$

$$(p - \alpha)\varphi'\alpha + q - \varphi\alpha = 0.$$

Pour avoir l'intégrale finie, je tire de ces deux équations les valeurs de p & q, ce qui donne

$$p = \alpha + \frac{y}{\sqrt{(-\varphi'\alpha)}},$$

$$q = \varphi\alpha + y\sqrt{(-\varphi'\alpha)};$$

& ſubſtituant ces valeurs dans $dz = pdx + qdy$, je trouve

$$dz = \alpha dx + dy\varphi\alpha + \frac{y}{\sqrt{(-\varphi'\alpha)}}(dx - dy\varphi'\alpha).$$

Si cette dernière équation étoit intégrable, en regardant α comme conſtante, & que ſon intégrale, complétée par

une fonction arbitraire de α, fût $M = 0$, l'intégrale finie demandée feroit le réfultat de l'élimination de α entre les deux équations $M = 0$, $(\frac{dM}{d\alpha}) = 0$, & cette intégrale appartiendroit à une furface courbe. Mais la dernière équation aux différences ordinaires n'eft pas intégrable en regardant α comme conftante; & pour qu'elle le devînt, il faudroit encore regarder $x - y\varphi'\alpha$ comme conftante ; donc je pourrai l'intégrer dans cette double hypothèfe, & alors il faudra, 1.° compléter l'intégrale par une fonction arbitraire des deux quantités regardées comme conftantes dans l'intégration ; 2.° exprimer par deux équations, que ces deux quantités n'ont pas varié, ce qui donnera

$$z = \alpha x + y\varphi\alpha + \psi\,[(x - y\varphi'\alpha),\ \alpha]$$

$$x + y\varphi'\alpha - y\varphi''\alpha\psi' + \psi'' = 0;$$

$$\psi' = \frac{y}{\sqrt{(-\varphi'\alpha)}};$$

donc l'intégrale finie de la propofée eft le réfultat de l'élimination de α entre les trois équations précédentes, dont la feconde eft la différentielle de la première, prife en regardant α comme conftante, & dans lefquelles φ eft une fonction arbitraire d'une quantité, ψ eft une fonction arbitraire de deux quantités, & ψ', ψ'' font les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi\,(u, v)$. Ainfi la propofée appartient à une courbe à double courbure.

XXXIX.

EXEMPLE III. Soit propofé

$$Ar + Bq + z = 0,$$

dans laquelle A & B font des conftantes.

Je fubftitue pour r fa valeur dans $dp = rdx + sdy$, & je trouve

$$Adp + (Bq + z)\,dx = Asdy;$$

éliminant s au moyen de la différentielle priſe en regardant s comme ſeule variable, ce qui ſe réduit à égaler à zéro les deux membres de l'équation, j'obtiens les deux équations aux différences ordinaires ſimultanées,

$$Adp + (Bq + z)\,dx = 0,$$
$$dy = 0,$$

en ſorte que ſi la premiére ſatisfaiſoit aux conditions d'intégrabilité, & que ſon intégrale fût $M = \alpha$, l'intégrale première de la propoſée ſeroit $M = \varphi y$. Mais la première équation ne ſatisfait pas aux conditions d'intégrabilité, & ſon intégrale, priſe indépendamment de la ſeconde équation, ſeroit le ſyſtème des deux équations ſimultanées,

$$Ap + \varphi x = 0,$$
$$\varphi' x = Bq + z;$$

donc cette intégrale devant être priſe en ſuppoſant que la ſeconde équation ait lieu, l'arbitraire qui la complète doit être auſſi fonction de y; & l'on doit avoir pour intégrale première de la propoſée, le ſyſtème des équations ſimultanées,

$$Ap + \varphi(x, y) = 0,$$
$$\varphi'(x, y) = Bq + z,$$

dans leſquelles φ' eſt le coéfficient de dx dans la différentielle de $\varphi(x, y)$.

Cette intégrale première peut être miſe ſous une autre forme; car ſi l'on tire de ces équations les valeurs ſuivantes de p, q,

$$p = \frac{-\varphi(x,y)}{A},$$

$$q = \frac{\varphi'(x,y) - z}{B},$$

& qu'on les ſubſtitue dans $dz = p\,dx + q\,dy$, on aura

$$dz = \frac{-dx\,\varphi(x,y)}{A} + \frac{dy\,\varphi'(x,y) - z\,dy}{B},$$

équation aux différences ordinaires du premier ordre, qui ne renferme aucune indéterminée, & qui devant ſubſiſter ſans condition, eſt elle-même la véritable intégrale première de l'équation aux différences partielles du ſecond ordre, c'eſt-à-dire, qu'elle exprime la même choſe, & qu'elle eſt de la même généralité que la propoſée ; & parce que cette équation ne ſatisfait pas aux conditions d'intégrabilité, & que ſon intégrale ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, il s'enſuit que la propoſée appartient à une courbe à double courbure.

Actuellement, pour intégrer encore une fois cette équation, ſoit $\varphi\,(x, y)$ le coéfficient de dx dans la différentielle d'une autre fonction arbitraire $\psi\,(x, y)$, de manière que l'on ait

$$\varphi\,(x,y) = \psi\,(x,y),$$

$$\varphi'\,(x,y) = \psi'\,(x,y),$$

ψ' étant le coéfficient de dx^2 dans la différence ſeconde de ψ, l'équation aux différences ordinaires deviendra

$$dz = -d\frac{\psi\,(x,y)}{A} + dy\left[\frac{\psi'\,(x,y) - z}{B} + \frac{\psi''(x,y)}{A}\right],$$

ψ'' étant le coéfficient de dy dans la différentielle de $\psi\,(x, y)$. Or d'après ce que j'ai dit ſur l'intégration des équations aux différences ordinaires linéaires, l'intégrale de cette équation eſt le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$z = -\frac{\psi\,(x,y)}{A} + \pi y,$$

$$\pi' y = \frac{\psi'\,(x,y) - z}{B} + \frac{\psi''(x,y)}{A},$$

dans lesquelles π est une fonction arbitraire de la seule quantité y; donc ce système d'équations est aussi l'intégrale finie & complète de la proposée; ce qu'il est très-facile de vérifier par la différenciation.

X L.

Le même procédé s'applique aux équations d'ordres supérieurs. Je ne me permettrai qu'un seul exemple.

Soit proposé d'intégrer l'équation aux différences partielles du troisième ordre

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)\left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right),$$

je chasse trois de ces différences partielles au moyen des trois équations suivantes

$$dr = \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)dx + \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)dy,$$

$$ds = \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)dx + \left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right)dy,$$

$$dt = \left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right)dx + \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)dy,$$

ce qui donne, en conservant $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$,

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)(dt\,dy^2 - dr\,dx^2) = dr(ds\,dy - dr\,dx);$$

je différencie cette équation en regardant $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$ comme seule variable, & j'élimine cette quantité au moyen de la différentielle, ce qui, à cause que $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$ est linéaire, se réduit à égaler à zéro chacun des membres de l'équation, & j'ai les deux équations aux différences ordinaires

$$dr(ds\,dy - dr\,dx) = 0,$$

$$dt\,dy^2 - dr\,dx^2 = 0.$$

La première de ces deux équations a deux racines, dont l'une eſt $dr = 0$, en vertu de laquelle la ſeconde équation devient $dt dy^2 = 0$; dont une des racines eſt $dt = 0$; donc on a ſimultanément les deux équations

$$dr = 0,$$
$$dt = 0;$$

or les intégrales complètes de ces équations ſont $r = \alpha$, $t = \beta$; donc une des intégrales premières de la propoſée eſt

$$t = \varphi r,$$

ce qu'il eſt facile de vérifier par la différenciation.

X L I.

Les équations aux différences partielles élevées ne ſont pas les ſeules qui puiſſent appartenir à des courbes à double courbure; la plupart des équations linéaires ſont encore dans le même cas; nous nous contenterons de le faire voir par l'équation

$$(A) \quad Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0,$$

dans laquelle tous les coéfficiens ſont conſtans. Nous avons déjà traité cette équation dans le Mémoire précédent, *article XXX;* mais l'intégrale que nous avons trouvée eſt encore trop particulière.

Si l'on ſubſtitue dans cette équation par r & t leurs valeurs priſes dans

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdy + tdy,$$

& qu'enſuite l'on élimine s au moyen de la différentielle priſe en regardant s comme ſeule variable, on aura les deux équations aux différences ordinaires ſimultanées

$$(B) \qquad Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 = 0,$$

$$(C) \quad Adpdy^2 - Cdqdx + dxdy\,(Dp + Eq + F) = 0,$$

les

les racines de la première ſont

$$dy - kdx = 0, \ \& \ dy + k'dx = 0,$$

k & k' étant les racines de l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0;$$

ainſi, en employant la première racine, & l'introduiſant dans l'équation *(C)*, les deux équations aux différences ordinaires ſimultanées deviennent

$$(D) \quad dy - kdx = 0,$$

$$(E) \quad A(dp + k'dq) + dx(Dp + Eq + F) = 0.$$

Ce ſont ces deux équations qui doivent donner une des intégrales premières de la propoſée.

L'intégrale de l'équation *(D)* eſt $y - kx = \alpha$, α étant la conſtante arbitraire; ſi celle de l'équation *(E)* étoit $M = \beta$, l'intégrale première ſeroit $M = \varphi\alpha$; mais, 1.° l'équation *(E)* n'appartient pas en général à une ſurface courbe, & ſon intégrale ne peut être une équation unique que dans le cas où les coéfficiens de la propoſée ſatisfont à l'équation

$$CD^2 + AE^2 = BDE;$$

dans tous les autres cas, l'intégrale de l'équation aux différences ordinaires *(E)*, conſidérée indépendamment de l'équation *(D)*, ne peut être exprimée que par le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$A(p + k'q) + \varphi x = 0,$$

$$\varphi' x = Dp + Eq + F;$$

2.° l'équation *(E)* ne doit pas être conſidérée ſeule, & ſon intégrale doit être priſe en ſuppoſant que l'équation *(D)* ait lieu, c'eſt-à-dire, que α ſoit conſtant; donc cette intégrale doit être complétée, non pas par une fonction de x ſeulement, mais par une fonction de x & de α; donc

la forme ſous laquelle ſe préſente d'abord l'intégrale première de la propoſée, eſt le ſyſtème des deux équations

$$(F)\ A(p + k'q) + \varphi(x, y - kx) = 0,$$
$$(G)\ \varphi'(x, y - kx) = Dp + Eq + F,$$

dans leſquelles φ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, & où φ' eſt le coéfficient de du dans la différence de $\varphi(u, v)$.

Cette intégrale ſe vérifie par la différenciation; d'ailleurs ſi l'on fait $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, la propoſée devient

$$Ar + Bs + Ct = 0,$$

& l'équation (G) donne $\varphi'(x, y - kx) = $, ce qui exprime que la fonction φ, n'eſt composée que de la ſeule quantité $y - kx$; donc alors l'intégrale première ſe réduit à l'équation unique & connue

$$A(p + k'q) + \varphi(y - kx) = 0.$$

Des deux équations (F), (G) on tire les valeurs ſuivantes de p & de q,

$$p(Dk' - E) = \frac{E}{A}\varphi(x, y - kx) - k'[F - \varphi'(x, y - kx)],$$

$$q(Dk' - E) = -\frac{D}{A}\varphi(x, y - kx) + F - \varphi'(x, y - kx);$$

& en les ſubſtituant dans $dz = pdx + qdy$, on trouve

$$(H)\ dz(Dk' - E) = \frac{\varphi}{A}(Edx - Ddy) + (F - \varphi')(dy - k'dx),$$

équation aux différences ordinaires, qui exprime ſeule la même choſe que la propoſée, & qui eſt une de ſes intégrales premières, complétée par une fonction de deux

quantités. Si dans cette équation, l'on change les deux quantités k, k' l'une en l'autre, il eſt évident que l'on aura l'autre intégrale première de la propoſée.

Les deux intégrales premières de l'équation *(A)* aux différences partielles linéaires, ſont donc l'une & l'autre une véritable équation aux différences ordinaires, dans laquelle il n'eſt plus queſtion des manières différentes dont la quantité z a pu varier; & parce que ces deux équations ne ſatisfont pas à la condition d'intégrabilité, & que leur intégrale commune ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, il s'enſuit que la propoſée n'appartient pas en général à une ſurface courbe, mais à une courbe à double courbure.

Pour intégrer l'équation *(H)*, il faut obſerver d'abord que l'intégrale du premier membre doit être une fonction des deux quantités $Ex - Dy$ & $y - k'x$, & enſuite que les différences partielles de cette fonction doivent être égales aux deux termes reſpectifs du ſecond membre; ainſi l'intégrale finie de l'équation *(A)* eſt comportée par le ſyſtème des trois équations

$$z(Dk' - E) = \psi\,(Ex - Dy, y - k'x),$$
$$A\psi'\,(Ex - Dy, y - k'x) = \varphi\,(x, y - kx),$$
$$\psi''\,(Ex - Dy, y - k'x) = F - \varphi'(x, y - kx),$$

dans leſquelles ψ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, & où ψ' & ψ'' ſont les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi\,(u, v)$. De ces trois équations, la ſeconde eſt deſtinée à donner la forme de la fonction φ, d'après celle de la fonction ψ, & les deux autres équations ſont celles de la courbe à double courbure, qui eſt le lieu de la propoſée.

Si dans les équations *(D)*, *(E)* on ſubſtitue pour dx, dy, leurs valeurs tirées des deux ſuivantes,

$$dy - k\,dx = d\alpha, \quad dy - k'dx = d\alpha';$$

en opérant enſuite comme nous avons fait, on trouve que l'intégrale complète de la propoſée eſt le ſyſtème des deux équations

$$z = \pi (y - kx, y - k'x),$$

$$\left.\begin{array}{l}(kD - E)\pi' + (k'D - E)\pi'' \\ \quad + \frac{B^2 - 4AC}{A}\pi'^{''} - F\end{array}\right\} = 0,$$

dans leſquelles π eſt une fonction arbitraire de deux quantités, où π' & π'' ſont les coéfficiens de du, dv dans la différentielle de $\pi(u, v)$, & où $\pi'^{''}$ eſt la moitié du coéfficient de $du\,dv$ dans la différentielle ſeconde de la même fonction.

Comme l'équation d'une ſurface courbe quelconque peut toujours être miſe ſous la forme

$$z = \pi (y - kx, y - k'x),$$

il s'enſuit qu'il n'y a aucune ſurface courbe ſur laquelle on ne puiſſe tracer une des courbes à double courbure qui ſatisfont à la propoſée; & lorſque la fonction π eſt telle que la ſeconde équation eſt naturellement ſatisfaite, l'équation de la ſurface eſt elle-même un cas de l'intégrale complète, parce qu'alors la ſurface eſt toute compoſée de courbes qui ſatisfont à la propoſée.

Ce que nous venons de dire ſur cet exemple doit auſſi s'appliquer aux autres cas que nous avons traités dans le Mémoire précédent. Par un ſemblable raiſonnement, on trouve que pour l'équation $r - t - \frac{2p}{x} = 0$, de l'*article XV* du Mémoire, l'intégrale première complète eſt l'équation aux différences ordinaires

$$dz + dy\varphi(x,y - x) - \frac{dx + dy}{2x}\varphi'(x,y - x) = 0,$$

où φ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, & où φ'

eſt le coéfficient de du dans la différentielle de $\varphi\,(u, v)$. Enfin l'intégrale finie eſt le ſyſtème des deux équations

$$z = \psi\,(x + y, x - y),$$

$$\psi' + \psi'' = 2\,x\,\psi''',$$

dans leſquelles ψ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, où ψ', ψ'' ſont les coéfficiens de du, dv dans la différentielle de $\varphi\,(u, v)$, & où ψ''' eſt la moitié du coéfficient de $du\,dv$ dans la différentielle ſeconde de la même fonction.

Conclusion générale.

Il réſulte de ce ſupplément :

1.° que les équations aux différences ordinaires, pour leſquelles les conditions d'intégrabilité ne ſont pas ſatisfaites, ne contiennent rien d'abſurde, ni d'impoſſible, & qu'elles ſont ſuſceptibles d'une véritable intégration en quantités finies.

2.° Que les intégrales de ces équations ſont complétées, par des fonctions arbitraires de quantités variables, fonctions que l'on n'avoit encore employées que pour les intégrales des équations aux différences partielles.

3.° Que les conditions d'intégrabilité ont ſeulement pour objet d'indiquer le nombre des équations dont l'intégrale finie doit être compoſée, toute élimination d'indéterminées étant ſuppoſée faite.

4.° Que les intégrales du plus grand nombre des équations aux différences partielles ne ſont pas ſuſceptibles d'être exprimées par une ſeule équation, même en ſuppoſant que l'élimination de toutes les indéterminées ſoit faite ; c'eſt-à-dire, par exemple, que dans le cas de trois variables, le plus grand nombre des équations aux différences partielles appartient à des courbes à double courbure, & non pas à des ſurfaces courbes, ce que toutes

les méthodes ordinaires d'intégration supposent tacitement; & alors le nombre des quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires est plus grand que celui des variables principales diminué d'une unité.

5.° Qu'il y a certaines équations aux différences partielles, dont les intégrales intermédiaires sont de véritables équations aux différences ordinaires.

6.° Enfin, que la Géométrie peut encore faire de très-grands progrès, parce qu'on a le moyen de mettre en analyse des manières nouvelles d'engendrer les courbes, & parce qu'on a la faculté d'entendre un grand nombre de propriétés de l'étendue, qui sont exprimées par les relations qu'ont entr'elles des équations jusqu'ici regardées comme impossibles.

ADDITION.

DANS le supplément qui précède, j'ai construit plusieurs équations aux différences ordinaires élevées; mais de toutes les équations linéaires, qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, & que j'ai intégrées, je n'en ai construit aucune: je vais montrer, par un exemple, ce que ces sortes d'équations signifient dans l'espace.

Si l'on suppose qu'un œil, réduit à un point unique, soit placé d'une manière quelconque, par rapport à une surface courbe, j'appelle *ligne du contour apparent* de cette surface, la courbe composée des points extrêmes de cette surface, que l'œil peut apercevoir; cette ligne est le contact de la surface courbe avec une surface conique qui lui seroit circonscrite, & dont le sommet seroit au point de l'œil: d'après cela, je suppose qu'il s'agisse de trouver la ligne du contour apparent d'une surface quelconque de révolution autour de l'axe des z, vue par un œil situé dans le point dont les coordonnées sont a, b, c, indépendamment de la courbe génératrice de la surface.

L'équation de la ſurface de révolution eſt

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

& ſon équation aux différences partielles eſt

$$py - qx = 0.$$

L'équation de la ſurface conique à baſe quelconque, & dont le ſommet eſt au point de l'œil, eſt

$$\frac{z - c}{x - a} = \psi\left(\frac{y - b}{x - a}\right),$$

& ſon équation aux différences partielles eſt

$$p(x - a) + q(y - b) = z - c.$$

Or, il eſt évident que pour la courbe demandée, non-ſeulement les x, y, z de la ſurface de révolution & de la ſurface conique, ſont reſpectivement les mêmes, mais encore que les quantités p, q, ſont les mêmes dans les deux ſurfaces, puiſque tout le long de la courbe, ces deux ſurfaces ont le même plan tangent. Donc dans les deux équations

$$py - qx = 0, p(x - a) + q(y - b) = z - c,$$

les cinq quantités x, y, z, p, q ont les mêmes valeurs; donc ſi l'on prend dans ces deux équations les valeurs de p & de q, & qu'on les ſubſtitue dans $dz = pdx + qdy$, qui a également lieu pour les deux ſurfaces, on aura

$$[x(x - a) + y(y - b)]dz = (z - c)(xdx + ydy),$$

équation aux différences ordinaires linéaires, qui ne ſatisfait pas à la condition d'intégrabilité, & qui, conſidérée ſeule, exprime le contour apparent d'une ſurface quelconque de révolution autour de l'axe des z, vue par un œil placé dans le point dont les coordonnées ſont a, b, c. L'intégrale de cette équation eſt le ſyſtème des deux ſuivantes

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2),$$

$$2\,[x\,(x - a) + y\,(y - b)]\,\varphi' = \varphi - c,$$

dans lesquelles φ est une fonction arbitraire.

On voit donc que toute équation aux différences ordinaires à trois variables, linéaire, du premier ordre, & qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, appartient à la courbe de contact de deux surfaces courbes générales, c'est-à-dire, de deux surfaces données chacune par une équation aux différences partielles linéaires.

FAUTES à corriger dans ce Mémoire.

Pages,	*Lignes,*	*Au lieu de,*	*Lisez,*
502.	27.....	faisant la,...........	faisant sur la,
504.	12.....	le mot qu'elle exprime,	ce mot, qu'elle exprime,
507.	22.....	sommes,...........	sommets,
517.	dernière,.	le...............	la
522.	25.....	$d\left(\frac{\psi\beta}{d\beta}\right)$,........	$\left(\frac{d.\psi\beta}{d\beta}\right)$,
528.	7.....	THÉORÈME III,..	THÉORÈME II,
529.	16.....	N,..............	M,
533.	18 & 26,	u^2...............	$\frac{u^2}{2}$,
	21.....	0,..............	z,
	27.....	y,..............	$z - y$,
	28.....	z,..............	$- z$,
545.	19.....	dx'^2...............	dx^2.

SUITE

SUITE DE L'ESSAI

Pour connoître la Population du Royaume, & le nombre de ses habitans, en adaptant aux Villes, Bourgs & Villages, portés sur chacune des Cartes de M. de Cassini, l'année commune des Naissances, & en la multipliant par 26.

Par M.rs DU SÉJOUR, le Marquis DE CONDORCET & DE LA PLACE.

Population de la Carte de la France, n.° 133.

ISLE-DE-RÉ.

« CETTE Isle contient la ville de Ré, & sept villages.

L'année commune des naissances de la ville de Ré, est de . . . . 149.

Celle des 7 villages, est de . . . . 528.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
5 ½.	1.	7.	3874.	13728.	17,602.	2496.

Cette île n'a qu'environ 5 lieues ½ carrées de superficie habitable; le reste est occupé par des rochers & des bancs, couverts le plus souvent par la mer.

LILLE.

Population de la Carte de la France, n.° 41.

« CETTE Carte contient les villes de Lille, de Douai, de Saint-Amand & de Condé, & 187 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Lille, eſt de 2462.
Dans celle de Douai. . . . . de. . . . . 665.
Dans celle de Saint-Amand. . . . . de. . . . . 296.
Dans celle de Condé. . . . . de. . . . . 155.
Et dans les 187 bourgs ou villages, de. . . . . 7749.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
107.	4.	187.	93028.	201474.	294502.	1883.

Cette Carte ne contient pour la France que 107 lieues; le ſurplus dépend de la Flandre Autrichienne.

ISLE D'OLERON.

Population de l'île d'Oleron, portée ſur les Cartes, n.os 133 & 134.

« CETTE île contient la ville d'Oleron, & 5 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville d'Oleron, eſt de 95.
Et dans les 5 bourgs ou villages, de. . . . . 484.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
12.	1.	5.	2470.	12584.	15054.	1094.

Cette île ne contient que 12 lieues carrées habitées; il y en a environ 3 de ſables, qui ne ſont ſuſceptibles d'aucune culture.

Population de la Carte de la France, n.° 52.

CLERMONT-FERRAND.

« CETTE Carte contient les villes de Clermont, de Riom, de Thiers, d'Ambert, de Billom & de Maringues, « & 228 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Clermont, eſt de	789.
Dans celle de Riom ... de	526.
Dans celle de Thiers ... de	508.
Dans celle d'Ambert ... de	228.
Dans celle de Billom ... de	143.
Dans celle de Maringues ... de	124.
	2318.
Et dans les 228 bourgs ou villages, de	9534.
TOTAL	11852.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	6.	228.	60268.	247884.	308152.	791.

Population de la Carte de la France, n.° 5.

SAINT-OMER.

« CETTE Carte contient les villes d'Heſdin, de Lens, de Lilliers, de Saint-Omer, de Saint-Pol, de Saint- « Venant, d'Armentières, de Béthune & de Caſſel, & « 435 bourgs ou villages. »

L'année commmune des naiſſances dans la ville d'Heſdin, eſt de	117.
Dans celle de Lens ... de	76.
Dans celle de Lilliers ... de	115.

Dans celle de Saint-Omer	de	647.
Dans celle de Saint-Pol	de	107.
Dans celle de Saint-Venant	de	59.
Dans celle d'Armentières	de	229.
Dans celle de Béthune	de	162.
Dans celle de Caſſel	de	130.
		1642.
Et dans les 435 bourgs ou villages, de		9020.
TOTAL		10662.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
246.	9.	435.	42692.	234520.	277212.	953.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 246 lieues; le ſurplus dépend de la Flandre Autrichienne.

DUNKERQUE.

Population de la Carte de la France, n.° 6.

« CETTE Carte contient les villes de Dunkerque, » Bergues, Bourgbourg, Gravelines, Ardres & Calais, & 103 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Dunkerque, eſt de		1032.
Dans celle de Bergues	de	231.
Dans celle de Bourgbourg	de	126.
Dans celle de Gravelines	de	101.
Dans celle d'Ardres	de	50.
Dans celle de Calais	de	225.
		1765.
Et dans les 103 bourgs ou villages, de		3024.
TOTAL		4789.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
83.	6.	103.	45890.	78624.	124514.	947.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 83 lieues; le reste est couvert par la mer, & occupé par le pays étranger.

Population de la Carte de la France, n.° 86.

MÂCON.

« CETTE Carte contient les villes de Mâcon, de Roanne, de Semur & de Villefranche, & 313 bourgs « ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Mâcon, est de	956.
Dans celle de Roanne..........de	272.
Dans celle de Semur en Brionnois,..de	45.
Dans celle de Villefranche.......de	184.
	1457.
Et dans les 313 bourgs ou villages, de	8086.
TOTAL	9543.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	313.	37882.	210236.	248118.	841.

EU.

Population de la Carte de la France, n.° 23.

« CETTE Carte contient les villes d'Eu, du Tréport & de Saint-Vallery, & 156 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Eu, est de .... 109.
Dans celle du Tréport.........de............ 34.
Dans celle de Saint-Vallery......de............ 103.

246.

Et dans les 156 bourgs ou villages, de............ 2209.

TOTAL............. 2455.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
82.	3.	156.	6396.	57434.	63830.	778.

Cette Carte ne contient que 82 lieues cultivées ; le reste est couvert par la mer & par les sables de l'embouchure de la Somme.

BOURG EN BRESSE.

Population de la Carte de la France, n.° 117.

« CETTE Carte contient la ville de Bourg, & 273 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Bourg, est de .... 286.
Et dans les 273 bourgs ou villages, de............ 6483.

TOTAL............. 6769.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
245.	1.	273.	7436.	168558.	175994.	688.

Cette Carte ne contient, pour la France, que 245 lieues; le surplus dépend de la Savoie.

Population de la Carte de la France, n.° 53. ISSOIRE.

« CETTE Carte contient les villes d'Issoire & de Brioude, & 235 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Issoire, est de.................................. 181.

Dans celle de Brioude..........de............. 171.

352.

Et dans les 235 bourgs ou villages, de............ 5842.

TOTAL............ 6194.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	235.	9152.	151892.	161044.	607.

CHALLON-SUR-SAÔNE.

Population de la Carte de la France, n.° 85.

« CETTE Carte contient les villes de Challon-sur-Saône, Clugny & Montcenis, & 252 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Challon, est de.......... 934.
Dans celle de Clugny..........de.......... 149.
Dans celle de Montcenis........de.......... 50.
Et dans les 252 bourgs ou villages, de.......... 5593.

TOTAL.......... 6726.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	252.	29458.	145496.	174954.	582.

MONTLUÇON.

Population de la Carte de la France, n.° 12.

« CETTE Carte contient les villes de Montluçon, Gueret & Evaux, & 219 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Montluçon, est de.......... 190.
Dans celle de Gueret..........de.......... 121.
Dans celle d'Évaux..........de.......... 71.

382.

Et dans les 219 bourgs ou villages, de.......... 5436.

TOTAL.......... 5818.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
650.	3.	219.	9932.	141336.	151238.	565.

Population de la Carte de la France, n.° 114. DIJON.

« CETTE Carte contient les villes de Dijon & de Gray, & 273 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Dijon, eſt de	621.
Dans celle de Gray ... de	170.
	791.
Et dans les 273 bourgs ou villages, de	5434.
TOTAL	6225.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	273.	20566.	141284.	161850.	565.

Population de la Carte de la France, n.° 8. ORLÉANS.

« CETTE Carte contient les villes d'Orléans, de Montargis & de Pithiviers, & 212 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville d'Orléans, eſt de	1194.
Dans celle de Montargis ... de	197.
Dans celle de Pithiviers ... de	91.
	1482.
Et dans les 212 bourgs ou villages, de	5208.
TOTAL	6690.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	212.	38572.	135408.	173980.	541.

SENS.

Population de la Carte de la France, n.° 46.

« CETTE Carte contient les villes de Sens, de Provins, » de Nogent-ſur-Seine & de Montereau, & 290 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Sens, eſt de	340.
Dans celle de Provins.........de	157.
Dans celle de Montereau.......de	118.
Dans celle de Nogent..........de	112.
	727.
Et dans les 290 bourgs ou villages, de	4825.
TOTAL	5552.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES	NOMBRE des BOURGS *ou* VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	290.	18902.	125450.	144352.	502.

Population de la Carte de la France, n.° 22.

BOULOGNE.

« CETTE Carte contient les villes de Boulogne & de Montreuil, & 69 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Boulogne, est de.................................. 295.

Dans celle de Montreuil........de............. 125.

420.

Et dans les 69 bourgs ou villages, de............ 882.

TOTAL............ 1302.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
46.	2.	69.	10920.	22932.	33852.	498.

Population de la Carte de la France, n.° 21.

AMBLETEUSE ou PAS DE CALAIS.

« CETTE Carte ne contient aucune ville, mais seulement 18 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans ces 18 bourgs ou villages, est de.......................... 225.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
12.	0.	18.	0.	5850.	5850.	488.
Cette Carte ne contient que 12 lieues de superficie; le reste est couvert par la mer.						

AUTUN.

Population de la Carte de la France, n.° 84.

« CETTE Carte contient les villes d'Autun, de Beaune, » de Saulieu, d'Arnay-le-Duc & de Châteauchinon, & 207 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville d'Autun, eſt de . . . . 283.
Dans celle de Beaune . . . . . de . . . . . 351.
Dans celle de Saulieu . . . . . de . . . . . 108.
Dans celle d'Arnay-le-Duc . . . . . de . . . . . 86.
Dans celle de Châteauchinon . . . . de . . . . . 85.
913.
Et dans les 207 bourgs ou villages, de . . . . . 4629.
TOTAL . . . . . 5542.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	5.	207.	23738.	120354.	144092.	481.

BOURGES.

Population de la Carte de la France, n.° 10.

« CETTE Carte contient les villes de Bourges & d'Iſſoudun, & 170 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Bourges, eſt de . . . . 951.
Dans celle d'Iſſoudun . . . . . de . . . . . 464.
1415.
Et dans les 170 bourgs ou villages, de . . . . . 4588.
TOTAL . . . . . 6003.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	170.	36790.	119288.	156078.	477.

Population de la Carte de la France, n.° 49.

NEVERS.

« CETTE Carte contient les villes de Nevers & de la Charité, & 208 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Nevers, est de.................................... 475.
Dans celle de la Charité........de............. 182.

657.
Et dans les 208 bourgs ou villages, de............. 4566.

TOTAL............. 5223.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	208.	17082.	118716.	135798.	475.

Population de la Carte de la France, n.° 11.

LA CHÂTRE.

« CETTE Carte contient les villes de la Châtre & de Saint-Amand, & 170 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de la Châtre, est de.................................... 171.
Dans celle de Saint-Amand......de............. 224.

395.
Et dans les 170 bourgs ou villages, de............. 4176.

TOTAL............. 4571.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	2.	170.	10270.	108576.	118846.	434.

MOULINS.

Population de la Carte de la France, n.° 50.

« CETTE Carte contient les villes de Moulins, de » Bourbon-Lancy & de Saint-Pierre-le-Moutier, & 142 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville de Moulins, est de	636.
Dans celle de Bourbon-Lancy . . . de	102.
Dans celle de Saint-Pierre-le-Moutier, de	114.
	852.
Et dans les 142 bourgs ou villages, de	4039.
TOTAL	4891.

NOMBRE des LIEUES de superficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	3.	142.	19500.	105014.	174514.	420.

AUBUSSON.

Population de la Carte de la France, n.° 13.

« CETTE Carte contient la ville d'Aubusson, & 157 bourgs ou villages. »

L'année commune des naissances dans la ville d'Aubusson, est de	180.
Et dans les 157 bourgs ou villages, de	3845.
TOTAL	4025.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	1.	157.	4680.	99970.	104650.	400.

Population de la Carte de la France, n.° 83.

AVALON.

« CETTE Carte contient les villes d'Avalon, de Montbart, de Noyers & de Semur en Auxois, & 239 « bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville d'Avalon, eſt de........................... 144.
Dans celle de Montbart.........de............. 79.
Dans celle de Noyers..........de............. 75.
Dans celle de Semur en Auxois,...de............. 132.

430.

Et dans les 239 bourgs ou villages, de............. 3710.

TOTAL............. 4140.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
250.	4.	239.	11180.	96460.	107640.	386.

Population de la Carte de la France, n.° 58.

NARBONNE.

« CETTE Carte contient les villes de Narbonne, d'Agde & de Beſiers, & 75 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Narbonne, eſt de. . . . . 293.
Dans celle de Béſiers. . . . . de. . . . . 495.
Dans celle d'Agde. . . . . de. . . . . 239.

1027.

Et dans les 75 bourgs ou villages, de. . . . . 1259.

TOTAL. . . . . 2286.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
105.	3.	75.	26702.	32734.	59436.	311.

Cette Carte ne contient que 105 lieues de ſuperficie; le reſte eſt couvert par la mer.

MONTPELLIER.

Population de la Carte de la France, n.° 92.

« CETTE Carte contient les villes de Montpellier & d'Arles, & 107 bourgs ou villages. »

L'année commune des naiſſances dans la ville de Montpellier, eſt de. . . . . 1104.
Dans celle d'Arles. . . . . de. . . . . 615.

1719.

Et dans les 107 bourgs ou villages, de. . . . . 2066.

TOTAL. . . . . 3785.

NOMBRE des LIEUES de ſuperficie.	NOMBRE des VILLES.	NOMBRE des BOURGS ou VILLAGES.	NOMBRE des HABITANS des Villes.	NOMBRE des HABITANS des campagnes	TOTAL des HABITANS.	NOMBRE des HABITANS de la campagne par lieue.
183.	2.	107.	44694.	53716.	98410.	293.

Cette Carte ne contient que 183 lieues de ſuperficie; le reſte eſt couvert par la mer.

MÉMOIRE

s & décès en Religion dans le Royaume,

année 1783 inclusivement.

RTS		EXCÉDANT des MORTS. sur les Naissances.	EXCÉDANT des NAISSANCES sur les Morts.
ELIGION.	TOTAL DES MORTS.		
1754.	709,786.	....	240,742.
1868.	770,101.	....	143,113.
1678.	864,656.	....	40,924.
1875.	840,639.	....	59,799.
1785.	774,988.	....	164,620.
1833.	817,480.	....	117,000.
1910.	740,699.	....	198,375.
1730.	751,711.	....	246,480.
1828.	744,160.	....	188,640.
1808.	966,467.	...9800..	
2067.	914,017.	....	75,289.
1968.	881,138.	....	89,268.
2081.	948,502.	....	27,201.
1944.	952,205.	...4264..	
,129.	11,696,549.	14,064.	1,591,451.
1866.	834,037.	À déduire sur les résultats de la colonne de l'excédant des Naissances sur les Morts........	14,064.
		Reste......	1,577,387.
		Donc l'année commune, sur 14, est de.............	112,670.

I. *TABLEAU des Naiſſances, Mariages, Morts, Profeſſions & décès en Religion dans le Royaume, l'île de Corſe compriſe, de l'année 1770 à l'année 1783 incluſivement.*

ANNÉES.	NAISSANCES.	MARIAGES.	PROFESSIONS en RELIGION.	MORTS			EXCÉDANT des MORTS. ſur les Naiſſances.	EXCÉDANT des NAISSANCES ſur les Morts.
				DANS LA SOCIÉTÉ civile.	EN RELIGION.	TOTAL DES MORTS.		
1770	950,528.	185,069.	1318.	708,032.	1754.	709,786.	. . . .	240,742.
1771	913,214.	172,547.	1376.	768,233.	1868.	770,101.	. . . .	143,113.
1772	905,580.	185,632.	1328.	862,978.	1678.	864,656.	. . . .	40,924.
1773	900,438.	203,629.	1352.	838,764.	1875.	840,639.	. . . .	59,799.
1774	939,608.	215,783.	1370.	773,203.	1785.	774,988.	. . . .	164,620.
1775	934,480.	214,670.	1350.	815,647.	1833.	817,480.	. . . .	117,000.
1776	939,074.	235,027.	1374.	738,789.	1910.	740,699.	. . . .	198,375.
1777	998,191.	232,850.	1368.	749,981.	1730.	751,711.	. . . .	246,480.
1778	932,800.	204,137.	1389.	742,332.	1828.	744,160.	. . . .	188,640.
1779	956,667.	232,327.	1388.	964,659.	1808.	966,467.	. . . 9800 . .	
1780	989,306.	241,138.	1475.	911,950.	2067.	914,017.	. . . .	75,289.
1781	970,406.	236,503.	1400.	879,170.	1968.	881,138.	. . . .	89,268.
1782	975,703.	224,890.	1491.	946,421.	2081.	948,502.	. . . .	27,201.
1783	947,941.	228,631.	1281.	950,261.	1944.	952,205.	. . . 4264 . .	
Réſultat général des 14 années	13,253,936.	3,012,833.	19,260.	11,650,420.	26,129.	11,696,549.	14,064.	1,591,451.
Ann. commune.	946,710.	215,202.	1375.	832,172.	1866.	834,037.	À déduire ſur les réſultats de la colonne de l'excédant des Naiſſances ſur les Morts	14,064.
							Reſte	1,577,387.
							Donc l'année commune, ſur 14, eſt de	112,670.

Généralités, pendant l'année 1783.

NUMÉR qui constaten l'ordre des Généralité & Province	Naissances avec les Décès. Excédant des Décès sur les Naissances.	Excédant absolu des Morts sur les Naissances.	OBSERVATIONS.
	322.		
1.	6,438.		Ce Tableau présente des résultats d'autant plus affligeans, que, par comparaison avec ceux des quatre années antérieures, le nombre des Naissances y est diminué; que les décès y excèdent les Naissances, ce qui, depuis quatorze ans, n'étoit encore arrivé qu'en l'année 1779; qu'enfin les Mariages ne s'y trouvent pas dans la proportion nécessaire pour réparer, dans les années suivantes, la grande perte que la population a éprouvée.
2.	5,178.		
3.	8,747.		
4.	346.		
5.	1,695.		
6.	〃		
7.	1,527.		
8.	〃		
9.	〃		
10.	〃		
11.	〃		
12.	〃		
13.	〃		Les maladies épidémiques, qui avoient ravagé la généralité d'Amiens en 1781, & qui avoient paru cesser en 1782, s'y sont renouvelées en 1783.
14.	1,897.		
15.	159.		
16.	90.		
17.	8.	4,264.	
18.	1,089.		Les généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle, de Moulins, d'Alençon & de Rennes, qui, en 1782, avoient essuyé le même fléau, en ont encore été affligées en 1783.
19.	1,150.		
20.	〃		
21.	3,140.		
22.	11,121.		L'épidémie s'est étendue dans les généralités de Paris, de Châlons, de Rouen, d'Aix, de Dijon, de Metz & de Lille.
23.	〃		
24.	〃		
25.	2,839.		
26.	5,754.		
27.	〃		Enfin les autres Généralités n'offrent pas des résultats capables d'indemniser de la mortalité que la plus grande partie du Royaume a éprouvée pendant le courant de l'année 1783.
28.	〃		
29.	1,380.		
30.	〃		
31.	〃		
32.	1,017.		
33.	〃		
RÉSU	53,897.		

II. *POPULATION dans le Royaume, compris l'île de Corse, suivant l'ordre des Généralités, pendant l'année 1783.*

NUMÉR. qui constatent l'ordre des Généralités & Provinces.	DÉNOMINATIONS des Généralités du Royaume, compris l'île de Corse, distinguées en pays d'Élections & en pays d'États, la ville de Paris distinguée de la Généralité, comme Capitale du Royaume,	NAISSANCES.	MARIAGES.	PROFESSIONS en Religion.	MORTS. dans la Société civile.	MORTS. en Religion.	MORTS. TOTAL des Morts.	Rapport des Naissances avec les Décès. Excédant des Naissances sur les Morts.	Rapport des Naissances avec les Décès. Excédant des Décès sur les Naissances.	Rapport des Naissances avec les Décès. Excédant absolu des Morts sur les Naissances.
	PARIS (Ville)	19,688.	5,213.	106.	19,922.	88.	20,010.	//	322.	
	Généralités en pays d'Élections.									
1.	Paris	44,342.	10,264.	54.	50,680.	100.	50,780.	//	6,438.	
2.	Orléans	27,027.	7,353.	19.	32,177.	28.	32,205.	//	5,178.	
3.	Tours	46,738.	12,873.	39.	55,407.	78.	55,485.	//	8,747.	
4.	Poitiers	25,633.	6,727.	31.	25,925.	54.	25,979.	//	346.	
5.	Bourges	18,825.	4,754.	15.	20,487.	33.	20,520.	//	1,695.	
6.	Limoges	25,405.	7,293.	24.	23,643.	33.	23,676.	1,729.	//	
7.	La Rochelle	17,315.	4,883.	5.	18,827.	15.	18,842.	//	1,527.	
8.	Bordeaux	54,968.	14,508.	48.	43,714.	88.	43,802.	11,166.	//	
9.	Auch	30,550.	6,937.	31.	25,824.	15.	25,839.	4,711.	//	
10.	Montauban	21,352.	5,036.	39.	17,940.	27.	17,967.	3,385.	//	
11.	Grenoble	25,543.	5,718.	18.	21,402.	49.	21,451.	4,092.	//	
12.	Lyon	24,200.	5,887.	32.	21,341.	50.	21,391.	2,809.	//	
13.	Riom	26,750.	5,831.	34.	23,106.	52.	23,158.	3,592.	//	
14.	Moulins	23,405.	6,206.	46.	25,270.	32.	25,302.	//	1,897.	
15.	Châlons	30,816.	7,233.	28.	30,922.	53.	30,975.	//	159.	
16.	Le Clermontois	1,404.	302.	//	1,494.	//	1,494.	//	90.	
17.	Soissons	17,133.	4,112.	18.	17,106.	35.	17,141.	//	8.	4,264.
18.	Amiens	21,117.	5,339.	12.	22,171.	35.	22,206.	//	1,089.	
19.	Rouen	28,347.	7,478.	38.	29,414.	83.	29,497.	//	1,150.	
20.	Caen	24,012.	6,058.	14.	23,855.	26.	23,881.	131.	//	
21.	Alençon	18,164.	5,338.	27.	21,269.	35.	21,304.	//	3,140.	
	Généralités en pays d'États.									
22.	Rennes	88,235.	20,745.	88.	99,231.	125.	99,356.	//	11,121.	
23.	Perpignan	6,690.	1,453.	6.	6,372.	12.	6,384.	306.	//	
24.	Montpellier	66,853.	14,111.	72.	57,298.	86.	57,384.	9,469.	//	
25.	Aix	27,774.	6,049.	35.	30,549.	64.	30,613.	//	2,839.	
26.	Dijon	41,732.	9,121.	63.	47,375.	111.	47,486.	//	5,754.	
27.	Besançon	27,422.	5,529.	48.	27,121.	62.	27,183.	239.	//	
28.	Strasbourg	25,604.	5,634.	39.	22,237.	40.	22,277.	3,327.	//	
29.	Metz	12,903.	2,581.	30.	14,225.	58.	14,283.	//	1,380.	
30.	Nancy	32,174.	6,747.	83.	30,937.	136.	31,073.	1,101.	//	
31.	Valenciennes	11,114.	2,602.	27.	7,701.	42.	7,743.	3,371.	//	
32.	Lille	29,803.	7,408.	93.	30,650.	170.	30,820.	//	1,017.	
33.	Île de Corse	4,903.	1,308.	19.	4,669.	29.	4,698.	205.	//	
	Résultat du Royaume, compris l'île de Corse.	947,941.	228,631.	1,281.	950,261.	1,944.	952,205.	49,633.	53,897.	

OBSERVATIONS.

Ce Tableau présente des résultats d'autant plus affligeans, que, par comparaison avec ceux des quatre années antérieures, le nombre des Naissances y est diminué; que les décès y excèdent les Naissances, ce qui, depuis quatorze ans, n'étoit encore arrivé qu'en l'année 1779; qu'enfin les Mariages ne s'y trouvent pas dans la proportion nécessaire pour réparer, dans les années suivantes, la grande perte que la population a éprouvée.

Les maladies épidémiques, qui avoient ravagé la généralité d'Amiens en 1781, & qui avoient paru cesser en 1782, s'y sont renouvelées en 1783.

Les généralités d'Orléans, de Tours, de Poitiers, de Bourges, de la Rochelle, de Moulins, d'Alençon & de Rennes, qui, en 1782, avoient essuyé le même fléau, en ont encore été affligées en 1783.

L'épidémie s'est étendue dans les généralités de Paris, de Chalons, de Rouen, d'Aix, de Dijon, de Metz & de Lille.

Enfin les autres Généralités n'offrent pas des résultats capables d'indemniser de la mortalité que la plus grande partie du Royaume a éprouvée pendant le courant de l'année 1783.

MÉMOIRE
SUR LA COMBINAISON DU PRINCIPE OXYGINE,
Avec l'Esprit-de-vin, l'Huile, & différens Corps combustibles.

Par M. LAVOISIER.

J'AI fait voir dans un Mémoire imprimé dans le recueil de l'Académie pour l'année 1781, *page 492*, que si on brûloit de l'esprit-de-vin dans un appareil propre à condenser la plus grande partie de l'eau produite par la combustion, on obtenoit environ dix-huit onces d'eau pour une livre ou seize onces d'esprit-de-vin. J'ai reconnu depuis que ce phénomène avoit constamment lieu dans la combustion d'un grand nombre de matières végétales & animales, & qu'on obtenoit également des huiles qui brûlent, un poids d'eau plus considérable que celui du combustible qui avoit été consommé.

L'appareil dont je me suis servi pour ce genre d'expériences, consiste dans une lampe construite sur les principes de celles de M.rs Meusnier, Argand, Lange & Quinquet; la mèche doit en être circulaire, elle doit avoir un canal intérieur qui donne un libre accès au courant d'air; la flamme doit être revêtue d'une cheminée de verre, dont on puisse à volonté rétrécir ou élargir l'ouverture inférieure; enfin, la mèche doit être mouchée courte, afin d'éviter la fumée, & que toute l'huile ou l'esprit-de-vin, élevé par la mèche, puisse brûler. A l'égard de la bougie, comme il auroit été très-difficile de lui fournir de l'air par un canal intérieur, & d'employer une mèche circulaire & creuse, j'ai été obligé de me borner à la cheminée extérieure de verre: mais pour que la combustion se

fît toujours à une même hauteur, & que la flamme de la bougie demeurât constamment à l'embouchure de la cheminée de verre, je l'ai renfermée dans un tuyau de fer-blanc, dont elle occupoit toujours le haut, par le moyen d'un ressort à boudin qui la pressoit par-dessous, à la manière des cierges à ressort qu'on emploie maintenant dans la plupart des églises.

Le tuyau de verre dans lequel brûle cette lampe ou bougie, s'adapte à une cheminée de fer-blanc, qui conduit la vapeur dans un serpentin où elle se condense comme on le voit, *figure 5*.

On n'obtient point, dans ces expériences, une quantité d'eau toujours constante; le même combustible en donne plus ou moins, suivant que l'expérience a été suivie avec plus ou moins de soin; mais, comme je l'ai déjà dit, à moins qu'on n'ait opéré très-négligemment, elle excède communément d'un huitième le poids de l'esprit-de-vin. L'augmentation est plus considérable avec l'huile; mais on n'obtient, avec la bougie, qu'un poids d'eau au plus égal à celui de la cire qui a été consommée. On verra dans la suite de ce Mémoire, que cette différence à l'égard de la bougie, tient à ce qu'on ne peut adapter à cette combustion le tuyau intérieur d'airage, & à ce qu'il se forme de la fumée qui se dissipe en pure perte: en effet, en opérant par une autre méthode dont je donnerai bientôt la description, on retire plus de dix-huit onces d'eau de la combustion d'une livre de cire.

Ces augmentations de poids s'expliquent d'une manière toute naturelle, en admettant, comme je l'ai annoncé ailleurs, que l'eau n'est point une substance simple, qu'elle est composée d'air vital & de gaz inflammable. On ne peut douter en effet que l'esprit-de-vin, les huiles, & presque tous les combustibles ne contiennent de l'air inflammable: on en a la preuve en faisant passer ces substances à travers un tube de verre rougi au feu; la matière charbonneuse se dépose dans l'intérieur du tube, & il en ressort de l'air

inflammable mêlé communément d'un peu d'acide charbonneux, & qui tient du charbon en dissolution.

Mais si l'esprit-de-vin & les huiles sont composés principalement d'air inflammable & de substance charbonneuse; si, d'un autre côté, il est démontré que, dans une combustion quelconque, l'air vital, ou plutôt sa base, que j'ai nommé *principe oxygine* se combine avec la substance qui brûle; enfin si principe oxygine, combiné avec l'air inflammable, forme de l'eau, si, combiné avec la substance charbonneuse, il forme de l'air fixe ou acide charbonneux, il est évident que, dans la combustion de l'esprit-de-vin & des huiles, il doit se former de l'eau & de l'acide charbonneux, & que le poids total des matières doit se trouver augmenté de toute la quantité d'air vital qui s'est combiné avec la substance qui a été brûlée. Cette théorie de la combustion est démontrée en partant des bases que j'ai cherché à établir dans mes précédens Mémoires; mais il me restoit à déterminer avec précision les quantités d'eau & d'acide charbonneux formées pendant la combustion des différentes substances, afin d'en conclure la quantité d'air inflammable & de principe charbonneux qu'elles contiennent : c'est l'objet que je me suis proposé à l'égard de quelques-unes, dans les expériences dont je vais rendre compte.

Une première condition de ce genre d'expériences étoit d'opérer la combustion dans des vaisseaux fermés, afin de ne rien perdre, & de pouvoir déterminer la quantité des substances employées & obtenues avant & après l'opération : mais la combustion de l'esprit-de-vin dans des vaisseaux fermés, sur-tout dans l'air vital, présentoit de grandes difficultés; en effet, à 66 degrés du thermomètre de M. de Réaumur, il prend l'état aériforme, & alors, quand il est mêlé avec l'air vital, au lieu de brûler paisiblement, il détonne avec fracas. Cette circonstance ne me permettoit pas d'opérer avec l'esprit-de-vin dans l'air vital, comme je l'avois fait pour le charbon, le phosphore &

quelques autres ſubſtances. Mais, avant de rendre compte des précautions particulières que j'ai priſes pour cette combuſtion, il eſt néceſſaire que je donne une idée de l'appareil dont j'ai coutume de me ſervir dans mes expériences pneumato-chimiques au mercure : il ſeroit peut-être difficile de m'entendre ſans cette connoiſſance préliminaire.

Après avoir eſſayé de différentes matières, je me ſuis déterminé à faire conſtruire en marbre la cuve dont je me ſers pour contenir le mercure.

J'ai donc fait tailler un bloc de marbre *BCDE*, *figures 1, 2 & 3*, de deux pieds de long ſur un pied de large & neuf pouces d'épaiſſeur; je l'ai fait creuſer d'environ quatre pouces pour contenir du mercure; & pour qu'on pût emplir commodément les jarres deſtinées aux expériences, j'y ai fait creuſer une rigole *TV* de quatre autres pouces, *figure 2*. Enfin, comme cette rigole pouvoit être embarraſſante dans quelques expériences, j'ai diſpoſé les choſes de manière qu'on pût la boucher & la condamner au moyen de petites planches qui entrent dans une rainure *xx*.

Avec cet appareil j'opère auſſi en grand ſur le mercure, qu'on a coutume de le faire ſur l'eau, & les tranſvaſions ſe font avec facilité.

Combuſtion de l'Eſprit-de-vin.

C'eſt dans cet appareil, que nous avons fait dans l'air vital, M. de la Place & moi, toutes les combuſtions de charbon & de phoſphore dont nous avons rendu compte dans le Mémoire que nous avons publié ſur la chaleur en 1780. Mais à l'égard de l'eſprit-de-vin, je me ſuis trouvé forcé, comme je l'ai dit, de prendre quelques précautions particulières.

Je me ſuis d'abord déterminé à n'opérer que dans de l'air atmoſphérique, pour éviter le danger d'une détonation; mais comme je ne pouvois pas eſpérer alors de faire durer long-temps la combuſtion, à cauſe de la grande quantité d'air vital que l'eſprit-de-vin conſomme en brûlant, j'ai diſpoſé mon appareil de manière à pouvoir

rendre de l'air vital à meſure qu'il s'en conſommoit. Cet appareil eſt repréſenté, *figure 4*.

On voit en *A* une cloche de criſtal de 15 à 18 pintes de capacité; on conçoit qu'elle doit être très-forte, afin de ſoutenir le poids de mercure qui doit s'y élever.

Sous cette cloche, qui eſt remplie d'air commun, on place une lampe *R* à eſprit-de-vin, dont le poids eſt très-exactement déterminé. On a dû placer ſur la mèche un petit atome de phoſphore, dont on expliquera l'uſage dans un moment. Cette cloche ſe poſe ſur le bain de mercure contenu dans la cuve *BCDE*. Enfin, on élève le mercure en ſuçant avec un ſiphon juſqu'à la hauteur *HI*.

L'intérieur de cette cloche communique par un ſiphon de verre *IKLM*, avec la cloche *S* qui eſt remplie d'air vital, & qui repoſe ſur une cuve d'eau. On peut ouvrir & fermer la communication entre les deux cloches, par le moyen d'un robinet *M*.

Avant de commencer l'expérience, on marque exactement ſur les deux cloches la hauteur de l'eau & celle du mercure; on meſure la hauteur de ces deux fluides au-deſſus de leur niveau, afin de connoître l'état de compreſſion ou de dilatation de l'air ſur lequel on opère; après quoi on allume la lampe *R* avec un fer rouge recourbé qu'on paſſe ſous le mercure: le phoſphore s'allume d'abord, & il communique l'inflammation à la mèche.

Peu de temps après que la lampe a été allumée, on s'aperçoit que ſa flamme diminue de vivacité; alors, pour prolonger la combuſtion, on ouvre le robinet *M*; auſſitôt une portion d'air vital paſſe de la cloche *S* dans la cloche *A*; en même-temps, l'eau monte dans la cloche *S*, & le mercure deſcend dans la cloche *A*, juſqu'à ce que la hauteur des deux fluides ſoit, dans chaque cloche, en raiſon inverſe de leur peſanteur ſpécifique. Il y a alors équilibre, tout demeure en repos, & on referme le robinet *M*. L'air de la cloche *A* étant devenu beaucoup plus propre à la combuſtion, au moyen de l'air vital qui y a été introduit, la lampe *R* y brûle mieux qu'elle n'avoit même brûlé dans le

premier inſtant; le volume d'air diminue de nouveau, le mercure monte; & lorſqu'on voit que la flamme eſt languiſſante, on redonne de nouvel air vital. On peut ainſi rendre deux ou trois fois de l'activité à la flamme, par une introduction d'air vital; mais, peu à peu, la quantité d'air fixe qui réſulte de la combuſtion, s'accumule, & on arrive bientôt au terme où la combuſtion ne peut plus avoir lieu.

Cette expérience ne réuſſit pas toujours, & elle eſt ſouvent contrariée par de petits accidens; un des plus fréquens eſt la fracture de la cloche: la chaleur de la flamme en échauffe quelquefois tellement la voûte, qu'elle caſſe; auſſi, d'un aſſez grand nombre que j'ai faites, n'y en a-t-il eu qu'une ſeule dont je ſois pleinement ſatisfait.

La combuſtion faite, on laiſſe refroidir; on meſure exactement le volume des airs reſtant, en tenant compte de leur état de dilatation & de compreſſion. On détermine enſuite la quantité d'air fixe ou acide charbonneux aériforme qui a été produite, en introduiſant ſous la cloche de l'alkali cauſtique en liqueur. Enfin, l'opération finie, on repèſe la lampe, pour connoître la quantité d'eſprit-de-vin qui a été conſommée.

	gros	grains
Le poids de l'eſprit-de-vin que je ſuis parvenu à brûler dans cette expérience, a été de......	1	21,50.
La quantité d'air vital conſommé par la combuſtion, a été de 220,28 pouces, peſant, à raiſon d'un demi-grain le pouce cube....	1.	38,32.
TOTAL du poids des matières avant la combuſtion..........	2.	59,82.

	gros	grains
La combuſtion finie, il s'eſt trouvé dans la cloche, air fixe ou acide charbonneux, 95,28 pouces, peſant, à raiſon de 0,695 grains le pouce cube............	1	23,28.
De plus, il s'eſt trouvé une quantité d'eau aſſez conſidérable, partie répandue		

en gouttelettes ſur les parois intérieures de la cloche, partie raſſemblée & nageant ſur la ſurface du mercure. On conçoit qu'il auroit été impoſſible de recueillir cette eau, de manière à en déterminer le poids avec exactitude; mais il m'a été aiſé de le conclure par le calcul. On ne peut douter en effet que le poids des matières qui ont ſervi à la combuſtion, ne ſoit le même avant & après l'opération. En ſuppoſant qu'il y eût quelque différence, elle ne pourroit être dûe qu'à la diſſipation de la matière de la chaleur & de la lumière, qui ſeule s'échappe à travers les pores des vaiſſeaux: or, j'ai démontré ailleurs, que ces deux matières n'avoient qu'une peſanteur abſolument inſenſible; je puis donc conclure pour le poids de l'eau . . .

	gros.	grains.
donc conclure pour le poids de l'eau . . .	1.	36,54.
TOTAL du poids des matières après la combuſtion	2.	59,82.
Mais 1 gros 23,28 grains d'acide charbonneux contiennent, air vital	"	68,60.
La quantité totale conſommée dans l'expérience, étoit de	1.	38,32.
Il y a donc eu un excédant employé à faire de l'eau, & qui eſt de	"	41,72.
A quoi ajoutant la quantité de gaz inflammable néceſſaire pour former de l'eau, à raiſon de 15 parties pour 85 d'air vital, & qui eſt de	"	7,36.
On aura, pour la quantité d'eau formée, .	"	49,08.

	gros.	grains.
La quantité existante après l'expérience, étoit de....................	1.	36,54.
Il en existoit donc toute formée dans l'esprit-de-vin.......................	"	59,46.

D'après cela, on pourra récapituler ainsi le produit des substances après la combustion.

	gros.	grains.
Air vital employé à faire de l'acide charbonneux...	"	68,60
Air vital employé à faire de l'eau...............	"	41,72
Charbon contenu dans l'acide charbonneux.........	"	26,68
Gaz inflammable contenu dans l'eau qui s'est formée...	"	7,36
Eau qui existoit dans l'esprit-de-vin avant la combustion..	"	59,46
TOTAL du poids des matières après la combustion..	2.	59,82

Si on retranche de ces quantités l'air vital qui n'a été introduit, dans l'expérience, que comme un moyen d'analyse, il restera pour la composition de 1 gros 21 grains ½ d'esprit-de-vin, les quantités qui suivent:

	gros.	grains.
Charbon..................................	"	26,68
Gaz inflammable..........................	"	7,36
Eau toute formeé.........................	"	59,46
TOTAL................	1.	21,50

D'où l'on conclura,

Composition d'une livre d'Esprit-de-vin.

	onces.	gros.	grains.
Charbon.............	4.	4.	37 ½
Gaz inflammable.......	1.	2.	5 ½
Eau toute formée.......	10.	1.	29
TOTAL.........	1 livre	"	"

Composition

Composition d'un quintal d'Esprit-de-vin.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon..........	28.	8.	4.	6.
Gaz inflammable....	7.	13.	7.	46.
Eau toute formée....	63.	9.	4.	20.
TOTAL....	100.	"	"	"

Enfin, en réunissant ensemble la quantité d'eau existant dans l'esprit-de-vin, avec celle qui s'est formée pendant sa combustion, par la combinaison du gaz inflammable & de l'air vital, on aura pour la quantité résultante de la combustion d'une livre d'esprit-de-vin. 1 livre 2 onces 4 gros 42 grains.

Et pour celle résultante de la combustion d'un quintal.. 116. 1. 2. 24.

Ces résultats s'accordent assez bien avec les premiers aperçus que j'ai donnés sur le même objet, dans mon Mémoire sur la décomposition de l'eau, imprimé en 1781.

Ce phénomène singulier, qu'une substance très-volatile dont tous les principes sont susceptibles de se dissiper pendant la combustion, fournisse néanmoins un résidu, ou plutôt un résultat plus pesant qu'elle-même, avoit échappé jusqu'ici à tous les physiciens: il étoit absolument inexplicable avant qu'on sût que l'air vital se fixoit dans les corps pendant l'acte de la combustion, circonstance dont je crois pouvoir m'attribuer la découverte.

Quoique j'aie lieu de croire ces résultats assez exacts, je dois avertir de deux causes d'incertitude que comporte nécessairement ce genre d'expériences. Premièrement, je n'ai pu déterminer la quantité d'esprit-de-vin brûlé, qu'en pesant la lampe avant & après la combustion; mais il est possible qu'indépendamment de la portion qui s'est brûlée, une autre se soit vaporisée par la chaleur, & que j'aie moins brûlé d'esprit-de-vin, que ne l'indiquoit

la différence du poids. Je ſais que cette quantité ainſi évaporée, ne peut pas être très-conſidérable, puiſqu'autrement il ſe ſeroit fait une détonation dans l'intérieur des vaiſſeaux; mais elle peut être ſuffiſante cependant pour troubler ſenſiblement l'exactitude des réſultats ci-deſſus.

Secondement, il eſt impoſſible de raſſembler l'eau qui ſe forme pendant cette expérience; une partie tapiſſe les parois de la cloche, une autre nage ſur le mercure, & on eſt obligé de conclure ce poids, de celui des matériaux employés: quoique cette méthode paroiſſe ſûre, elle n'eſt pas cependant auſſi ſatisfaiſante que ſi on pouvoit peſer l'eau directement & exactement.

Je ne prétends pas non plus que ce ſoit une manière rigoureuſe d'analyſer l'eſprit-de-vin; indépendamment de l'eau, du charbon & du gaz inflammable qui entrent eſſentiellement dans ſa combinaiſon, il eſt probable qu'il contient encore, en très-petite quantité, quelques autres principes qui échappent à ce genre d'analyſe. Par exemple, l'eau qu'on obtient par cette combuſtion ſous une cloche, eſt légèrement acide, elle rougit le papier bleu, & cette circonſtance indique, ou qu'il exiſte une petite quantité d'acide dans l'eſprit-de-vin, ou qu'il s'en forme pendant ſa combuſtion.

Combuſtion de l'Huile d'Olive.

La combuſtion de l'huile d'olive ne renferme pas autant de cauſes d'incertitude que celle de l'eſprit-de-vin, parce que l'huile d'olive n'étant pas ſuſceptible de ſe volatiliſer aiſément, on peut connoître avec une exactitude rigoureuſe la quantité brûlée, par la différence du poids déterminé avant & après la combuſtion. J'ai donc quelque lieu de penſer que les réſultats que je vais expoſer ne laiſſent rien à deſirer du côté de l'exactitude. J'aurois été cependant plus ſatisfait encore ſi j'euſſe pu répéter l'expérience plus en grand; mais il auroit fallu employer des appareils

extrêmement compliqués, & je doute que je fusse parvenu à des résultats beaucoup plus rigoureux.

L'appareil dont je me suis servi pour la combustion de l'huile, est encore celui représenté, *figure 4*, mais quelques précautions que j'aie prises, la quantité d'huile que je suis parvenu à brûler n'a pas été bien considérable, je n'ai pu la porter qu'à..... 0 grains 19,25.

La quantité d'air vital consommé, s'est trouvée de 124 pouces, pesant, à raison d'un demi-grain le pouce cube........ 0 62,

Ce qui donne pour le poids total des matières employées avant la combustion gros 1 grains 9,25

La quantité d'acide charbonneux aériforme que j'ai obtenu, étoit de 79 pouces $\frac{1}{2}$, ce qui revient, en poids, à.............. 0 grains 54,25.

A l'égard de l'eau qui s'est formée, elle n'a pu être ni rassemblée ni pesée, & j'en ai exposé ailleurs la raison; elle est ici la même que pour l'esprit-de-vin : je l'ai donc conclue par le calcul, & toujours en partant de la supposition, que le poids des matières est le même avant & après l'opération, ce que je regarde comme évident; j'ai eu...................... 0 27,00

TOTAL après la combustion... gros 1 grains 9,25

D'après ces données, & en supposant qu'un quintal d'acide charbonneux soit composé de 72 parties d'air vital & de 28 de charbon, on pourra faire le calcul suivant:

	gros.	grains.
Quantité d'air vital employé à faire de l'acide charbonneux	//	39,06
Quantité employée à faire de l'eau	//	22,94
Quantité de gaz inflammable néceſſaire pour former 27 grains d'eau	//	4,05
Quantité de charbon contenu dans 54 grains $\frac{1}{2}$ d'air fixe ou acide charbonneux	//	15,20
TOTAL	1.	9,25

19 grains $\frac{1}{4}$ d'huile d'olive ſont donc compoſés de

	grains.
Charbon	15,20
Gaz inflammable	4,05
TOTAL	19,25

D'où l'on conclura,

Compoſition d'une livre d'Huile d'olive.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon	//	12.	5.	5.
Gaz inflammable	//	3.	2.	67.
TOTAL	1.	//	//	//

Compoſition d'un quintal d'Huile d'olive.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Charbon	78.	15.	2.	68.
Gaz inflammable	21.	//	5.	4.
TOTAL	100.	//	//	//

Enfin, on voit qu'en brûlant une livre d'huile d'olive avec toutes les précautions convenables, on peut en obtenir 1 livre 6 onces 3 gros 38 grains d'eau ; & d'un quintal, 140 livres 4 onces 1 gros 17 grains.

Il faut, pour arriver à ce résultat, c'est-à-dire, pour obtenir cette quantité d'eau, qu'on ait fourni à la flamme toute la quantité d'air vital nécessaire pour que la combustion soit complète; circonstance qui se rencontre dans les lampes de M.rs Meusnier, Argand, Lange & Quinquet: autrement, c'est-à-dire, si la quantité d'air est insuffisante, il y a bien décomposition de l'huile, c'est-à-dire, séparation de la matière charbonneuse & du gaz inflammable; mais à défaut d'une suffisante quantité d'air vital, il n'y a pas recomposition complète d'eau & d'acide charbonneux, & il s'échappe une portion de charbon & de gaz inflammable libre. C'est cet effet qu'on exprime quand on dit qu'une lampe fume.

Combustion de la Cire.

Cette même méthode appliquée à la bougie, m'a donné également la quantité d'eau qui se forme pendant sa combustion. Je me suis servi, dans cette expérience, d'une simple cloche de cristal remplie d'air vital, & placée sur la cuve de mercure: mais, comme les bougies ordinaires coulent beaucoup dans l'air vital, parce qu'il y a dans cet air beaucoup moins de distance entre la flamme & la cire, qu'il n'y en a dans l'air ordinaire, j'ai été obligé d'employer un lampion de cire.

	pouces
Dans une première expérience, la cloche contenoit, air vital....................	183,51
Il en est resté, après la combustion & l'absorbtion par l'alkali caustique..........	50,41
Donc quantité d'air vital réellement employée.................	133,10

	grains
Cette quantité d'air vital réduite en poids, à raison d'un demi-grain par pouce cube, devoit peser....	66,55
La quantité de cire consommée s'est trouvée de	21,90
TOTAL des matières consommées........	88,45

La quantité d'air fixe ou acide charbonneux qui s'est formé, étoit de 90,046 pouces; & à raison de 06,95 grains le pouce cube, elle devoit peser. . . . . 62,58 grains.

Donc, déficit dû à l'eau qui s'étoit formée, & qui en effet nageoit sur le mercure 25,87

Mais 25,87 grains, d'eau sont composés de

	grains.
Principe oxygine	21,99
Gaz inflammable aqueux	3,88
TOTAL	25,87

Ainsi, des 66,55 grains d'air vital qui ont servi à cette expérience, il en a été employé à former de l'eau . . . . 21,99 grains

Et à former de l'air vital 44,56

TOTAL égal 66,55

Ce qui donne pour la composition de la cire

	grains.
Substance charbonneuse	18,02
Gaz inflammable	3,88
TOTAL	21,90

Composition d'une livre de Cire.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Substance charbonneuse	″	13.	1.	23.
Gaz inflammable	″	2.	6.	49.
TOTAL	1.	″	″	″

Composition d'un quintal de Cire

	livres.	onces.	gros.	grains.
Substance charbonneuse	82.	4.	3.	68.
Gas inflammable	17.	11.	4.	4.
TOTAL	100.	″	″	″

J'ai répété une seconde fois cette expérience avec le même soin, & j'ai obtenu les résultats qui suivent :

	pouces
Quantité d'air vital contenu dans la cloche avant la combustion	194,80
Quantité restante après la combustion, mais avant l'addition de l'alkali caustique	150,30
Diminution opérée par la combustion	44,50
Quantité d'air restante après l'absorbtion par l'alkali caustique	53,51
Donc, quantité d'air vital consommé dans l'expérience	141,29

	grains
Cette dernière quantité d'air vital, à raison d'un demi-grain le pouce cube, devroit peser	70,64
Cire consommée	21,75
TOTAL des substances consommées	92,39
Il ne s'est produit que 96,438 pouces d'air fixe ou acide charbonneux, qui, à raison de 0,695 grains le pouce cube, devoient peser	67,08
Donc, déficit ou eau formée	25,31

Mais 25,31 grains d'eau sont composés de

	grains
Principe oxygine	21,51
Principe inflammable de l'eau	3,80
TOTAL	25,31

	grains
D'où il résulte que sur la quantité d'air vital employé dans l'expérience, & qui étoit de	70,64
Il en a été employé à former de l'eau	21,51
Et par conséquent à former de l'acide charbonneux	49,13

La cire, d'après ces données est composée de

	grains
Matière charbonneuse..........	17,95
Principe inflammable de l'eau....	3,80
TOTAL...........	21,75

D'où l'on conclura

Composition d'une livre de Cire.

	livres.	onces.	gros.	grains.
Substance charbonneuse.........	//	13.	1.	46.
Principe inflammable de l'eau....	//	2.	6.	26.
TOTAL......	1.	//	//	//

Composition d'un quintal de Cire.

Substance charbonneuse........	82.	8.	3.	64.
Principe inflammable de l'eau...	17.	7.	4.	8.
TOTAL.........	100.	//	//	//

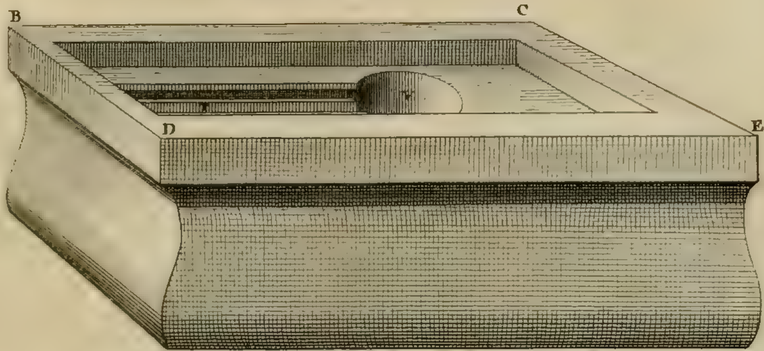
En prenant un milieu entre le résultat de ces deux expériences, on trouve qu'une livre de cire formeroit, en brûlant, une quantité d'eau de 1 livre 2 onces 6 gros 5 grains.

Et qu'un quintal de cire en formeroit................. 117. 3. 7. //

Je dois avertir que dans toutes ces expérienes, le volume des airs doit être corrigé de la variation du baromètre & du thermomètre, & ramené à une pression de 28 pouces, & à une température de 10 degrés du thermomètre de Réaumur. Je suis entré ailleurs dans le détail des calculs qu'exige cette correction.

ESSAI

Fig. 1.



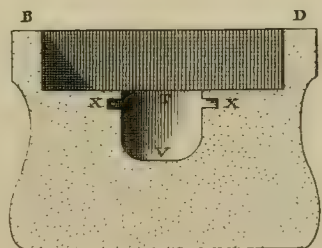
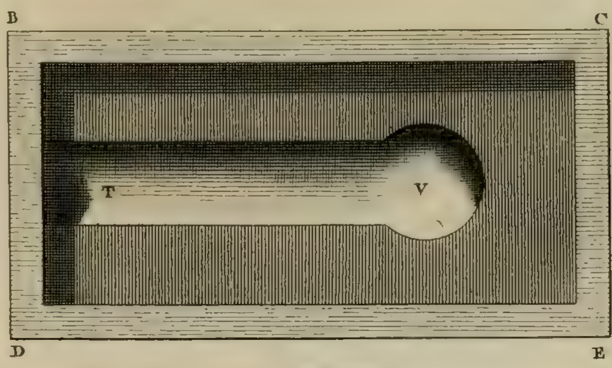


Fig. 2

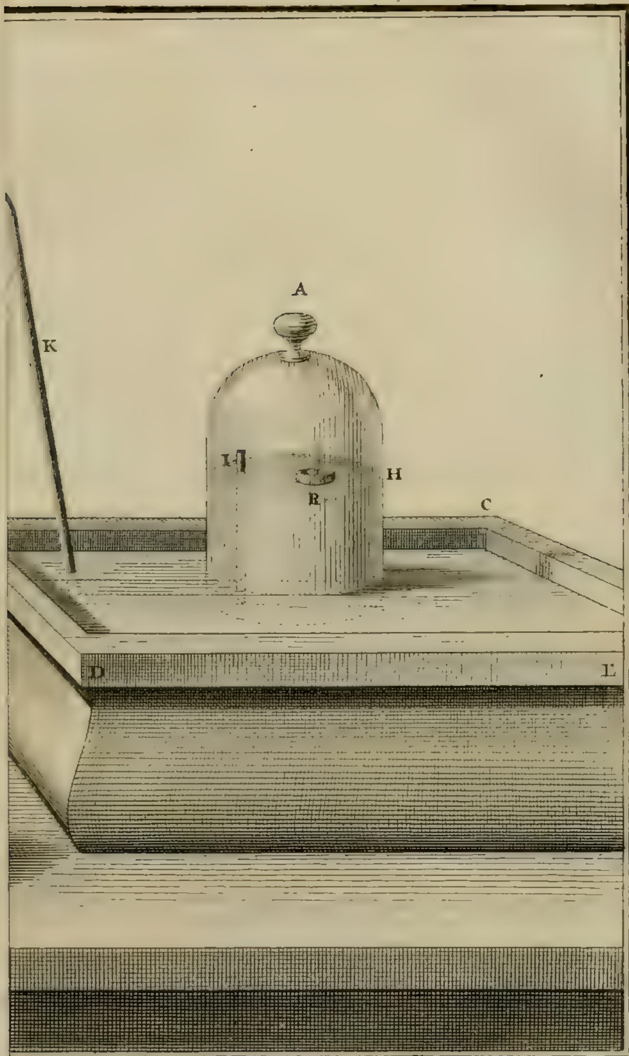
Fig. 3.



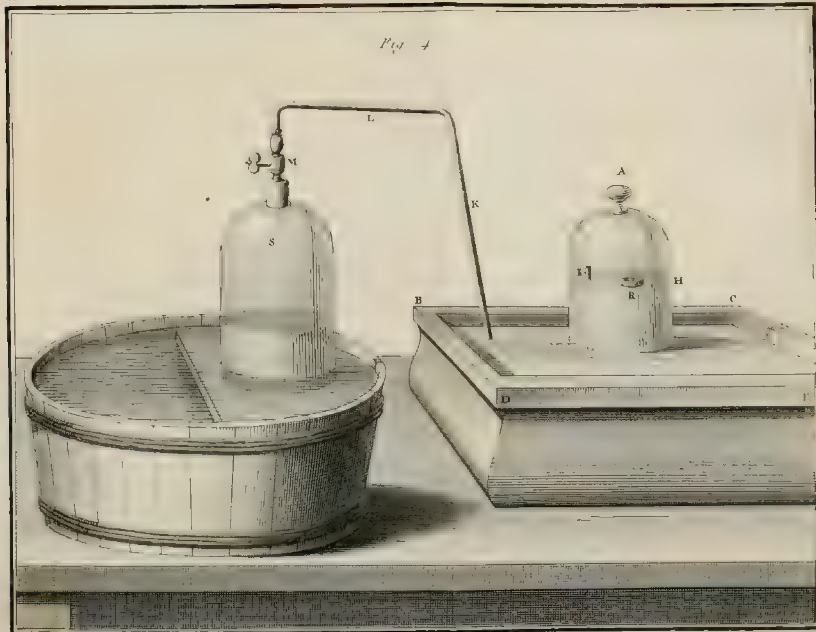
3 6 9 12 *Pouces*

Echelle de deux Pieds

Fossier del *Y. le G sculp*

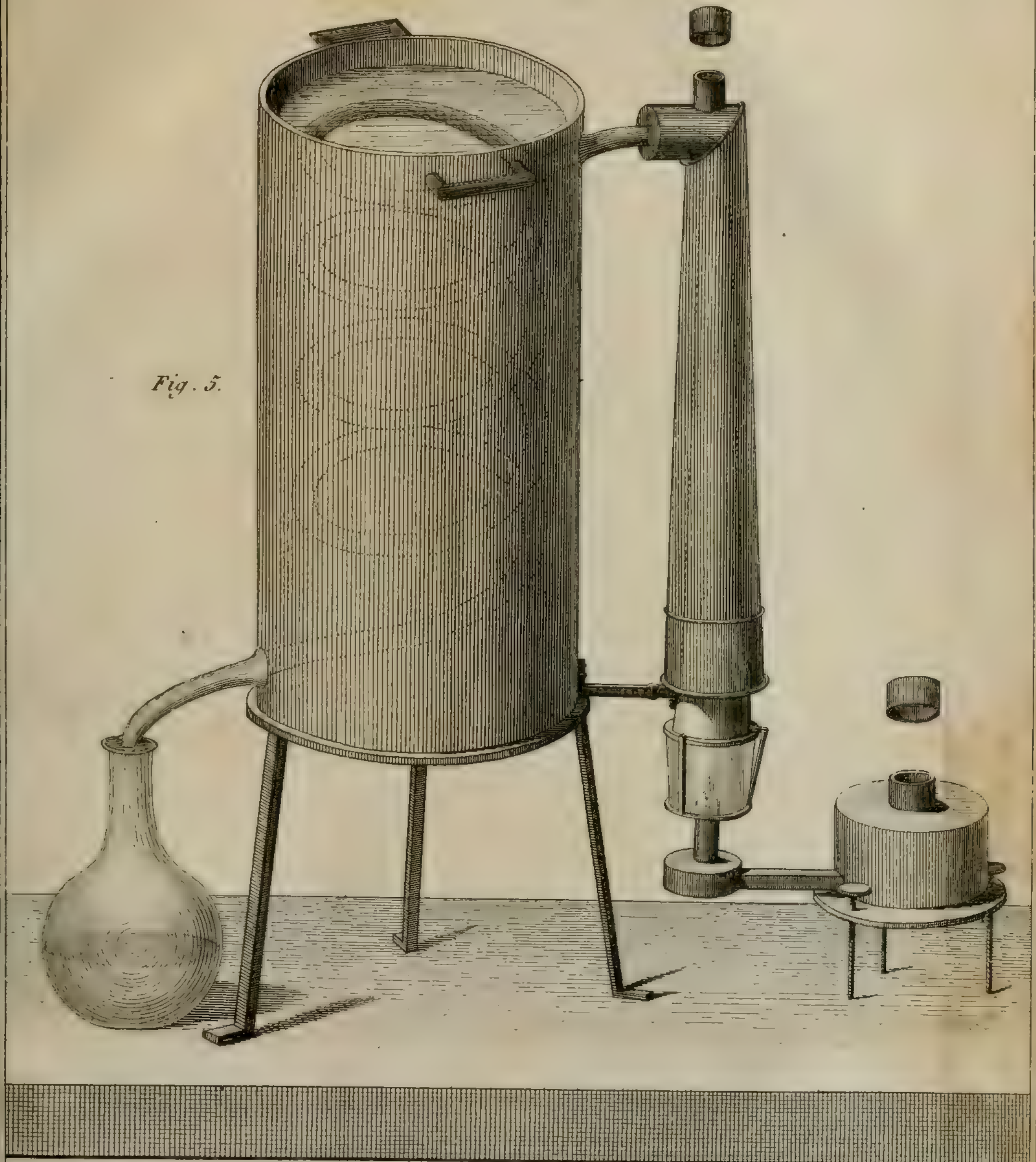


Y. le Gouaz sculp



Y. le Gouaz sculp

Fig. 5.



Echelle de deux Pieds.

Fossier del.

Y. le Gouaz sculp.

ESSAI DE COMPARAISON ENTRE LES MOUVEMENS DES ANIMAUX ET CEUX DES PLANTES.

Et description d'une espèce de Sainfoin, *dont les feuilles sont dans un mouvement continuel.*

Par M. BROUSSONET.

Lû le 31 août 1785.

L'ÉTUDE de la zootomie peut seule, en nous mettant à portée d'établir une comparaison entre les mêmes organes dans les différentes espèces d'animaux, nous éclairer sur les fonctions auxquelles les parties analogues sont destinées dans l'homme. Les anatomistes se sont adonnés à la dissection des animaux, dans un temps où n'ayant point encore perfectionné celle de l'homme, la physiologie ne pouvoit retirer aucun avantage de ces connoissances; dès que l'inspection des cadavres a été permise, & que celle des animaux a pu dès-lors devenir utile, on a paru en négliger l'étude. Les recherches anatomiques ont été faites d'abord sur des êtres dont l'organisation se rapprochoit le plus de celle de l'homme, tels que les quadrupèdes; on n'a examiné que long-temps après quelques espèces qui s'en éloignent un peu plus. On avoit cru que l'inspection des parties, dans les animaux dont la forme a le plus de rapport avec celle de l'homme, faciliteroit la découverte de l'usage de ces mêmes parties; mais cette comparaison n'est pas aussi avantageuse à l'objet que se propose le physiologiste, que celle qui naît du rapprochement des êtres les plus éloignés, & dans lesquels on a de la peine à reconnoître, au premier abord, les traces de l'analogie. Plus les objets diffèrent entr'eux, plus les résultats qui naissent de la

comparaiſon qu'on en fait, ſont lumineux. On ne ſera pas ſans doute ſurpris qu'on ait négligé de faire le rapprochement des eſpèces appartenantes à des règnes différens, puiſqu'il n'avoit pas même été fait entre les animaux des divers ordres, dont les différences ſont bien moins eſſentielles. Les phyſiologiſtes n'ont pas retiré des travaux de Grew, de Malpighi, de M. Duhamel, &c. tous les avantages qu'ils auroient peut-être pu en obtenir pour expliquer pluſieurs phénomènes de l'économie animale. On s'eſt contenté de ſaiſir çà & là un petit nombre de faits iſolés; mais les fonctions les plus importantes, celles qui ont une analogie très-marquée avec ces mêmes fonctions dans les animaux, n'ont été bien connues, dans les plantes, que de nos jours. Les naturaliſtes du dernier ſiècle ſavoient à peine qu'on pût retrouver dans les végétaux des traces de la reſpiration, de la génération & de la circulation. On a cru pouvoir rendre raiſon de quelques-uns de ces phénomènes communs aux deux règnes, en les examinant dans des êtres qui, par leur forme, paroiſſent également appartenir au végétal & à l'animal; mais, outre que ces êtres ſont très-peu connus par les anatomiſtes, ils appartiennent d'ailleurs excluſivement à un ſeul règne, & n'ont de commun avec le règne voiſin, que la forme, preſque toujours accidentelle. La Nature a varié les formes à l'infini, elles caractériſent les eſpèces, c'eſt ce qui paroît lui avoir coûté le moins; leur différence ne conſiſtant que dans des parties plus ou moins alongées, plus ou moins groſſes, placées plus ou moins près de telle ou telle autre partie, le nombre a pu en être beaucoup & facilement augmenté. Son économie ne s'eſt manifeſtée que dans les fonctions qu'elle a toujours établies ſur les mêmes principes, ne leur aſſignant aucune différence dans les eſpèces, mais ſeulement dans les grandes claſſes dont elles ſont en quelque ſorte l'apanage..

Les diverſes parties des plantes jouiſſent de la faculté de ſe mouvoir, mais les mouvemens qu'elles exécutent

ſont d'une nature bien différente de ceux des animaux; les plus ſenſibles, ceux qui ſont produits le plus rapidement dans les plantes, ſont preſque toujours déterminés par quelque cauſe irritante. L'irritabilité, qui n'eſt que la ſenſibilité manifeſtée par le mouvement, eſt une loi générale à laquelle la nature a ſoumis tous les êtres vivans, c'eſt elle qui veille continuellement à leur conſervation; plus puiſſante dans les animaux que dans les plantes, elle peut être ſouvent confondue dans celles-ci avec des phénomènes qui dépendent d'une cauſe bien différente. L'organe qui eſt ſoumis, dans le végétal, à l'action de l'aiguillon, eſt le ſeul qui ſe meuve: jamais l'irritation de pluſieurs parties ne produit, comme dans les animaux, cette prompte combinaiſon de ſenſations, d'après laquelle on voit ſe remuer certains organes, quoiqu'ils ne ſoient pas directement affectés, & qu'ils puſſent d'ailleurs être paſſifs.

Plus l'organiſation eſt parfaite dans les différentes parties des animaux, plus les ſignes d'irritabilité y ſont ſenſibles. Les parties qui ſe rapprochent le plus de celles des végétaux, & dont par conſéquent l'organiſation eſt la plus imparfaite, ſont les moins irritables. La même loi ſe retrouve ſur les plantes, mais avec des réſultats oppoſés; les ſignes d'irritabilité y ſont plus ſenſibles à meſure que les parties ſe rapprochent davantage de celles des animaux, ils ſont nuls dans celles qui en ſont les plus éloignées. Cette aſſertion eſt ſur-tout prouvée par ce qu'on obſerve dans les organes deſtinés, dans les végétaux, à perpétuer l'eſpèce; ces parties ſont, ſuivant toutes les apparences, les ſeules irritables; les feuilles, l'écorce, les tiges & les racines ne donnant aucun ſigne d'irritabilité.

La faculté de ſe reproduire, dans les plantes comme dans les animaux, eſt une fonction propre à l'eſpèce, & ſans laquelle l'individu peut ſubſiſter; mais la nature paroît y avoir attaché dans les plantes beaucoup plus d'importance que dans la plupart des animaux. Tout, dans l'individu végétal, paroît concourir preſque uniquement à ce but; c'eſt pour

le remplir que la végétation a lieu, que les différentes parties se développent; c'est ici que sont prodiguées la variété, la richesse des couleurs, que l'organisation est perfectionnée. Dès que le vœu de la nature est rempli, que les semences ont acquis dans leur capsule le degré de maturité qui leur est nécessaire, les sucs nourriciers cessent de couler dans les vaisseaux, l'individu se dessèche & périt. Les plantes se rapprochent des animaux par les organes de la génération, non-seulement parce qu'ils sont en elles les seules parties irritables, mais encore parce qu'ils sont les seuls qui les fassent jouir en quelque sorte de la vertu de la locomotion. Je crois inutile de détailler ici les mouvemens subits des étamines, des pistils, &c. de plusieurs plantes, dès qu'on les irrite; ces phénomènes sont trop bien connus des physiciens.

Les mouvemens vitaux, dans les plantes, sont ceux qu'on peut observer le plus communément; ils sont lents, entièrement déterminés par des circonstances qui ne manquent jamais de se répéter, & sont répandus également sur toutes les parties. Dans les animaux au contraire, presque tous les mouvemens vitaux sont très-sensibles, tels sont le battement du cœur, celui des artères, la dilatation du thorax, &c. comme ils sont absolument nécessaires à la conservation des individus, ils se reproduisent toujours, dans ceux de la même espèce, d'une manière semblable & dans la même direction, ce qui a également lieu dans les plantes. Les plantes grimpantes, le houblon, par exemple, suit constamment, en s'entortillant autour d'une perche, la direction du midi au couchant.

En interrompant ces sortes de mouvemens dans les végétaux, ceux-ci périssent bientôt; si on détache, par exemple, une plante grimpante dont la direction étoit sur une branche de droite à gauche, & qu'on la place dans une direction contraire, elle se dessèche dans peu, sur-tout si elle n'a pas assez de vigueur pour reprendre sa situation naturelle. On donne de la même manière la mort à un

animal, lorſqu'on arrête quelqu'un de ſes mouvemens vitaux.

La loi par laquelle les plantes ſont forcées à ſe mouvoir de telle ou telle manière, eſt très-puiſſante; lorſque deux plantes grimpantes, dont l'une eſt plus foible que l'autre, viennent à ſe rencontrer, deux chèvre-feuilles par exemple, ils s'entrelacent mutuellement, comme pour augmenter en quelque ſorte leur force; l'un ſe dirige à droite, l'autre à gauche, celui-ci eſt toujours le plus foible, il eſt forcé de prendre une direction contraire à celle qu'il auroit ſuivie s'il ſe fût trouvé hors de la portée de l'autre: mais ſi par quelqu'accident ces deux chèvre-feuilles viennent enſuite à ſe ſéparer, ils reprennent l'un & l'autre leur direction naturelle, c'eſt-à-dire, de droite à gauche.

Les mouvemens eſſentiellement vitaux qui ont, dans les plantes, le plus grand rapport avec ceux des animaux, ſont le cours de la ſéve, le paſſage de l'air dans les trachées, les différentes poſitions que prennent les fleurs de quelques plantes à certaines heures du jour, &c. mais en obſervant la manière dont tous ces mouvemens s'exécutent dans les plantes, nous verrons qu'ils offrent un plus grand nombre de modifications que les mouvemens analogues qui ont lieu dans les animaux. La température de l'atmoſphère, ſon agitation, la lumière, &c. influent beaucoup ſur les mouvemens des plantes, en accélérant ou retardant le cours de leurs fluides; & comme elles ne peuvent jamais changer de place, ces variations produiſent en elles des changemens plus ſenſibles & plus uniformes que dans les animaux.

La rareté des fluides dans les vaiſſeaux des plantes, occaſionne quelquefois des mouvemens particuliers; ainſi dès que les ſemences de la balſamine, de l'alleluia, du ſablier, &c. ſont parvenues à un certain degré de maturité, les ſucs ceſſent de s'y porter, les parties qui compoſent les capſules ſe deſsèchent, & jouiſſant alors de toute leur élaſticité, elles ſe ſéparent ſubitement & jettent à une certaine diſtance les graines qu'elles renfermoient. Cette

action peut être considérée comme vitale puisqu'elle tend à la conservation de l'espèce; mais elle est modifiée, comme on voit, par une cause externe, puisqu'elle est accélérée ou retardée suivant le plus ou moins grand degré de sécheresse ou d'humidité de l'atmosphère.

L'abondance des fluides détermine aussi, dans les plantes comme dans les animaux, plusieurs mouvemens vitaux. L'action prompte des étamines de la pariétaire, l'inflexion des péduncules des fleurs, des pistils, paroissent devoir être attribuées à une cause semblable: ces sortes de mouvemens qui s'observent sur-tout dans les organes destinés à la reproduction de l'individu, n'ayant lieu que dans des circonstances qui les rendent absolument nécessaires, paroissent être en quelque sorte l'effet d'une combinaison particulière; ils ne sont cependant que mécaniques, puisqu'ils sont toujours reproduits de la même manière & dans les mêmes circonstances. C'est ainsi que la rose de Jéricho, & les fruits secs de plusieurs espèces de Mesembryanthemum ne s'épanouissent que lorsque leurs vaisseaux sont remplis d'eau.

Le dégagement subit des fluides produit une espèce de mouvement; c'est à cette cause qu'il faut rapporter un grand nombre de phénomènes qu'on observe dans les feuilles de plusieurs plantes, & qui ne doivent pas être attribués à l'irritabilité. Les glandules qu'on voit au milieu de chaque feuille du *dionæa*, sont à peine piquées par quelque insecte, que celle-ci se replie sur elle-même & saisit aussi-tôt l'animal: la piqûre paroît déterminer un dégagement de fluide qui retenoit la feuille ouverte en remplissant ses vaisseaux. Cette explication est d'autant plus probable, que dans les premiers temps de la végétation de cette plante, lorsque les glandules ne sont presque pas développées, & que probablement les sucs ne coulent pas en abondance dans ses vaisseaux, les feuilles sont repliées sur elles-mêmes de la même manière qu'elles le deviennent après qu'elles ont été piquées par un insecte, lorsque la plante est plus avancée. On observe un phénomène analogue à celui-ci,

ſur les feuilles des deux eſpèces de roſſolis *. Le mécaniſme eſt ici très-facile à apercevoir; les feuilles ſont d'abord repliées ſur elles-mêmes, les ſucs ne ſont point encore portés juſque dans les petits poils dont elles ſont recouvertes, mais après leur développement, la préſence du fluide eſt démontrée par une goutte qu'on voit à l'extrémité de chaque poil; c'eſt en abſorbant ce fluide, que l'inſecte dégorge les vaiſſeaux de la feuille qui ſe replie ſur elle-même & reprend ſon premier état: la promptitude de l'action eſt proportionnée à la quantité de poils touchés par l'inſecte. Ce mouvement pourroit être comparé en quelque ſorte à celui qui a lieu dans l'extrémité d'un animal, laquelle retenue dans un état de flexion par une tumeur dans l'articulation, reprend tout-à-coup ſon ancienne poſition au moment où l'on donne iſſue à l'humeur qui faiſoit obſtacle. Quelques botaniſtes ont donné une explication très-ingénieuſe du mouvement des ſenſitives; ils l'attribuent à des molécules qui s'amaſſent dans les vaiſſeaux de la plante, & qui ſe dégagent au moment de l'attouchement: mais la cauſe eſt ici moins facile à ſaiſir.

* M. Roth.

Les phénomènes qui dépendent de l'abondance des fluides, ſont ſur-tout apparens dans les plantes qui croiſſent dans les endroits humides; le Roſſolis, le Dionæa, ſont de cet ordre; & l'on ſait, d'après les expériences de M.rs Dufay & Duhamel, que les ſenſitives ſont ſur-tout ſenſibles, lorſque le ſoleil eſt caché par des nuages, & que l'air eſt humide & chaud.

L'influence des cauſes externes modifie quelquefois les mouvemens vitaux dans les plantes, de manière qu'on ſeroit tenté de les attribuer à la volonté, comme ceux qui dépendent entièrement de cette faculté dans les animaux. Si l'on met une perche en terre auprès d'une plante grimpante, elle la ſaiſit toujours * pour s'y entortiller, dans quelqu'endroit qu'on la place. La même choſe a lieu pour les vrilles de la vigne qui s'attachent toujours à un bâton qu'on leur préſente, quelque part qu'il ſoit placé, pourvu

* M. Muſtel.

qu'elles puiſſent y atteindre ; mais ces mouvemens ſont entièrement vitaux, la plante grimpante & les vrilles ſe portent ſucceſſivement dans toutes les directions, & ne ſauroient par conſéquent manquer de rencontrer les corps qui ſont à leur portée. Ces mouvemens ont lieu tant que les parties prennent de l'accroiſſement ; dès qu'elles ceſſent de pouſſer, ſi elles n'ont atteint aucun corps pour s'y fixer, elles ſe recourbent ſur elles-mêmes. Une racine pouſſe ſur la paroi d'un foſſé ; ſi elle ſuivoit la ligne horizontale, elle ſeroit bientôt à découvert & périroit ; mais elle ſe recourbe avant d'avoir atteint le foſſé, & comme ſi elle étoit dirigée par une ſorte d'inſtinct, elle pouſſe en en-bas, paſſe au-deſſous du foſſé, remonte du côté oppoſé, & parvenue à la même hauteur où elle étoit d'abord, elle continue de pouſſer horizontalement. Ceci a également lieu lorſque la racine rencontre quelque corps ſolide. Si on met à découvert une racine & qu'on place tout auprès, en évitant pourtant le contact, une éponge pleine d'eau, la racine ſe rapproche de l'éponge, & ſe dirige dans tous les points où on la place ſucceſſivement : cette obſervation démontre, ſur-tout, juſqu'à quel point les mouvemens vitaux dans les plantes peuvent être modifiés par des cauſes externes, & combien ils diffèrent eſſentiellement de ceux que la volonté détermine dans les animaux.

Les mouvemens produits par la préſence des fluides dans les vaiſſeaux, ſont plus ou moins ſenſibles dans les feuilles des différentes eſpèces de plantes. Quelques-unes paroiſſent ne jouir d'aucune ſorte de mouvement, d'autres ont des feuilles ſuſceptibles de ſe mouvoir en différens ſens ; leurs mouvemens ſont ordinairement modifiés par différentes cauſes, mais aucune ne paroît jouir d'un mouvement auſſi ſenſible & auſſi continu qu'une eſpèce de ſainfoin. Cette plante ſingulière a été découverte au Bengale, dans des lieux humides & argileux aux environs de Dacca, par Milady Monſon, que ſon zèle pour l'hiſtoire naturelle avoit déterminé à entreprendre un voyage dans les Indes ;

zèle

zèle d'autant plus louable, que les perſonnes de ſon ſexe ont rarement la force & plus rarement encore le courage de le diriger vers un pareil objet. La mort l'a ſurpriſe au milieu de ſes courſes botaniques. Linné avoit cru devoir conſacrer à ſa mémoire un genre de plante ſous le nom de *Monſonia*. M. le chevalier Banks ayant bien voulu me communiquer les manuſcrits de Milady Monſon, j'en ai extrait les obſervations qui ont rapport aux mouvemens de cette plante, & tels qu'elle les avoit obſervés au Bengale; je les comparerai avec ceux que j'ai eu occaſion d'examiner ſur les individus qu'on cultive dans les ſerres en Europe; mais je crois néceſſaire auparavant de donner la deſcription de cette plante, parce que *Linné* le fils eſt le ſeul auteur qui en ait parlé dans ſon *Supplementum plantarum;* mais il n'a pas vu les fleurs, & ſa deſcription eſt dès-lors incomplette. Je joins encore à ce Mémoire un deſſin, parce que je ne connois aucune figure de cette plante.

Les Indiens la nomment *Burum chandali*. Linné a cru devoir la rapporter au genre d'*hedyſarum* (ſainfoin), & la déſigner ſous le nom ſpécifique de *gyrans* (tournant); je lui conſerverai la dénomination de ſainfoin oſcillant, ou de plante oſcillante, que M. Daubenton lui a donnée dans le cabinet du Roi. Ce nom exprime beaucoup mieux que celui de *gyrans*, les mouvemens de ſes folioles.

La racine eſt ordinairement annuelle, quelquefois biſannuelle, & dans nos ſerres elle dure ſouvent plus de deux ans; elle eſt également branchue & fibreuſe. Les branches partent d'une tige qui s'élève très-peu; elles ſont communément au nombre de ſix ou ſept; elles viennent à la hauteur de trois ou quatre pieds; elles ſont ligneuſes, liſſes, cylindriques, de la groſſeur du petit doigt, ſupportant des rameaux placés alternativement, déliés, plians & recouverts d'un épiderme liſſe & vert: les feuilles ſont diſpoſées alternativement ſur les branches & les rameaux, elles ſont preſque toujours compoſées de trois folioles, rarement & ſeulement vers le bas des tiges ſimples, elles ſont ſoutenues

par un pétiole d'un ou deux pouces de long, légèrement velu & garni à la baſe de deux ſtipules alongées, pointues & rouſſâtres. La foliole intermédiaire, plus longue que le pétiole, eſt ordinairement de trois ou quatre pouces ſur un de large; elle eſt lancéolée, oblongue, unie ſur les bords, très-liſſe, d'un vert pâle, glauque dans le milieu, & légèrement veinée. Les deux folioles latérales qu'on pourroit en quelque ſorte regarder comme des appendices de l'intermédiaire, ſont ſupportées par des pétioles courts, fixés ſur le pétiole commun; elles ſont lancéolées & étroites: on voit à leur baſe de petites ſtipules relevées, ſubulées, caduques & vertes.

Les fleurs forment des épis redreſſés, alongés, qui partent des aiſſelles, ou qui terminent les branches; elles ſont papilionnacées, petites, d'un jaune foncé, ſituées deux à deux & embraſſées par des bractées ovales, aiguës, caduques, & qui ſe recouvrent en partie les unes les autres. Le calice eſt à quatre dents, preſque labié, d'abord vert; mais à meſure qu'il approche de la maturité, il devient rougeâtre & quadrangulaire. La corolle eſt compoſée de cinq pétales, l'étendard *(a)* eſt arrondi, échancré, convergent ſur les côtés, les *(b)* ailes ſont plus courtes que la carène; celle-ci *(c)* eſt preſque ovale, comprimée, de la longueur de l'étendard, & formée par deux pétales réunis. Les étamines *(d)* au nombre de dix, ſont ſéparées en deux corps: neuf ſont réunies entre elles par leurs filamens; la dixième eſt iſolée; chacune ſupporte une anthère alongée & aſſez groſſe. Le germe eſt linéaire, comprimé, ſurmonté d'un ſtyle ſimple, ſubulé, tourné en en-haut, & terminé par un ſtigmate obtus.

Le fruit eſt un légume *(e)* d'environ deux pouces, légèrement recourbé, comprimé, formant un étranglement entre chaque ſemence; celles-ci *(f)* ſont petites, réniformes, comprimées, très-liſſes, griſâtres & marquées d'une tache.

Le ſainfoin oſcillant eſt en fleur au Bengale au mois de ſeptembre; les légumes ont déjà acquis toute leur ma-

turité en novembre, & ils laiſſent pour lors échapper les graines qu'ils renferment. Il fleurit rarement en Europe, & ſa culture demande beaucoup de ſoin; il doit être renfermé dans une ſerre chaude, & n'en ſortir preſque jamais. La première fois qu'on l'a vu en Europe, c'eſt en 1777, en Angleterre, dans le jardin de Lord Bute, à Luton-Park, il y fleurit en mars.

Aucune partie de cette plante ne donne des ſignes d'irritabilité quand on la pique. Dans la journée, la foliole du milieu eſt étendue horizontalement, & eſt immobile; dans la nuit elle ſe recourbe & vient s'appliquer ſur les branches. Les folioles latérales ſont toujours en mouvement, portées alternativement, vers le haut & vers le bas; toute l'action du mouvement eſt dans le pétiole qui paroît ſe contourner: ces folioles décrivent un arc de cercle. Aux Indes, deux minutes ſuffiſent pour faire exécuter aux folioles tout leur mouvement; je ne les ai jamais vues ſe remuer auſſi promptement que cela dans nos ſerres. Le mouvement qui les porte en en-bas eſt plus prompt que celui qui les fait aller en en-haut; le premier eſt même quelquefois exécuté par interruptions, ou du moins il n'eſt point égal. Le mouvement en en-haut eſt au contraire toujours uniforme. Le plus ſouvent chaque foliole ſe meut dans un ſens oppoſé; c'eſt-à-dire, que l'une eſt tournée en en-bas, quand l'autre regarde en en-haut: quelquefois une des folioles eſt ſtable, tandis que l'autre ſe remue; ce mouvement eſt ſi naturel, que ſi l'on vient à l'interrompre, en fixant une des folioles, il recommence dès que l'obſtacle eſt levé.

Le mouvement n'a plus lieu, dès que les grandes folioles ſont agitées par le vent. Dans les animaux, la tranſpiration eſt ſur-tout accélérée par le cours du ſang, par l'action des muſcles, &c. Dans les plantes, où la circulation des fluides eſt très-lente, la perſpiration paroît être augmentée par des cauſes externes, l'agitation de l'air en eſt une des principales, les feuilles qui ſont les organes deſtinés à cette fonction, ſont ordinairemcnt ſoutenues par des pétioles minces & qui leur

permettent de ſe mouvoir en tous ſens, ſi cette ſtructure manque, les organes des végétaux ſont conſtruits différemment ; la chaleur du ſoleil, l'humidité ou une grande abondance de fluides dans des vaiſſeaux conſtruits d'une manière particulière déterminent la perſpiration de pluſieurs plantes. Le Dionœa, le Roſſolis, &c. comme nous l'avons déjà remarqué, croiſſent dans des lieux humides, où les fluides abondent, pluſieurs ſenſitives viennent dans des endroits où l'air eſt très-peu agité ; ou bien celles dont la perſpiration ne peut s'opérer de toutes ces manières, ont un petit nombre de feuilles ordinairement ſucculentes, & recouvertes d'un épiderme très-mince. Quand le ſoleil eſt très-chaud, les folioles du ſainfoin oſcillant ſont auſſi immobiles ; mais, lorſque le temps eſt chaud & humide, ou qu'il pleut, elles ſe meuvent très-bien.

Ce mouvement paroît abſolument néceſſaire à cette plante ; car, dès qu'elle a pouſſé les premières feuilles, il commence à avoir lieu, & il ſe continue même pendant la nuit, mais il s'affoiblit avec le temps ; dans nos ſerres il a lieu, ſur-tout dans la première année ; à la ſeconde il eſt très-peu ſenſible ; dans ſon pays natal, toutes les feuilles ſont en mouvement, jamais je ne les ai vues ſe remuer toutes dans nos ſerres. Dans le moment que la plante eſt le plus chargée de fleurs, que la fécondation des germes a lieu, les folioles ſont beaucoup plus agitées. Dans les plantes comme dans les animaux, le temps de la reproduction des individus eſt toujours celui où tous les organes ſont dans leur plus grande perfection. Dès que le temps de la génération eſt paſſé, les folioles ceſſent de ſe mouvoir ; les ſenſitives ne ſont preſque plus ſenſibles après ce temps, les pétales de pluſieurs plantes ne ſe referment plus périodiquement.

Ce mouvement d'oſcillation eſt tellement naturel à la plante oſcillante, qu'il a non-ſeulement lieu pendant deux ou trois jours ſur les folioles d'une branche qu'on a coupée, & qui a été miſe dans l'eau, mais qu'il eſt même continué pendant quelque temps ſur les feuilles des rameaux



Y. le Gouaz sculp.

qu'on a ſéparés de la plante, & qu'on n'a point mis dans l'eau. Ne peut-on pas, dans ce dernier cas, le comparer en quelque ſorte aux battemens du cœur des animaux, après que cet organe a été arraché? Les feuilles ſemblent tenir lieu de cœur dans les végétaux, elles augmentent par leurs mouvemens le cours des fluides, comme ce viſcère, par ſes contractions détermine la circulation du ſang. Dès que les feuilles ſe ſéparent d'une plante, les progrès de la végétation ſont arrêtés, & les végétaux reſſemblent à ces animaux, dont le ſommeil périodique eſt caractériſé par une diminution dans les battemens du cœur.

Les Indiens, qui ſont de tous les peuples ceux qui s'adonnent le plus à la connoiſſance des plantes, n'ont point manqué de remarquer le mouvement ſingulier des feuilles de celle-ci, & ce phénomène étoit trop extraordinaire pour qu'il ne devînt pas, chez une nation ſuperſtitieuſe, l'objet d'un culte particulier. Ils cueillent à un certain jour de l'année, qu'ils nomment *lunichur*, deux folioles latérales dans l'inſtant qu'elles ſont le plus rapprochées, ils les pilent enſemble avec la langue d'une eſpèce de chouette, & l'amant plein de foi croit, avec cette préparation, ſe rendre favorable l'objet de ſon amour. Je ne crains point de rapporter ce trait d'après Milady Monſon, perſuadé que rien de ce qui a rapport à l'hiſtoire d'une plante auſſi curieuſe que celle-ci ne doit être omis.

Le mouvement, comme nous venons de le voir, eſt un attribut moins eſſentiel aux végétaux qu'aux animaux, pluſieurs plantes ont des parties qui en donnent à peine quelques ſignes, pluſieurs en ont auſſi qui ſont entièrement cataleptiques, ce qui s'obſerve plus rarement dans les animaux, excepté dans ceux qui ſont rapprochés par leur forme du règne végétal; cette ſingularité eſt ſur-tout remarquable dans une eſpèce de dracocephalum de Virginie, dont les péduncules des fleurs conſervent toutes les poſitions qu'on leur donne. Cette plante me paroît devoir être miſe en oppoſition avec celle dont je viens de parler. Son hiſtoire eſt conſignée dans les Mémoires de l'Académie, *année 1712.*

MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ Royale des Sciences établie à Montpellier, ont envoyé à l'Académie le Mémoire ſuivant, pour entretenir l'union intime qui doit être entre elles, comme ne faiſant qu'un ſeul Corps, aux termes des Statuts accordés par le Roi, au mois de Février 1706.

OBSERVATIONS

SUR LA CRISTALLISATION DE L'HUILE DE VITRIOL.

Par M. CHAPTAL.

LE 3 du mois de Janvier 1786, les ouvriers de ma fabrique d'Acides minéraux, en retirant des galères l'huile de vitriol rectifiée, en trouvèrent une cornue qui n'avoit pas le degré de concentration ſuffiſant, & en remplirent une dame-jeanne qu'ils dépoſèrent, ſelon la coutume, dans un coin du hangar : le ſurlendemain, ils voulurent prendre cette huile pour lui faire ſubir une ſeconde rectification; mais quel fut leur étonnement, lorſqu'ils trouvèrent dans la bouteille une maſſe ſolide qui en occupoit le milieu, & d'où partoient des criſtaux qui alloient ſe terminer contre les parois du vaſe! Ils ſe hâtèrent de confier ce prodige à M. Berard, Directeur de ma fabrique, qui m'inſtruiſit du phénomène le lendemain. Je crus

d'abord, qu'on avoit laissé dans le hangar quelque bouteille remplie d'eau, & que les bulles d'air qu'on observe souvent dans la glace, disposées sur la même ligne du centre à la circonférence de la bouteille, en avoient imposé à M. Berard, & que c'étoient-là les cristaux de l'huile de vitriol dont il me parloit; je lui fis part de mes doutes, il s'obstina à me dire que c'étoit une véritable cristallisation d'huile de vitriol.

Mes doutes ne me parurent pas suffisamment éclaircis, mais des occupations réitérées, ne me permirent d'aller à la fabrique que le 18 : on avoit conservé cette bouteille, & l'ouverture en étoit simplement recouverte par un bouchon de terre cuite.

Je ne fus pas peu étonné, lorsque j'aperçus une masse ou groupe de cristaux, qui pesoit au moins 60 livres, puisque mes bouteilles sont ordinairement de cette contenance. Il y avoit dans le fond une couche de 2 pouces d'huile de vitriol, provenant d'un commencement de fonte ou *deliquium* de ces cristaux.

Je m'empressai de casser la dame-jeanne, pour avoir le plaisir de manier ces cristaux, & d'en déterminer la figure. Le thermomètre étoit en ce moment à + 7, l'onctueux de la surface de ces cristaux étoit celui de l'huile de vitriol. Leur température étoit plus chaude au tact que celle de tous les corps voisins; tels que les bois, les pierres, les verres, &c. la couleur étoit d'un jaune rembruni, la cassure lisse, unie & vitreuse.

Je détachai de ce groupe plusieurs cristaux bien formés; &, dans tous, la forme m'a paru un prisme hexaèdre aplati, terminé par une pyramide hexaèdre. Un examen plus approfondi du cristal m'a présenté les formes suivantes:

L'épaisseur du prisme est à peine le quart de la largeur, La pyramide d'un prisme de 8 pouces 7 lignes avoit 11 lignes de longueur.

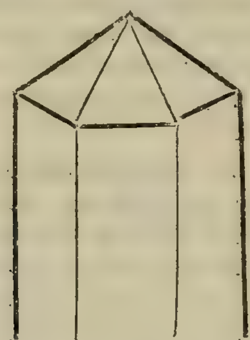
Les deux grands côtés du prisme aplati forment deux

parallélogrammes, les quatre petits s'uniſſent à angle aigu, & forment un angle obtus à leur réunion aux grands côtés du priſme.

Les petits côtés du priſme ſe terminent du côté de la pyramide par une ligne inclinée aux grands côtés du priſme, & qui forme avec eux un angle obtus ; par ce moyen, la pyramide réſulte de l'aſſemblage de ſix triangles iſocèles.

Je n'ai pas trouvé de criſtal à deux pyramides ; ils étoient tous implantés dans une maſſe commune qui occupoit le milieu de la bouteille.

J'ai eſſayé de repréſenter, dans cette figure, la forme de ces criſtaux. Les côtés de la pyramide & du priſme ont à peu-près leurs largeur & dimenſions reſpectives.



À meſure que je maniois les criſtaux à l'air libre & à une chaleur de 7 degrés au-deſſus de 0, il découloit de la maſſe, de l'huile noirâtre qui noirciſſoit le bois, & attaquoit ſi fortement mes mains, qu'elles devinrent luiſantes, calleuſes, & que l'épiderme fut détruit.

Je remplis un vaiſſeau de verre à large ouverture, de 15 à 16 livres de ces criſtaux bien figurés ; je les ai montrés & laiſſé manier, pendant mon cours, à trois ou quatre cents auditeurs, & je les ai conſervés juſqu'au 30 Janvier, alors le *deliquium* a été complet.

L'huile

L'huile de vitriol provenue de la fonte de ces criſtaux, eſt d'un jaune-noirâtre, marquant de 63 à 64 degrés à mon pèſe-liqueur qui donne 66 dans la bonne huile du commerce.

J'ai rectifié avec ſoin une grande partie de l'huile provenue de ces criſtaux tombés en *deliquium*; j'ai adapté pour cet effet à ma cornue un récipient bien luté, & l'appareil des gaz; mais je n'ai retiré que de la très-belle huile de vitriol, & un flegme très-acide: 2 livres 9 onces de ce *deliquium* m'ont fourni 1 livre 10 onces d'huile très-concentrée, & 15 onces d'eſprit de vitriol à 23 degrés.

L'état du thermomètre, depuis la production du phénomène juſqu'à la fonte des criſtaux, a été comme il ſuit:

Les 2, 3, 4, 5 de Janvier, il deſcendit ſous 0 de 2, & même de 3 degrés le 5 au matin; depuis ce jour, il s'eſt conſtamment tenu au-deſſus de 0, & a été juſqu'au 12: ſon terme moyen a été entre 5 & 8.

Ce phénomène me parut nouveau & intéreſſant. Je deſirois un froid aſſez vif pour pouvoir répéter l'expérience, & je commençois à déſeſpérer, lorſque, le 9 Mars, l'air ſe refroidit au point de me faire eſpérer de reproduire ce phénomène. Dans la nuit du 9 au 10, le thermomètre deſcendit à — 1; le lendemain, le thermomètre marquant — 3, je diſpoſai, à 8 heures du matin, des appareils convenables ſur une terraſſe expoſée au levant.

Je me ſervis de capſules de verre pour mes expériences, & mis dans ces vaſes.

1.° De l'huile de ma fabrique, concentrée, blanche comme l'eau, & donnant $66\frac{1}{2}$ au pèſe-liqueur.

2.° De l'huile de vitriol provenant du *deliquium* des premiers criſtaux, & concentrée au 65me degré.

3.° Le flegme provenu de ces concentrations, & marquant 23 degrés,

4.° De l'huile rapprochée par la concentration jusqu'au 64.me degré.

5.° L'huile provenue du *deliquium* des criſtaux, qui avoit été expoſée à l'air pendant trente-ſept jours, & ne marquant plus que 60 degrés.

Ces huiles, plus ou moins fortes, reſtèrent expoſées à l'air tout le jour & toute la nuit du 10 au 11.

Le 11, à 8 heures du matin, le thermomètre marquant — 2, je trouvai, 1.° que l'huile de l'expérience, *n.° 1*, n'avoit éprouvé aucun changement du moins en apparence.

2.° Que celle de l'expérience, *n.° 2*, préſentoit, au fond de la liqueur, ſur les parois du vaſe, une couche de petits criſtaux de la groſſeur d'une tête d'épingle, dont la forme très-bien caractériſée paroiſſoit celle d'un rhombe alongé.

3.° Le flegme marquant 23 degrés, ne préſentoit aucun changement.

4.° L'huile marquant 64 degrés, préſentoit à ſa ſurface trente à quarante criſtaux figurés en rhombes alongés, ayant à peu-près 4 lignes de long ſur 3 de large, & une d'épaiſſeur.

J'ai décanté la liqueur que ſurnageoient les criſtaux, & en ai trouvé une couche de ſemblables au fond du vaſe. L'huile décantée, miſe dans un grand vaſe de verre (le thermomètre montant toujours par la chaleur du ſoleil qui donnoit déjà ſur les murs voiſins), a été convertie preſque toute en criſtaux dans l'eſpace d'un quart d'heure. L'huile qui ſurnageoit, coulée ſur des plaques de verre, s'y figeoit dans la minute, & formoit une ſuite de criſtaux implantés les uns dans les autres; un carreau de vitre enduit de cette huile, s'en eſt recouvert, au point que j'ai retiré 2 onces 7 gros d'huile de vitriol de la fonte de cette eſpèce d'incruſtation.

5.° L'huile provenant du *deliquium* des criſtaux, & affoiblie au 60.me degré par ſon expoſition à l'air, n'a donné

aucun ſigne de criſtalliſation, quoique j'en euſſe rempli des tubes de verre minces, pour que le froid la frappât mieux.

Au plaiſir de répéter mon expérience, j'ai joint la ſatiſfaction de rendre témoins de tous ces phénomènes pluſieurs de mes confrères à l'Académie, tels que M.rs Mourgues, Peyre, Joyeuſe, Bertholon, Brun, &c. Deux d'entr'eux, M.rs Peyre & Joyeuſe, aſſociés-chimiſtes, ont eu le plaiſir de voir ſe former & croître, à vue d'œil, des criſtaux de l'huile décantée de deſſus la première couche criſtalline, & miſe dans une grande capſule. Pluſieurs criſtaux ont acquis, ſous nos yeux, en quelques minutes, une longueur d'un pouce; & nous avons vu que le rhombe qui paroît d'abord, n'eſt qu'un ſegment de priſme, & qu'il s'alonge par l'addition & l'application de nouveaux criſtaux.

Dans le nombre infini de criſtaux qui ſe ſont formés, il y en a avec pyramide, & d'autres ſans pyramide.

Il me paroît réſulter de cette expérience, 1.° que l'huile très-concentrée ne criſtalliſe point; 2.° que l'huile concentrée entre le 63 & le 65 $\frac{1}{2}$ à un aréomètre marquant 66 dans celle du commerce, criſtalliſe facilement; 3.° que le degré de froid convenable eſt depuis — 1 juſqu'à — 3,

Ce fait me paroît nouveau, & je vais le rapprocher de deux connus qui paroiſſoient avoir de l'analogie avec lui.

1.° Meyer rapporte (Eſſais de chimie, *chap. XVIII*) que lorſqu'on rectifie une huile de vitriol bien fumante, telle que celle de Nordhaus, il paſſe des vapeurs qui ſe condenſent, dans le récipient bien luté, en une liqueur que le froid coagule en une matière ſaline: ce ſel fume violemment quand on ouvre le récipient. Le chimiſte d'Oſnabruck a cru que c'étoit une combinaiſon de ſon *cauſticum* avec l'huile de vitriol; & on m'a rapporté que M. de Fourcroy qui a vérifié l'expérience, attribuoit ce phénomène à une combinaiſon particulière de gaz ſulfureux & d'huile de vitriol.

Ce phénomène, très-intéreſſant par lui-même, & ſur-tout

par la manière dont ce dernier chimiſte l'enviſage, ne me paroît avoir aucun rapport avec les obſervations que j'ai rapportées ci-deſſus; 1.° les criſtaux dont j'ai parlé, ne ſe volatiliſent point, ils ſe fondent au feu & ſe réduiſent en huile; 2.° expoſés à l'air, il ne s'en dégage ni fumée ni odeur.

Nous devons à M. le duc d'Ayen de ſuperbes expériences ſur la congélation de l'huile de vitriol: ce célèbre amateur des ſciences profita du froid extraordinaire qu'on éprouva à Paris, à la fin de Janvier 1776, pour expoſer à une fenêtre, dans des ſoucoupes de porcelaine, de l'acide vitriolique à divers degrés de concentration. La nuit du 27 au 28, l'acide concentré ſe gela après 7 ou 8 heures d'expoſition; l'acide affoibli par l'eau, ne donna aucun ſigne de congélation, même après 30 heures.

M. de Morveau a répété l'expérience le 15 Février 1782; & après avoir obtenu de la glace par un froid artificiel de 16 au-deſſous de 0, il ſe convainquit que l'huile pouvoit ſe geler à un froid moindre; & les portions d'huile qui avoient réſiſté à l'impreſſion d'un froid auſſi violent, ſe figèrent à quelques degrés au-deſſus de 0: il obſerva même des ſtries à la ſurface de la glace, ce qui me paroît annoncer un délinéament de criſtalliſation; mais, d'un côté, le rapprochement ou trop forte concentration de la liqueur, & de l'autre, le froid violent qu'on lui appliqua, précipitèrent confuſément les parties intégrantes de l'huile, & ne lui permirent pas un arrangement ſymétrique.

Le manque d'eau de criſtalliſation doit néceſſairement s'oppoſer à la formation des criſtaux; & pour que le phénomène eût lieu, il falloit de l'huile de vitriol qui n'eût été portée, par la rectification naturelle, qu'au 63.me ou 65.me degré, & je ne crois pas qu'on obtienne cet effet en affoibliſſant à ce degré l'huile déjà concentrée; car l'huile de vitriol préalablement concentrée, & enſuite affoiblie par l'eau, ne me paroît pas exactement de la même nature que celle qui eſt portée au même degré par une concentration

naturelle. 1.° Il y a un principe colorant & autres matières qu'on dégage par la rectification, & qu'on ne redonne point par l'addition de l'eau; 2.° l'huile dont on a arrêté la concentration au 64.me degré, ne diſſout pas l'indigo, au point de porter la partie colorante ſur les étoffes; tandis que l'huile bien concentrée & affoiblie par l'eau au même degré, fait du très-beau bleu : ces expériences ont été faites & répétées très en grand dans la fabrique de flanelles de M.rs Iſnel & Luchaire à Montpellier. 3.° Les criſtaux de l'huile au 65.me degré, tombés en *deliquium*, & expoſés à la même température, n'ont plus criſtalliſé, quoique le *deliquium* ne marquât que 64. Ce fait me paroît prouver que l'eau & l'humidité de l'air, qui ſe combinent avec l'acide, y développent & entretiennent une chaleur permanente qui ne le rend pas *impreſſionable* au même degré de froid.

Le 11 au ſoir & le 12, deux onces de ces criſtaux enfermés dans une cornue que j'ai bouchée bien exactement avec un bouchon de liége, & expoſés à une température de + 4 degrés, ne ſont pas tombés en *deliquium*, tandis que les criſtaux qui s'étoient formés dans la grande capſule, & que j'ai laiſſés dans le vaſe, expoſés à une température de + 1, ſont preſque tous tombés en *deliquium*, au point d'être déjà totalement déformés ; ce qui me fait préſumer qu'on pourra garder les criſtaux dans un laboratoire, en mettant le flacon qui les contient, dans un endroit frais: on pourroit eſſayer de plonger le flacon dans l'eau, l'éther ou autre liqueur froide.

Le phénomène que je viens de décrire eſt ſans contredit une véritable criſtalliſation ; mais il paroît ſe rapprocher des congélations, en ce que, dans la première expérience de ma fabrique, tout le liquide s'étoit figé en criſtaux, & qu'il n'y avoit pas une goutte de ce que nous appelons *eau-mère*. Mais il me paroît qu'un ſel quelconque, qui ne ſera tenu en fuſion ou diſſolution que par ſa ſeule eau de criſtalliſation, doit produire des effets ſemblables, ſi on lui applique un froid ſuffiſant pour pénétrer toute la maſſe,

Ce fait me paroît prouver encore que la loi de la criſtalliſation ſi bien préſentée par M.[rs] Linné, de l'Iſle, Sage, Daubenton, Haüy, eſt plus générale qu'on ne l'a cru, & qu'elle s'étend juſqu'à ces matières que nous étions autoriſés à regarder comme des êtres ſimples, avant les belles expériences de M. Lavoiſier.

EXTRAIT
DES OBSERVATIONS ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES,
Faites à l'Observatoire royal, en l'année 1785.

M. le Comte DE CASSINI, Directeur.

M.rs DE VILLENEUVE & RUELLE, Élèves.

Nota. SA MAJESTÉ ayant voulu qu'à commencer du 1.er Janvier 1785, on suivît, à son Observatoire royal, un cours complet & continuel d'observations astronomiques & physiques, a créé trois places d'observateurs, qui, sous les yeux du directeur de l'Observatoire, doivent faire toutes les observations qui peuvent avoir lieu, tant le jour que la nuit, depuis le commencement jusqu'à la fin de chaque année. L'extrait de ces observations & de leurs résultats est imprimé particulièrement tous les ans, & distribué aux principaux Savans de l'Europe: mais l'Académie ayant desiré qu'il fît partie de ses Mémoires, on le trouvera à l'avenir à la fin de chaque volume.

AVERTISSEMENT.

Les nouveaux inſtrumens que Sa Majeſté a commandés pour ſon Obſervatoire royal, ont été commencés cette année, & doivent être achevés dans le courant de 1786. Le ſieur Lenoir eſt chargé de la conſtruction d'un Cercle entier de trois pieds de diamètre; le ſieur Megnié a entrepris celle du Quart-de-cercle mural de ſept pieds & demi de rayon. Ce grand inſtrument eſt exécuté à l'Obſervatoire même, dans un vaſte atelier diſpoſé à cet effet, où ſeront établis à demeure les outils & toutes les principales machines néceſſaires à la conſtruction des grands inſtrumens d'Aſtronomie: une ſpacieuſe fonderie a été bâtie & diſtribuée de la manière la plus commode pour faire des eſſais ſur la fonte en cuivre des différentes parties de l'inſtrument. Ce ſera donc à l'avenir dans le même lieu que ſeront faits & les inſtrumens & les obſervations; l'artiſte & le ſavant réunis ſe prêteront un ſecours réciproque, dont les arts & les ſciences ne peuvent tirer qu'un très-grand avantage.

Sa Majeſté, en confiant la conſtruction des nouveaux inſtrumens de ſon Obſervatoire, à des artiſtes François, a eu principalement en vue de ranimer l'induſtrie nationale, & de mettre les artiſtes de la capitale dans le cas de diſputer à une nation rivale la prééminence qu'elle a depuis quelque temps obtenue dans les arts par les chef-d'œuvres qui ſont ſortis de chez elle. L'on ſait ce que peuvent opérer en France les regards du Souverain; on doit donc juger favorablement des heureux effets que va produire la protection marquée que Sa Majeſté daigne accorder dans cette occaſion aux Artiſtes françois.

En attendant que la conſtruction de ces nouveaux inſtrumens ſoit achevée, nous avons fait uſage de ceux que nous poſſédions précédemment; la plupart appartiennent à l'Académie, qui, autant que ſes facultés le lui ont permis, s'eſt toujours empreſſée à ſeconder nos travaux, & à ſuppléer au dénuement où nous nous ſommes trouvés pendant long-temps par l'état de vétuſté & d'imperfection où étoient réduits les anciens inſtrumens de l'Obſervatoire. Un fonds annuel que Sa Majeſté vient d'affecter à l'entretien & à l'augmentation de nos inſtrumens, nous met aujourd'hui dans une

ſituation

situation bien différente. Nous avons déjà fait l'acquisition d'un superbe télescope de cinq pieds de foyer, de la construction du sieur Dollond, & dont le pouvoir amplifiant, à l'imitation de ceux de M. Herschel, va jusqu'à trois mille fois. Plusieurs autres instrumens de toute espèce, & propres à diverses observations, ont été acquis ou commandés & commencent déjà à former une collection précieuse qui assure à l'avenir la richesse, la gloire & l'utilité de l'Observatoire royal dont l'établissement semble renaître sous une nouvelle forme. La suite nombreuse d'observations dont nous offrons ici les résultats, va faire connoître l'usage que nous avons fait des nouveaux secours que nous avons obtenus : il est nécessaire d'entrer dans quelques explications pour l'intelligence des tableaux dans lesquels nous avons tâché de présenter en raccourci tous les principaux résultats de nos opérations.

Les hauteurs du baromètre, que l'on trouvera parmi les observations météorologiques, ont eté determinées depuis le mois de Juillet, avec un excellent instrument de la construction du sieur Megnié; par le moyen d'une petite cuvette que l'on plonge à chaque observation dans le mercure, & qui se remplit également, on obtient toujours un niveau constant : ce baromètre mesure jusqu'aux centièmes de ligne les variations de la hauteur du mercure; à c'est M. Lavoisier, membre de l'Académie, que nous sommes redevables de cet instrument.

Le thermomètre à mercure, avec lequel nous avons observé la température de l'air, a été construit par le sieur Mossy, d'après les ordres de l'Académie ; la division a été faite sur glace par le sieur Richer, avec le plus grand soin, on y distingue les degrés & dixièmes de degrés.

Un autre thermomètre placé au fond des caves où il reste perpétuellement, a été également construit par ordre de l'Académie, sous l'inspection & la direction de M. Lavoisier: sa construction ingénieuse & particulière a pour objet de déterminer si la température des caves de l'Observatoire est constante, si on peut la prendre pour un terme fixe ; & au cas qu'elle ait quelques variations, d'en rechercher les loix, d'en mesurer l'étendue au centième de degrés près.

La déclinaison de l'aiguille aimantée a été observée avec une aiguille d'acier fondu, de neuf pouces de longueur: nous nous

proposons de faire exécuter incessamment un nouvel instrument pour cette sorte d'observation.

La variation diurne a été déterminée avec une aiguille suspendue à des fils de soie, selon la méthode de M. Coulomb.

Quant aux observations astronomiques, tous les lieux des planètes ont été déterminés par des observations faites dans le méridien, comme étant les plus exactes : les passages ont été pris avec une lunette méridienne achromatique de trois pieds & demi, exécutée par le sieur Charité, artiste François, sur le modèle d'un pareil instrument anglois, de la construction du sieur Ramsden ; & les hauteurs ont été observées avec un quart-de-cercle de six pieds de rayon, construit en 1743, par le sieur Langlois, ce qui à la vérité nécessitoit toujours le concours de deux observateurs ; mais si cette méthode est plus embarrassante, & ne permet pas de faire un aussi grand nombre d'observations qu'avec les instrumens muraux, elle a peut-être l'avantage, en séparant les deux parties de l'observation, d'y employer l'espèce d'instrument qui est la plus propre à chacune. En effet, je ne balancerois jamais, pour l'observation des passages, à donner la préférence à la lunette méridienne sur le meilleur mural, à cause des inégalités du plan de ce dernier instrument, impossibles à éviter, très-difficiles à reconnoître, plus encore à déterminer, sans parler des changemens accidentels dont ce plan est susceptible ; & pour les hauteurs, la difficulté de vérifier un mural, lui donne certainement de l'infériorité vis-à-vis des quarts-de-cercle mobiles, qu'on peut retourner, renverser, & vérifier avec la plus grande facilité & aussi fréquemment qu'on le juge à propos.

Les éclipses des satellites de Jupiter, des étoiles par la Lune, & autres phénomènes instantanés de ce genre, ont été observés avec de très-bonnes lunettes achromatiques à trois verres, de trois pieds & demi de foyer & de quarante-deux lignes d'ouverture, de la construction du sieur Dollond.

Les tables auxquelles nous avons comparé les résultats de nos observations, sont celles que M. de la Lande a rassemblées à la suite de son Astronomie, édition de 1771 ; *les signes + & — que nous avons employés pour l'erreur des tables, indiquent qu'il faut ajouter ou retrancher de la position actuelle déduite des tables, pour avoir celle qui a été observée.*

HISTOIRE PHYSIQUE

de l'année 1785.

SI l'on ne considère les observations météorologiques, que sous un certain point de vue, si l'on n'envisage pour ainsi dire qu'en masse & sans réflexion cette multiplicité de causes accidentelles, momentanées & locales, qui paroissent influer sans cesse sur la constitution de l'atmosphère, & occasionner les changemens continuels de la température; on peut être tenté de croire que le hasard a plus de part que toute autre chose aux phénomènes météorologiques, qu'il est impossible d'y reconnoître des règles certaines, & qu'en conséquence il n'y a qu'une simple curiosité, sans aucune utilité, à les observer. Mais le philosophe instruit, qui examine & approfondit tout avant de prononcer, est bien éloigné de penser ainsi. Plus il a observé la Nature, plus il a pénétré ses secrets, & plus il est persuadé que dans le vaste plan de cet univers il n'est point d'effet sans cause, point d'évènement dû au hasard, point de mouvement sans loix. Les comètes observées pendant nombre de siècles, & prises pour des météores fortuits, ont enfin été reconnues pour des planètes, & rangées au nombre des corps réguliers de notre système. Il y a à peine une vingtaine d'années que l'on fait les observations météorologiques avec l'assiduité & l'exactitude nécessaires; les instrumens qu'on y emploie se perfectionnent tous les jours. Ne pouvons-nous donc pas espérer qu'en redoublant d'attention, en multipliant les observations des phénomènes météorologiques, nous parviendrons quelque jour à découvrir certaines loix, certaines périodes dont la connoissance ne sera pas moins utile à la société, que glorieuse & importante pour la physique.

Les observations de l'état & des variations de l'atmosphère pendant le cours de cette année, ont été faites journellement à l'Observatoire, & répétées à différentes heures du jour & de la nuit. On va rapporter ci-après les résultats généraux, qui seront

ſuivis d'un tableau particulier pour chaque mois, des circonſtances les plus remarquables de la température.

	La plus grande.	*La plus petite.*	*Variation annuelle.*
Hauteur du Baromètre.	pouc. lign. 28. 5,2. 11 Avril.	pouces. 27,0. 29 Mars.	pouc. lign. 1. 5,2.
Hauteur du Thermomètre.			
Expoſé à l'air libre.........	+ 24^{d},2. 26 Juill.	— 8^{d},7. 1 Mars.	32^{d},9.
Placé au fond des caves......	9^{d} $\frac{14}{100}$ 27 Déc.	9^{d} $\frac{21}{100}$ 1 Janv.	$\frac{15}{100}$
Variation diurne de l'aiguille aimantée...	15′ 4″ en Mai.	4′ 7″ en Janv.	13′,7.

Jours de pluie..... 107.
Jours de neige.... 16.
Jours de gelée..... 49.

Quantité d'eau tombée dans l'année. 15^{pouces} 5^{lignes},0.

Déclinaiſon de l'aiguille aimantée, le 1.er Janv. 21^{d} 33′. — le 30 Mai 22^{d} 0′.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	*CIRCONSTANCES & Remarques.*
JANVIER.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 3$^{lign.}$,8 le 23. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 1$^{lign.}$,0 le 2. — Huit jours de pluie, 9^{lignes},2 d'eau. Un jour de neige.	Plus grande hauteur + 9^{d},1 le 5. Plus petite hauteur — 2^{d},5 le 24. — Huit jours de gelée.	S. S. O. E. S. E. S. E.	Il y a eu pendant ce mois, quinze jours de brume & de brouillard; il a été épais particulièrement les 12, 13, 20, 21, 23 & 25. Très-mauvais temps les 5, 6 & 9. Le vent a été très-grand les quatre derniers jours du mois, de l'O. au S.
FÉVRIER.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 5$^{lign.}$,0 le 12. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 0$^{lign.}$,8 le 22. — Trois jours de pluie, 1$^{pouc.}$ 1$^{lign.}$,9. Dix jours de neige.	Plus grande hauteur + 5^{d},5 le 7. Plus petite hauteur — 7^{d},5 le 28. — Quatorze jours de gelée.	N. N. O. S. S. E. N. N. E.	Il n'y a eu que quatre jours de brume. Les vents ont été très-forts pendant ce mois, particulièrement les 27 & 28.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & Remarques.
MARS.	Plus grande hauteur 28pouc. 3lign.,3 le 17. Plus petite hauteur 27pouc. 0lign.,0 le 29. Trois jours de neige. Un jour de grêle.	Plus grande hauteur + 7d,8 le 21. Plus petite hauteur — 8d,7 le 1. Treize jours de gelée.	N. N. E. N.	Il y a eu pendant ce mois dix jours de brume & brouillard. Plusieurs jours de fort beau temps. Une aurore boréale foible le 22.
AVRIL.	Plus grande hauteur 28pouc. 5lign.,2 le 11. Plus petite hauteur 27pouc. 4lign.,0 le 2. Cinq jours de pluie, 6lignes,2 d'eau. Un jour de neige.	Plus grande hauteur + 17d,4 le 18. Plus petite hauteur — 0d,7 le 3. Un jour de gelée.	N. E. N. E. N. N. E.	Il y a eu pendant ce mois sept jours de brume. Généralement très-beau temps, sur-tout vers la fin du mois.
MAI.	Plus grande hauteur 28pouc. 4lign.,5 le 13. Plus petite hauteur 27pouc. 8lign.,0 le 18. Cinq jours de pluie, 3lignes d'eau.	Plus grande hauteur + 21d,0 le 24. Plus petite hauteur + 5d,8 le 22.	N. N. E. O. S. O. O. N. O.	Il y a eu cinq jours de brume, particulièrement le 5 de ce mois. Aurore boréale le 23. Grande sécheresse pendant tout le mois. Il n'a commencé que le 27 à tomber quelques gouttes d'eau : les jours suivans la pluie a été forte.
JUIN.	Plus grande hauteur 28pouc. 3lign.,8 le 10. Plus petite hauteur 27pouc. 9lign.,1 le 5. Neuf jours de pluie, 22lignes,8 d'eau. Un jour de grêle.	Plus grande hauteur + 22d,2 le 27. Plus petite hauteur + 4d,8 le 24.	O. S. O. N. N. E. N. E.	Il a tonné les 8 & 28.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	*CIRCONSTANCES & Remarques.*
JUILLET.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 3$^{lign.}$,4 le 9. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$,0$^{lign.}$,4 le 29. Quinze jours de pluie, 2$^{pouc.}$ 4$^{lign.}$,5 d'eau.	Plus grande hauteur + 24^{d},2 le 26. Plus petite hauteur + 10^{d},2 le 24.	N. O. O. S. O. S. O.	Il y a eu quelques coups de tonnerre le 20.
AOÛT.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 3$^{lign.}$,7 le 27. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 7$^{lign.}$6 le 3. Douze jours de pluie, 2$^{pouc.}$ 0$^{lign.}$6 d'eau.	Plus grande hauteur + 20^{d},3 le 2. Plus petite hauteur + 6^{d},3 le 27.	S. S. O. O. S. E.	Le vent a été toujours très-fort pendant ce mois, principalement les 4 & 13. Tonnerre les 2, 3, 4 & 5. Léger brouillard le 23.
SEPT.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 4$^{lign.}$,7 le 29. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 3$^{lign.}$,7 le 25. Quinze jours de pluie, 1$^{pouc.}$ 10$^{lign.}$ d'eau.	Plus grande hauteur + 19^{d},5 le 19. Plus petite hauteur + 7^{d},6 le 29.	S. O. S. S. O. S. O.	Le vent a été communément très-fort & des plus violens les 6 & 25. Tonnerre le 23. Sept jours de brume & brouillard.
OCTOBRE.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 4$^{lign.}$,9 le 14. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 8$^{lign.}$,3 le 8. Quatorze jours de pluie, 1$^{pouc.}$ 10$^{lign.}$,4 d'eau.	Plus grande hauteur + 15^{d},5 le 12. Plus petite hauteur + 0^{d},3 le 27.	S. S. O. S.	Il y a eu quinze jours de brouillard. Vents violens les 12 & 28.

TABLEAU MÉTÉOROLOGIQUE.

1785.	BAROMÈTRE.	THERMOMÈTRE.	VENTS dominans.	CIRCONSTANCES & *Remarques.*
NOVEMB.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 4$^{lign.}$,6 le 17. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 1$^{lign.}$,5 le 30. Douze jours de pluie, 2$^{pouc.}$ 1$^{lign.}$,5 d'eau.	Plus grande hauteur + 12^{d},5 le 5. Plus petite hauteur − 1^{d},9 le 18. Deux jours de gelée.	S. O. S. O.	Il y a eu quatorze jours de brouillard. Vents violens les 1, 19, 26 & 28.
DÉCEMB.	Plus grande hauteur 28$^{pouc.}$ 3$^{lign.}$,5 le 18. Plus petite hauteur 27$^{pouc.}$ 0$^{lign.}$,7 le 1. Six jours de pluie, 0$^{pouc.}$ 6$^{lign.}$,9 d'eau, 4 jours de neige.	Plus grande hauteur + 8^{d},9 le 19. Plus petite hauteur − 7^{d},8 le 31. Onze jours de gelée.	S. O. E. S. E. N. E.	Il y a eu dix jours de brouillard. Vent violent les 2, 6 & 29.

HISTOIRE CÉLESTE

De l'année 1785.

L'ASTRONOMIE n'attend sa perfection que du temps, elle est l'élève des siècles. Le génie, par des découvertes heureuses, peut bien à la vérité hâter quelquefois la marche lente de ses progrès; mais il a beau faire, s'il n'a derrière lui une longue suite d'observations sur laquelle il puisse s'appuyer & construire, ses efforts seront inutiles, il ne bâtira que des systèmes.

Chaque année n'ajoute communément que peu de chose aux lumières de l'Astronomie; mais ce peu de chose, en s'accumulant, devient au bout d'un ou plusieurs siècles, la base & le fondement de quelque grande & belle théorie. Il est des temps plus heureux que d'autres, où la rencontre de certaines circonstances, l'apparition de quelque phénomène particulier, augmentent tout-à-coup nos connoissances, découvrent ou confirment quelque vérité nouvelle ou soupçonnée. Notre siècle sans doute a été l'un des plus favorisés de ce côté: deux passages de Vénus sur le Soleil, dans l'espace de neuf années, ont enfin fixé la parallaxe du Soleil, l'un des élémens les plus importans de l'Astronomie; mais s'il reste encore quelque doute sur cette détermination intéressante, ce ne sera qu'en 1874, c'est-à-dire, au bout de cent cinq ans que le retour du même phénomène pourra en procurer la vérification. Une nouvelle planète vient, en 1781, d'être ajoutée à notre système; quatre années d'observations nous ont fourni une ébauche de sa théorie: la révolution de ce nouvel astre paroît être de quatre-vingt-trois ans; ce ne sera donc que dans quatre ou cinq siècles, qu'après l'avoir observé assiduement plusieurs fois dans les mêmes points de son orbite, l'on pourra parvenir à une exacte connoissance de ses mouvemens. Plus de quarante comètes ont été aperçues & observées depuis quatre-vingt-cinq ans, & leur retour ne doit avoir lieu au plus tôt que dans le siècle prochain. En attendant, presque chaque année nous en

en fait découvrir quelques nouvelles au retour desquelles nos successeurs devront également veiller, pour parvenir à déterminer la durée de leur révolution. Si cette connoissance précieuse est réservée aux siècles futurs, au moins est-il vrai qu'ils nous en seront redevables, puisque ce sont nos observations comparées aux leurs qui serviront de base; ainsi l'on pourroit en quelque sorte comparer les travaux des Astronomes, à ceux de ces respectables pères de famille, qui travaillent & n'amassent que pour la jouissance de leurs enfans & pour enrichir leur postérité.

On voit donc combien peut devenir intéressante, précieuse même un jour, pour les progrès de l'Astronomie, la collection suivie d'observations astronomiques que nous commençons à rassembler. Dans le cours de cette année, par exemple, nous avons déterminé près de cent quatre-vingts lieux de planète, & fixé l'erreur de la théorie dans les divers points de leurs orbites, où l'on avoit peu coutume de les suivre auparavant. Cette vérification répétée pendant plusieurs années, à chaque révolution & dans les mêmes points, ne peut manquer de nous conduire à une connoissance complète des mouvemens célestes, de leurs inégalités, & des équations par lesquelles on peut les représenter. Dès-lors on conviendra que l'Astronomie nous sera redevable de quelque chose, & beaucoup plus, peut-être, que si nous eussions fait une découverte même brillante, mais souvent peu utile aux progrès de la science. C'est cette persuasion qui ne cesse d'animer le zèle de nos coopérateurs (1), & leur donne la force, le courage & la patience, en s'adonnant entièrement à la pratique de l'Astronomie, de s'exposer aux fatigues de l'observation & des veilles, & de surmonter l'ennui & les difficultés des calculs astronomiques, dont les tableaux suivans vont offrir les résultats.

---

(1) M.rs de Villeneuve & Ruelle, Élèves.

LE SOLEIL.

Il n'y a eu cette année aucune éclipse de Soleil visible à Paris: celle du 9 Février n'a eu lieu que pour l'Afrique & l'Asie; elle a dû être centrale & totale au Congo: celle du 4 Août a dû être centrale & annulaire dans l'Amérique septentrionale.

Il a paru de temps en temps quelques taches sur le disque du Soleil, mais elles ont été peu considérables.

Au mois de Mars, on a observé

La hauteur du bord supérieur du Soleil, le 21 . . . 41^d 57′ 50″,2.

D'où l'on conclud { la déclinaison vraie du centre. 0. 31. 0, *bor.*
l'heure de l'équinoxe, le 19 à 16^h 34. 49.

Au mois de Juin, on a déterminé

La hauteur solsticiale du centre du Soleil . . . . 64. 37. 47.

D'où l'on conclud

L'obliquité de l'écliptique apparente . . . . 23. 27. 59.

Au mois de Septembre, on a observé

La hauteur du bord supérieur du Soleil, le 22 . . . 41^d 31′ 36″,8.

D'où l'on conclud { la déclinaison vraie du centre. 0. 4. 26 *bor.*
l'heure de l'équinoxe, le 22 à 4^h 33. 8.

On a déterminé, par observation, le passage du centre du Soleil dans le parallèle de plusieurs Étoiles, ainsi qu'on le voit dans le Tableau suivant.

				Differ. d'asc. dr.
Passage du Soleil dans le parallèle de	α de l'Hydre	le 27 Févr.	à 21^h 10′ 30″	157^d 29′ 41″0.
	i d'Orion	4 Mars	5. 53. 30	95. 24. 22,0.
	β de l'Éridan	5 Mars	19. 30. 26	" " "
	σ d'Orion	7 Avril	5. 58. 56	150. 39. 14,0.
	δ du Lion	16 Avril	2. 49. 33	130. 21. 32,0.
	Arcturus	20 Mai	21. 57. 40	" " "
	π du Serpent	16 Juin	12. 33. 59	" " "
	v d'Hercule	24 Juillet	10. 30. 7	118. 25. 29,0.
	Sirius	6 Nov.	17. 41. 55	" " "
	β de la Baleine	16 Nov.	22. 7. 3	135. 2. 38,6.
	γ du Lièvre	5 Déc.	7. 16. 3	191. 5. 50,5.

VÉNUS.

Cette Planète a achevé, dans le courant de cette année, deux révolutions moins quatre ſignes treize degrés trois quarts autour du Soleil, & s'eſt trouvée

DANS SON NŒUD		EN CONJ.	Dans ſa plus grande digr.		STATIONNAIRE.		ÉCLIPSÉE par la LUNE.
Deſcend.	Aſcendant.	Inférieure.	Occident.	Orientale.			
2 Juin.	23 Sept.	29 Mai.	2 Août.	28 Mars.	8 Mai.	19 Juin.	12 Avril.

On a déterminé, par obſervation, quarante-deux lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les réſultats ſuivans :

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE.		Lieu obſervé de VÉNUS.		Erreur des Tables.	
			Aſcenſ. droite.	Déclinaiſon.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Janv. 12	2. 34. 22,0	ε Baleine.	37, 18. 1,0	12. 47. 31,0A.	330. 43. 5,0	0. 32. 30A.	+0. 24	+0. 6
Mars 1	2. 44. 48,0	ο du Lion.	142. 25. 39,0	10. 51. 41,0B.	26. 34. 5,0	1. 25. 13B	1. 4	0. 22
2	2. 45. 7,0	α Écreviſſe.	131. 41. 11,0	12. 40. 43,0	27. 39. 13,0	1. 30. 12	0. 49	0. 25
3	2. 45. 24,3	*Idem.*	131. 41. 11,0	12. 40. 43,0	28. 44. 11,0	1. 35. 15	0. 33	0. 28
Avril 5	2. 52. 10,0	ζ du Lion.	151. 11. 4,0	24. 28. 47,0	61. 2. 42,0	4. 10. 6	0. 33	0. 27
7	2. 51. 45,0	ε du Lion.	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	62. 41. 3,0	4. 17. 32	0. 59	0. 35
9	2. 51. 8,5	*Idem.*	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	64. 15. 18,0	4. 24. 23	0. 42	0. 38
10	2. 50. 45,0	*Idem.*	143. 24. 48,0	24. 25. 13,0	65. 1. 4,0	4. 27. 30	0. 30	0. 34
11	2. 48. 48,0	μ du Lion.	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	66. 30. 25,0	4. 33. 29	0. 45	0. 29
15	2. 47. 49,4	*Idem.*	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	68. 36. 28,0	4. 41. 44	0. 38	0. 54
17	2. 46. 8,0	*Idem.*	145. 8. 18,0	24. 25. 13,0	69. 54. 59,0	4. 46. 10	0. 28	0. 54
25	2. 35. 28,5	α Cour.	231. 24. 32,0	27. 26. 43,0	74. 15. 49,0	4. 55. 5	0. 12	0. 35
29	2. 27. 18,6	*Idem.*	231. 24. 32,0	27. 26. 43,0	75. 48. 45,0	4. 53. 32	—0. 9	0. 41
Mai 1	2. 22. 21,5	ε Bouvier.	218. 54. 49,2	27. 59. 8,0	76. 24. 22,0	4. 50. 41	0. 8	0. 39
4	2. 13. 47,3	*Idem.*	218. 54. 49,2	27. 59. 8,0	77. 2. 40,0	4. 43. 46	0. 19	0. 38

1785	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de VÉNUS.		Erreur des Tables.	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*M. S.*
Mai	2. 10. 38,5	α Cour.	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5 B.	77. 11. 34,0	4. 40. 42 B.	+0. 1	+0. 51
6	2. 7. 17,3	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 17. 53,0	4. 37. 5	—0. 3	0. 36
8	2. 0. 4,0	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 24. 5,0	4. 28. 41	+0. 3	0. 40
9	1. 56. 9,0	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 23. 24,0	4. 23. 37	—0. 15	0. 35
10	1. 52. 7,2	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 20. 39,0	4. 18. 15	0. 5	0. 26
11	1. 47. 53,6	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 15. 35,0	4. 12. 28	0. 16	0. 35
12	1. 43. 29,5	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	77. 7. 55,0	4. 5. 53	0. 4	0. 26
14	1. 34. 4,4	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	76. 45. 19,5	3. 51. 23	0. 26	0. 17
15	1. 29. 6,8	*Idem.*	231. 24. 33,5	27. 26. 40,5	76. 30. 27,0	3. 43. 42 B.	0. 34	0. 35
Juin 9	22. 49. 35,9	γ d'Herc.	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	63. 1. 31,0	1. 40. 50 A.	0. 23	+0. 12
10	22. 44. 1,3	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	62. 38. 18,0	1. 53. 13	0. 28	0. 31
11	22. 33. 35,0	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	62. 17. 13,0	2. 4. 10	0. 34	0. 4
12	22. 33. 19,6	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	61. 58. 59,0	2. 14. 47	0. 6	+0. 11
23	21. 45. 27,2	α d'Herc.	256. 13. 13,5	14. 39. 5,0	61. 7. 13,0	2. 42. 25	0. 8	—0. 11
Juill. 24	20. 49. 0,9	γ d'Hercule	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	77. 52. 36,0	4. 6. 26	+0. 57	0. 9
25	20. 48. 32,0	*Idem.*	243. 7. 27,0	19. 39. 55,0	78. 41. 54,0	4. 3. 59,5	0. 28	0. 5
Août 6	20. 47. 13,5	*Arcturus.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	89. 26. 37,0	3. 25. 37 A.	—1. 40	0. 7
11	20. 48. 47,2	*Idem.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	94. 16. 19,7	3. 6. 38	+1. 51	+0. 28
12	20. 49. 14,0	*Idem.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	95. 15. 35,0	3. 2. 11	1. 48	+0. 6
16	20. 51. 19,1	*Idem.*	211. 29. 19,2	20. 18. 18,0	99. 14. 53,0	2. 45. 11,0	1. 18	—0. 4
19	20. 53. 15,0	ε Pégase.	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	102. 17. 43,0	2. 32. 11	0. 41	+0. 22
26	20. 58. 48,6	*Idem.*	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	109. 37. 47,0	2. 0. 33	0. 49	—0. 13
29	21. 1. 29,0	*Idem.*	318. 2. 36,0	18. 53. 51,0	112. 50. 45,0	1. 46. 55	1. 7	—0. 9
Oct. 23	21. 52. 24,3	α Baleine.	43. 47. 5,1	3. 14. 43,0	176. 27. 38,0	1. 28. 46 B.	0. 56	+0. 23
Nov. 15	22. 5. 26,8	Rigel.	76. 4. 31,9	8. 27. 27,0	204. 39. 32,0	1. 45. 44	0. 46	+0. 2
28	22. 11. 59,8	γ Éridan.	57. 1. 28,6	14. 7. 36,6	220. 47. 57,0	1. 36. 30	1. 7	—0. 5
Déc. 7	22. 17. 9,8	*Syrius.*	98. 55. 42,5	16. 25. 32,7 A.	232. 1. 20,0	1. 23. 54	0. 41	+0. 22

MARS.

Cette Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 212^d 5$'$ autour du Soleil, & s'eſt trouvée

EN QUADRATURE.	DANS SON NŒUD aſcendant.	STATIONNAIRE.	EN OPPOSITION.
14 Août.	24 Octobre.	21 Octobre.	27 Novembre.

On a déterminé, par obſervation, vingt-deux lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les réſultats ſuivans:

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppſoée de l'ÉTOILE.		Lieu obſervé de MARS.		Erreur des Tables.	
			Aſcenſ. droite.	Déclinaiſon.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Août 10	17. 47. 32,0	*e* Pégaſe.	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4B.	50. 5. 36,0	1. 49. 17A.	—1. 53	—0. 24
11	17. 46. 4,7	*γ* Dauphin.	309. 11. 20,8	1. 21. 58,7	50. 41. 5,0	1. 48. 53	1. 11	0. 17
16	17. 38. 49,0	*α* Flèche.	292. 38. 4,0	17. 32. 10,4	53. 32. 19,0	1. 45. 45	1. 36	0. 23
19	17. 34. 23,5	*Idem.*	292. 38. 4,0	17. 32. 10,4	55. 12. 9,0	1. 43. 44	2. 5	0. 23
26	17. 23. 51,3	*e* Pégaſe.	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4	58. 55. 23,0	1. 38. 18	2. 19	0. 25
27	17. 22. 18,7	*Idem.*	318. 2. 35,5	18. 53. 51,4	59. 26. 18,0	1. 37. 23	2. 12	0. 26
Oct. 23	15. 0. 6,8	*α* Bélier.	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 14. 54,0	0. 2. 41	3. 27	0. 44
25	14. 51. 48,8	*Idem.*	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 6. 35,0	0. 2. 42 B.	3. 43	+0. 43
26	14. 47. 35,1	*Idem.*	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	75. 1. 39,0	0. 5. 30	3. 13	0. 44
Nov. 7	13. 50. 36,8	*Idem.*	28. 47. 28,5	22. 26. 49,6	72. 48. 52,0	0. 40. 42	4. 33	0. 47
15	13. 7. 18,4	Alcyone.	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	70. 21. 6,0	1. 5. 5	4. 33	0. 44
16	13. 1. 38,9	*Idem.*	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	70. 0. 13,0	1. 8. 10	4. 18	0. 47
17	12. 55. 56,4	*Idem.*	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	69. 39. 2,0	1. 11. 2	4. 43	0. 38
21	12. 32. 47,7	*Idem.*	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	68. 10. 50,0	1. 22. 42	4. 10	0. 43
28	11. 51. 15,4	*Idem.*	53. 42. 20,4	23. 26. 0,0	65. 31. 15,0	1. 41. 21	4. 12	0. 34
Déc. 7	10. 58. 43,2	*δ* Gémeaux	106. 59. 21,0	22. 21. 31,0	62. 21. 12,0	2. 0. 54	4. 15	0. 32
9	10. 47. 18,7	*α* Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	61. 44. 21,0	2. 4. 41	4. 9	0. 45
10	10. 41. 39,0	*Idem.*	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	61. 26. 51,0	2. 6. 25	4. 4	0. 48
11	10. 35. 59,0	*ζ* Taureau.	81. 13. 27,3	20. 59. 48,0	61. 9. 47,0	2. 7. 49	4. 15	0. 35
12	10. 30. 29,4	*α* Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	60. 53. 48,0	2. 9. 34	3. 58	0. 49
13	10. 23. 58,5	*Idem.*	28. 47. 29	22. 29. 54,7	60. 38. 23,0	2. 10. 56	3. 53	0. 43

Les circonſtances favorables dans leſquelles les obſervations précédentes ont été faites, procurent les réſultats ſuivans :

Quadrature de Mars, le 14 Août, à....		0^h 14′ 6″,0 *t. vr.*
Longitude géoc. de Mars en quadrature..	1^f	21^d 58. 55,0.
Paſſage de Mars par ſon nœud aſcendant, le 24 Octobre, à.............		14^h 54. 31,0 *t. vr.*
Lieu du nœud aſcendant de Mars.......	1.	17^d 48. 0,0.
Oppoſition de Mars, le 27 Novembre, à..		6^h 24. 28,7 *t. vr.*
Longitude en oppoſition.............	2.	5^d 59. 22,0.
Latitude en oppoſition..............		1. 38. 5,0. *bor.*

JUPITER.

Cette Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de $33^d\ 3'\frac{1}{3}$ autour du Soleil, & s'eſt trouvée

EN conjonction.	EN QUADRATURE.		EN oppoſition.	STATIONNAIRE.	
10 Mars.	4 Juillet.	26 Déc.	1 Octobre.	3 Août.	29 Nov.

On a déterminé, par obſervation, quarante-huit lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les réſultats ſuivans:

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE.		Lieu obſervé de JUPITER.		Erreur des Tables.	
			Aſcenſ. droite.	Déclinaiſon.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Avril 28	21. 42. 19,2	γ Vierge.	187. 42. 45,0	0. 16. 13,0 A.	2. 19. 3,1	1. 6. 52 A.	—4. 34	+0. 12
Mai 1	21. 33. 15,2	η Vierge.	182. 14. 24,0	0. 31. 30,0 B.	2. 58. 9,0	1. 6. 59	4. 43	—0. 5
3	21. 27. 7,8	*Idem.*	182. 14. 24,0	0. 31. 30,0	3. 23. 6,0	1. 7. 11	5. 12	—0. 9
7	21. 14. 45,6	ζ Vierge.	200. 57. 9,9	0. 30. 19,0	4. 13. 6,0	1. 7. 46	5. 13	—0. 9
9	21. 8. 2,2	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 19,0	4. 38. 3,0	1. 8. 15	4. 49	+0. 2
10	21. 5. 23,2	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 19,0	4. 50. 4,0	1. 8. 22	4. 58	—0. 1

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de JUPITER.		Erreur des Tables.	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Mai 11	21. 2. 12,5	ζ Vierge.	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0 B.	5. 2. 0,0	1. 8. 23 A.	−5. 7	−0. 10
12	20. 59. 3,6	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	5. 14. 16,0	1. 8. 34	4. 51	−0. 8
13	20. 54. 52,5	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	5. 26. 25,0	1. 9. 3	4. 38	+0. 11
14	20. 52. 37,0	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	5. 37. 33,0	1. 8. 51	5. 21	−0. 10
20	20. 33. 3,6	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	6. 46. 40,0	1. 9. 48	5. 24	−0. 15
21	20. 29. 47,5	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	6. 58. 0,0	1. 10. 13	5. 18	−0. 1
22	20. 26. 27,2	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	7. 9. 15,0	1. 10. 32	5. 10	+0. 10
23	20. 23. 6,7	*Idem.*	200. 57. 9,0	0. 30. 17,0	7. 20. 21,0	1. 10. 34	5. 5	+0. 11
Juin 12	19. 13. 31,2	γ Ophiucus.	264. 17. 48,4	2. 48. 10,0	10. 38. 9,0	1. 14. 43	5. 24	−0. 2
13	19. 9. 54,7	*Idem.*	264. 17. 48,4	2. 41. 10,0	10. 46. 40,0	1. 14. 59	5. 53	0. 0
25	18. 25. 54,8	*Idem.*	264. 17. 48,4	2. 41. 10,0	12. 19. 23,5	1. 17. 42	6. 43	0. 13
Août 3	15. 58. 2,8	β Ophiucus	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 53,0	1. 28. 42	6. 29	0. 1
4	15. 54. 10,9	*Idem.*	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 37,0	1. 28. 54	6. 37	0. 7
5	15. 50. 19,5	*Idem.*	263. 13. 45,7	4. 40. 15,5	14. 36. 24,0	1. 29. 16	6. 35	0. 1
19	14. 56. 10,9	θ Serpent.	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	14. 9. 49,0	1. 32. 48	6. 38	+0. 15
20	14. 52. 23,0	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	14. 6. 38,0	1. 32. 57	5. 45	+0. 23
23	14. 40. 35,2	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 55. 33,0	1. 33. 40	6. 33	+0. 24
28	14. 21. 3,4	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 34. 0,0	1. 34. 59	6. 13	−0. 14
Sept. 1	14. 5. 15,4	*Idem.*	281. 23. 55,1	3. 56. 28,0	13. 12. 56,0	1. 35. 44	6. 38	0. 21
13	13. 17. 28,4	δ l'Aigle.	288. 40. 40	2. 42. 13,3	11. 56. 39,0	1. 37. 42	6. 41	0. 22
Oct. 1	12. 4. 48,2	γ Baleine.	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	9. 38. 5,0	1. 38. 46	6. 37	0. 30
11	11. 22. 52,8	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 18. 8,0	1. 38. 15	6. 45	0. 30
12	11. 18. 43,4	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 10. 32,0	1. 38. 12	6. 42	0. 27
13	11. 14. 33,8	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	8. 2. 42,0	1. 38. 0	6. 42	0. 34
16	11. 1. 59,2	*Idem.*	38. 3. 51,0	2. 19. 53,0	7. 40. 29,0	1. 37. 39	6. 29	0. 35
25	10. 24. 5,1	α Lien ♓.	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 37. 34,0	1. 36. 6	6. 51	0. 46
26	10. 19. 51,5	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 31. 26,0	1. 36. 0	6. 42	0. 42
27	10. 15. 35,2	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 24. 58,0	1. 35. 43	6. 52	0. 48
28	10. 11. 22,8	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 18. 57,0	1. 35. 39	6. 48	0. 40
29	10. 7. 19,7	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 13. 22,0	1. 35. 30	6. 33	0. 37
30	10. 2. 53,5	*Idem.*	27. 44. 54,0	1. 43. 41,5	6. 7. 49,0	1. 35. 21	6. 17	0. 34
Nov. 15	8. 54. 30,6	δ d'Orion.	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 59. 30,0	1. 31. 44	5. 46	0. 17
16	8. 50. 15,2	*Idem.*	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 56. 54,0	1. 31. 15	5. 42	0. 29
17	8. 45. 55,0	*Idem.*	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 54. 47,0	1. 31. 12	5. 23	0. 16
28	7. 58. 32,3	*Idem.*	80. 16. 49,6	0. 28. 5,5	4. 40. 44,0	1. 28. 13	5. 10	0. 5

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de JUPITER.		Erreur des Tables.	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*M. S.*
Déc. 1	7. 45. 37,1	δ d'Orion.	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4A.	4. 41. 32,0	1. 27. 4A.	—4. 47	—0. 20
5	7. 38. 26,5	*Idem.*	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 44. 38,0	1. 25. 42	5. 14	0. 32
7	7. 19. 52,6	*Idem.*	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 47. 55,0	1. 25. 7	5. 4	0. 31
9	7. 11. 20,6	α Nœud ♓.	27. 45. 18,4	1. 43. 37,4B.	4. 51. 53,0	1. 24. 28	4. 59	0. 30
10	7. 7. 4,0	*Idem.*	27. 45. 18,4	1. 43. 37,4	4. 53. 56,0	1. 24. 15	5. 8	0. 28
12	6. 58. 33,7	δ d'Orion.	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	4. 58. 58,0	1. 23. 43	5. 14	0. 23
13	6. 54. 20,2	*Idem.*	80. 16. 56,7	0. 28. 8,4	5. 2. 9,0	1. 23. 26	4. 52	0. 23

Les observations du mois d'Octobre, donnent encore le résultat suivant:

Opposition de Jupiter, 1.er Octobre, à . . . 22h 9′ 44″ *temps vrai.*

Longitude en opposition . . . . 0s 9d. 34. 35.

Latitude en opposition . . . . 1. 38. 39.

SATURNE.

Cette Planète a parcouru, dans le courant de cette année, un arc de 12 degrés autour du Soleil, & s'est trouvée

EN conjonction.	EN QUADRATURE.		EN opposition.	STATIONNAIRE.	
15 Janv.	24 Avril.	21 Octobre.	24 Juillet.	13 Mai.	3 Oct.

On a déterminé, par observation, trente-trois lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables, ont donné les résultats suivans:

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILES comparées.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de SATURNE.		Erreur des Tables.	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Juin 11	15. 6. 14,7	β Scorpion.	208. 15. 27,5	19. 12. 21,0 A.	304. 45. 6,0	0. 25. 0 A.	—10. 4	—0. 44
12	15. 1. 56,2	*Idem.*	238. 15. 27,5	19. 12. 21,0	304. 42. 36,0	0. 25. 13	10. 2	0. 37
13	14. 57. 37,2	*Idem.*	238. 15. 27,5	19. 12. 21,0	304. 39. 52,0	0. 25. 10	10. 5	0. 47
Juill. 18	12. 24. 58,3	μ Sagittaire.	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	302. 29. 46,0	0. 29. 18	9. 2	0. 22
22	12. 7. 51,9	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	302. 12. 13,0	0. 29. 41	8. 55	0. 21
23	12. 3. 35,8	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	302. 7. 38,0	0. 29. 43	9. 1	0. 25
25	11. 55. 6,4	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 58. 46,0	0. 29. 57	9. 2	0. 21
26	11. 50. 53,0	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 54. 22,0	0. 30. 1	9. 0	0. 21
28	11. 42. 26,7	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 45. 35,0	0. 30. 8	8. 54	0. 25
31	11. 29. 54,8	*Idem.*	270. 14. 47,0	21. 5. 58,0	301. 32. 21,0	0. 30. 29	8. 54	0. 18
Août 1	11. 25. 57,8	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9 B.	301. 27. 45,0	0. 30. 24	9. 9	0. 29
3	11. 17. 23,6	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 19. 12,0	0. 30. 35	9. 2	0. 26
4	11. 13. 15,0	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 15. 3,0	0. 30. 45	8. 52	0. 21
5	11. 9. 6,4	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 10. 41,0	0. 30. 54	8. 55	0. 17
7	11. 0. 54,7	*Idem.*	270. 14. 46,7	21. 5. 57,9	301. 2. 22,0	0. 31. 0	8. 46	0. 19
9	10. 52. 41,5	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 5,79	300. 53. 27,0	0. 30. 53	9. 19	0. 14
10	10. 48. 39,7	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 49. 48,0	0. 31. 14	8. 49	0. 19
11	10. 44. 36,2	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 45. 40,0	0. 31. 19	8. 50	0. 17
12	10. 40. 35,1	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 41. 56,0	0. 31. 35	8. 31	0. 4
17	10. 20. 31,5	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 22. 23,0	0. 31. 36	8. 28	0. 18
19	10. 12. 35,2	*Idem.*	270. 14. 45,7	21. 5. 57,9	300. 15. 16,0	0. 31. 49	8. 5	0. 18
20	10. 8. 40,1	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	300. 10. 58,0	0. 31. 45	8. 40	0. 19
23	9. 56. 52,3	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	300. 0. 6,0	0. 31. 51	8. 51	0. 17
26	9. 45. 12,3	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 50. 8,0	0. 31. 55	8. 44	0. 16
27	9. 41. 20,5	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 46. 57,0	0. 32. 7	8. 41	0. 8
28	9. 37. 29,2	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 44. 4,0	0. 32. 11	8. 31	0. 7
30	9. 25. 57,5	*Idem.*	270. 14. 44,7	21. 5. 57,9	299. 37. 56,0	0. 32. 25	8. 23	+0. 1
31	9. 25. 57,5	*Idem.*	270. 14. 44,2	21. 5. 57,9	299. 35. 18,0	0. 32. 34	8. 3	+0. 6
Oct. 26	6. 0. 7,9	β Lièvre.	79. 46. 36,7	20. 56. 46,1 A.	299. 14. 34,0	0. 33. 31	7. 54	—0. 54
27	5. 56. 27,7	*Idem.*	79. 46. 36,7	20. 56. 46,1	299. 16. 57,0	0. 33. 37	7. 55	0. 49
30	5. 45. 22,8	*Idem.*	79. 46. 36,7	20. 56. 46,1	299. 24. 55,0	0. 33. 39	7. 40	0. 51
Nov. 15	4. 45. 9,8	δ Lièvre.	85. 31. 49,7	20. 54. 15,6	300. 19. 40,0	0. 34. 24	7. 52	0. 25
16	4. 41. 18,0	*Idem.*	85. 31. 49,7	20. 54. 15,6	300. 23. 35,0	0. 34. 7	8. 7	0. 41

Les observations du mois de Juillet, donnent encore le résultat suivant :

Opposition de *Saturne*, le 24 Juillet à . . $5^h\ 53'\ 32''$ *temps vrai.*
Longitude en opposition . . . . $10^s\ 2^d$ 4. 23.
Latitude en opposition . . . . 0. 29. 50 *australe.*

HERSCHEL.

Cette Planète, connue depuis peu, dont la révolution d'environ quatre-vingt-trois ans, n'a parcouru dans le courant de cette année, qu'un arc de $4^d\ 30'\frac{1}{2}$ autour du Soleil : elle s'est trouvée en opposition le 3 Janvier.

On a déterminé, par observation, onze lieux de cette Planète, qui, comparés aux Tables construites sur les élémens déterminés par M. de la Place, ont donné les résultats suivans:

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Position supposée de l'ÉTOILE.		Lieu observé de HERSCHEL.		Erreur des Tables.	
			Ascens. droite.	Déclinaison.	Longitude.	Latitude.	En long.	En lat.
	H. M. S.		D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	M. S.	M. S.
Janv. 11	11. 25. 1,0	δ Gémeaux	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0 B.	104. 2. 48,0	0. 25. 38 B.	—0. 44	+0. 4
12	11. 20. 31,2	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	104. 0. 10,0	0. 25. 36	0. 47	0. 1
16	11. 2. 41,5	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 50. 18,0	0. 25. 39	0. 31	0. 4
17	10. 58. 16,7	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 47. 55,0	0. 25. 40	0. 24	0. 5
21	10. 40. 43,6	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 38. 4,0	0. 25. 45	0. 23	0. 10
22	10. 36. 19,3	*Idem.*	106. 49. 31,0	22. 21. 39,0	103. 35. 24,0	0. 25. 36	0. 37	0. 1
Déc. 5	14. 35. 37,0	*Idem.*	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 18. 1,0	0. 28. 18	0. 26	0. 7
7	14. 26. 35,6	*Idem.*	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 14. 5,0	0. 28. 18	0. 12	0. 3
9	14. 17. 36,6	α du Belier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	110. 9. 39,0	0. 28. 38	0. 32	0. 21
11	14. 8. 25,9	δ Gémeaux	106. 50. 21,1	22. 21. 31,0	110. 5. 22,0	0. 28. 12	0. 44	0. 7
13	13. 59. 18,6	α du Bélier.	28. 47. 29,6	22. 26. 54,7	110. 1. 9,0	0. 28. 34	0. 28	0. 12

Les observations du mois de Janvier, donnent encore le résultat suivant :

Opposition d'Herschel, le 3 Janvier, à $17^h\ 39'\ 47'',3$ *temps vrai.*

Longitude en opposition........... $3^f\ 14^d$ 22. 39,0.

Latitude en opposition............. 0. 25. 34,0 *boréale.*

On a supposé l'erreur moyenne des Tables, de 34 secondes soustractives en longitude, & de 4 secondes additives en latitude.

LA LUNE.

On a déterminé, par obſervation, dix-huit lieux de la Lune : on en eût ſans doute obtenu un plus grand nombre, ſi les erreurs, dans les déclinaiſons calculées, n'avoient ſouvent fait manquer les hauteurs méridiennes, & rendu par-là les obſervations incomplètes.

1785.	TEMPS VRAI.	ÉTOILE comparée.	Poſition ſuppoſée de l'ÉTOILE.		Lieu obſervé de la LUNE.		Erreur des Tables.	
			Aſcenſ. droite.	Déclinaiſon.	Longitude.	Latitude.	En long.	En latit.
	H. M. S.		*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*D. M. S.*	*M. S.*	*M. S.*
Janv. 22	10. 2. 48,4	β Taureau.	78. 11. 4,5	28. 24. 43,0B.	95. 55. 52,0	3. 44. 55A.	−1. 3	+0. 30
Févr. 23	11. 51. 23,0	β pet. Chien	108. 52. 53,0	8. 42. 36,0B.	154. 0. 56,0	1. 10. 17B.	−0. 49	−0. 5
27	14. 32. 23,0	λ Vierge.	211. 53. 5,0	12. 22. 34,0A.	202. 49. 44,0	4. 38. 19A.	−0. 30	+0. 1
Mai 23	11. 46. 20,5	*Antarès.*	244. 4. 29,6	25. 56. 23,0A.	241. 9. 16,0	4. 49. 20A.	−1. 5	−0. 13
26	14. 40. 7,2	π Scorpion.	236. 29. 14,2	25. 28. 59,7A.	282. 34. 20,0	2. 40. 1,5A.	+0. 5	−0. 5
27	15. 36. 29,6	ν Scorpion.	222. 53. 52,8	24. 25. 44 8A.	296. 45. 40,0	1. 31. 48A.	+0. 29	+0. 3
Juin 13	5. 14. 1,8	ε Serpent.	235. 2, 23,0	5. 7. 57,0B.	160. 27. 17,0	2. 21. 15A.	−0. 53	−0. 1
18	8. 51. 20,6	μ Sagittaire.	270. 14. 43,1	21. 5. 59,0A.	222. 23. 14,0	5. 8. 10,5A	−0. 40	−0. 24
Juill. 18	9. 3. 49,7	τ Sagittaire.	283. 23. 44,6	27. 57. 52,0A.	256. 25. 32,0	4. 21. 21A.	−0. 49	−0. 24
Août 20	17. 34. 28,0	β Verſeau.	320. 4. 39,1	6. 30. 7,4A.	337. 57. 16,0	2. 18. 0B.	−0. 13	−0. 14
23	15. 10. 46,1	ζ de l'Aigle.	283. 53. 52,0	13. 33. 41,9B.	24. 24. 24,0	5. 0. 46B.	−0. 25	+0. 0
26	17. 59. 25,0	β Cygne.	290. 31. 34,7	27. 31. 24,0B.	88. 17. 14,0	4. 43. 0B.	−0. 37	−0. 16
Sept. 19	13. 5. 58,0	ε Dauphin.	305. 44. 56,2	10. 35. 26,2B.	16. 59. 53,0	4. 41. 4B.	−1. 0	−0. 13
Nov. 15	11. 25. 46,7	α du Bélier.	28. 47. 40,6	22. 26. 53,2B.	47. 22. 19,0	4. 55. 54B.	+0. 20	+0. 33
17	13. 32. 3,5	β Pégaſe.	343. 21. 17,8	26. 55. 40,3B.	77. 57. 55,0	3. 42. 44B.	−0. 31	+0. 0
Déc. 9	6. 27. 23,5	α lien X.	27. 45. 18,0	1. 43. 37,0B.	355. 29. 0,0	4. 2. 35B.	−0. 23	−0. 14
12	9. 0. 56,7	ν du Bélier.	25. 27. 28,3	18. 14. 42,4B.	40. 13. 33,0	5. 6. 52B.	−0. 19	+0. 5
13	9. 58. 57,7	Alcyone.	53. 42. 26,0	23. 26. 0,0B.	55. 21. 10,0	4. 46. 56B.	−0. 10	−0. 9

On a calculé les mêmes lieux de la Lune avec les nouvelles Tables d'Euler, publiées par M. Jeaurat, & on l'a trouvé

MOIS & JOURS.		TABLES D'EULER. Erreur. En longit.	En latitude.
		M. S.	M. S.
Janvier	22	+ 0. 52	— 0. 10.
Février	23	+ 0. 27	+ 0. 22.
	27	— 0. 40	+ 0. 13.
Mai	23	— 1. 4	— 0. 17.
	26	+ 0. 9	— 0. 6.
	27	— 0. 35	— 0. 14.
Juin	13	— 1. 19	+ 0. 7.
	18	— 0. 41	— 0. 22.
Juillet	18	— 0. 40	— 0. 8.
Août	20	— 0. 9	+ 0. 18.
	23	+ 0. 20	+ 0. 5.
	26	— 0. 16	— 0. 14.
Sept.	19	+ 0. 20	+ 0. 15.
Nov.	15	+ 1. 17	+ 0. 28.
	17	+ 0. 55	— 0. 19.
Déc.	9	+ 0. 37	— 0. 30.
	12	+ 0. 2	+ 0. 18.
	13	+ 0. 11	— 0. 9.

Occultations d'Étoiles par la Lune.

ÉTOILES éclipſées.		JOURS.	TEMPS VRAI. H. M. S.	
Pléïades	Tayeta	11 Avril	8. 55. 10,5	Immerſion.
	Dix-huit.[e]	11 Avril	9. 3. 28,0	Immerſion.
	Maïa	11 Avril	9. 7. 27,0	Immerſion.
	Aſtcrope	11 Avril	9. 14. 16,7	Immerſion.
θ d'Ophiucus		27 Avril	13. 2. 21,9	Immerſion.
Idem.		27 Avril	13. 37. 19,2	Émerſion.
φ du Sagittaire.		22 Juin	12. 7. 29,6	Immerſion.
Idem.		22 Juin	13. 25. 27,2	Émerſion.
* du Taureau.		26 Août	11. 54. 31,6	Émerſion.
* du Sagittaire.		10 Oct.	7. 21. 21,6	Immerſion.
* du Capricorne.		11 Oct.	9. 7. 50,7	Immerſion.
ι des Gémeaux.		22 Oct.	11. 44. 53,8	Émerſion.
* du Sagittaire.		5 Nov.	6. 10. 54,0	Immerſion.
19[e] des Poiſſons.		9 Déc.	8. 27. 20,2	Immerſion.
Pléïades	Celeno	13 Déc.	12. 12. 1,7	Immerſion.
	Maïa	13 Déc.	12. 35. 13,5	Immerſion.
	Idem.	13 Déc.	13. 43. 22,1	Émerſion.
	Seizième	13 Déc.	12. 52. 43,1	Immerſion.
	Dix-ſept[e]	13 Déc.	12. 53. 6,6	Immerſion.
	Taïeta	13 Déc.	13. 23. 51,5	Émerſion.
	Electra	13 Déc.	13. 3. 6,8	Émerſion.

Éclipses des Satellites de Jupiter.

PREMIER SATELLITE.

MOIS & JOURS.		TEMPS VRAI. H. M. S.		CIRCONSTANCES.
Janv.	7	6. 58. 20,0	Émersion	près de l'horizon.
	23	5. 13. 18,5	Émersion	bandes assez term. un peu jour.
Août	7	14. 1. 34,9	Émersion	temps très-favorable.
	23	12. 20. 31,8	Immersion	à travers un nuage léger.
Sept.	1	8. 45. 18,6	Immersion	assez beau temps.
Oct.	1	11. 0. 53,7	Immersion	un peu de vapeurs.
	10	9. 37. 26,8	Émersion	temps superbe.
	26	7. 58. 44,6	Émersion	légères vapeurs.
Nov.	2	9. 53. 54,4	Émersion	assez beau temps.
	9	11. 49. 8,0	Émersion	beau ciel.
	11	6. 17. 48,7	Émersion	quelques vapeurs.
	16	13. 43. 44,0	Émersion	beaucoup de vapeurs.
Déc.	4	6. 27. 31,0	Émersion	un peu tard à cause des nuages

DEUXIÈME SATELLITE.

Août	23	15. 10. 38,5	Immersion	assez beau temps.
Oct.	12	12. 19. 5,9	Émersion	beau temps, mais grand vent.
Nov.	6	9. 32. 17,7	Émersion	temps favorable.
	13	12. 8. 57,0	Émersion	brouillard épais.
Déc.	1	6. 36. 3,0	Émersion	beaucoup de vapeurs.

TROISIÉME SATELLITE.

Août	11	10. 24. 33,0	Émersion	vapeurs de temps en temps.
Oct.	29	6. 47. 47,9	Émersion	légères vapeurs.
Nov.	5	8. 35. 24,8	Immersion	assez beau temps.
	5	10. 48. 18,4	Émersion	*idem.*

QUATRIÉME SATELLITE.

Août	23	13. 1. 18,0	Immersion	nuages légers.

Occultation de Vénus par la Lune.

Cette obſervation a été ſecondée par le temps le plus favorable.

	Temps vrai.	
12 Avril 1785	0h 1′ 39″,9	le bord obſcur de la Lune, mord ſur le bord éclairé de Vénus.
	0. 1. 59,9	immerſion de la corne auſtrale de Vénus.
	0. 3. 10,9	immerſion de la corne boréale.
	0. 50. 26,9	émerſion du bord éclairé de Vénus, de deſſous le bord éclairé de la Lune.
	0. 50. 48,0	émerſion de la corne boréale de Vénus.
	0. 52. 6,9	la corne auſtrale de Vénus eſt détachée du bord éclairé de la Lune.

Comètes.

Il a paru cette année deux Comètes, qui ont été découvertes à l'Obſervatoire royal, par M. Méchain, Aſtronome de la Marine, & de l'Académie Royale des Sciences, l'une le 7 Janvier, l'autre le 11 Mars: nous ne les avons point obſervées, tant parce que nous avons préféré de ſuivre, ſans interruption, le cours des autres Planètes, que parce que la poſition défavorable de ces Comètes auroit néceſſité de tranſporter nos inſtrumens d'un bout à l'autre de l'Obſervatoire.

Voici les élémens de leurs orbites, tels que M. Méchain les a calculés.

	Première Comète.	*Seconde Comète.*
Lieu du nœud aſcendant.......	8ſ 24d 12′ 5″	2ſ 4d 44′ ⅔.
Inclinaiſon de l'orbite.........	70. 14. 12	87. 7.
Lieu du périhélie............	3. 19. 51. 56	9. 27. 34,5.
Paſſage au périhélie, temps moyen.	27 Janv. 7h 58 4	8 Avril 11h 29′
Logarithme de la diſtance périhélie.	0,0581975	9,631024.
Sens du mouvement.......	direct.	

La première de ces Comètes a été observée depuis le 7 Janvier jusqu'au 7 Février; elle n'a jamais été aperçue à la vue simple. La seconde n'étoit visible qu'avec le secours des lunettes, dans le commencement de son apparition, & n'avoit qu'une chevelure; mais le 31 Mars elle a paru avec une queue de 7 à 8 degrés, qui a augmenté jusqu'au 16 Avril, dernier jour où il fut possible de l'observer à Paris.

TABLE de la déclinaison de plusieurs Étoiles, déduite de leur hauteur méridienne, observée au quart-de-cercle mobile, en 1785.

MOIS & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE d'Observations.	HAUTEUR OBSERVÉE. D. M. S.	DÉCLINAISON MOYENNE le 1er Janvier 1786. D. M. S.
Mars 7	α d'Orion	2	48. 31. 43,2	7. 21. 4 B.
Déc. 10	*Idem.*	2	48. 31. 49,4	
Oct. 13	α Persée	2	90. 14. 54,5	49. 5. 0 B.
Nov. 17	*Idem.*	4	90. 14. 49,7	
Avril 23	α Vierge	4	31. 9. 13,8	10. 2. 11 A.
Août 20	α Flèche	4	58. 42. 21,9	17. 31. 58 B.
Sept. 14	*Idem.*	2	58. 42. 27,8	
Avril 28	α Couronne	3	68. 37. 1,5	27. 26. 43 B.
Mai 19	α Balance	3	26. 3. 15,5	15. 8. 23 A.
Oct. 25	α Baleine	4	44. 25. 22,8	3. 14. 24 B.
Oct. 27	α Lien	4	42. 54. 31,2	
Nov. 8	*Idem.*	2	42. 54. 30,0	1. 43. 30 B.
Déc. 10	*Idem.*	2	42. 54. 30,5	
Oct. 23	α Bélier	9	63. 36. 55,9	
Nov. 12	*Idem.*	7	63. 36. 59,5	22. 26. 32 B.
Déc. 11	*Idem.*	4	63. 36. 62,1	

Suite de la Table de déclinaison, &c.

MOIS & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE d'Observations.	HAUTEUR OBSERVÉE. D. M. S.	DÉCLINAISON MOYENNE le 1.er Janvier 1786. D. M. S.
Avril 25	Arcturus	5	61. 28. 35,4	
Mai 20	*Idem.*	2	61. 28. 33,1	20. 18. 13 B.
Juin 23	*Idem.*	3	61. 28. 35,0	
Juin 3	Antarès	2	15. 16. 40,8	25. 56. 33 A.
Mars 11	Regulus	4	54. 11. 3,5	13. 0. 26,8 B.
Mars 5	Syrius	3	24. 45. 43,8	
Nov. 6	*Idem.*	2	24. 46. 11,3	16. 26. 4 A.
Déc. 9	*Idem.*	3	24. 46. 6,4	
Avril 27	β Cygne	3	68. 41. 28,3	27. 31. 15 B.
Juin 22	β Ophiucus	1	45. 50. 48,0	4. 40. 12 B.
Août 5	*Idem.*	3	45. 50. 58,5	
Mai 5	β Lion	4	56. 56. 45,2	15. 46. 14 B.
Mai 20	β d'Hercule	2	63. 8. 14,0	21. 58. 3 B.
Juin 25	*Idem.*	2	63. 8. 17,3	
Juin 17	β Scorpion	4	21. 59. 49,0	19. 12. 16 A.
Juin 22	β Serpent	4	57. 16. 33,8	16. 6. 8 B.
Nov. 22	β Pégase	3	68. 5. 56,7	26. 55. 32 B.
Déc. 12	*Idem.*	4	68. 5. 59,0	
Avril 13	γ Corbeau	3	24. 50. 51,0	16. 21. 3 A.
Août 27	γ Aigle	6	51. 16. 48,4	10. 6. 12 B.
Juin 15	γ Ophiucus	4	43. 58. 49,2	2. 48. 10 B.
Juin 15	γ d'Hercule	4	60. 50. 15,4	19. 39. 59 B.
Juillet 24	*Idem.*	2	60. 50. 23,9	
Oct. 14	γ Baleine	4	43. 30. 34,9	2. 19. 37 B.
Nov. 25	γ Pégase	4	55. 10. 17,6	13. 59. 39 B.
Déc. 12	*Idem.*	2	55. 10. 15,0	
Déc. 5	γ Lièvre	4	18. 41. 9,8	22. 31. 42 A.

Suite

Suite de la Table de déclinaison, &c.

MOIS & JOURS.	ÉTOILES.	NOMBRE d'Observations.	HAUTEUR OBSERVÉE. D. M. S.	DÉCLINAISON MOYENNE le 1.er Janvier 1786. D. M. S.
Janv. 19	δ Gémeaux	4	63. 32. 5,4	
Mars 9	*Idem.*	7	63. 32. 4,4	22. 21. 49 B.
Déc. 7	*Idem.*	3	63. 31. 56,7	
Janv. 16	δ Baleine	4	40. 34. 28,2	0. 36. 2 A.
Avril 26	δ Lion	3	62. 52. 10,3	21. 41. 42 B.
Nov. 22	δ d'Orion	4	40. 42. 53,0	0. 28. 4 A.
Déc. 8	*Idem.*	5	40. 42. 48,5	
Avril 22	ε Vierge	3	53. 17. 15,1	12. 6. 42 B.
Oct. 27	ε d'Orion	3	39. 50. 4,4	1. 21. 6 A.
Déc. 8	μ Baleine	3	29. 52. 26,5	11. 19. 8 A.
Juillet 26	μ Sagittaire	6	20. 6. 25,0	21. 5. 50 A.
Oct. 29	ζ d'Orion	4	39. 7. 3,5	2. 4. 9 A.
Mai 12	ζ Vierge	5	41. 41. 8,8	0. 30. 6 B.
Nov. 21	ζ Taureau	3	62. 10. 18,1	20. 59. 53 B.
Déc. 6	*Idem.*	5	62. 10. 18,5	
Déc. 8	ζ Gémeaux	2	62. 2. 26,0	20. 52. 5 B.
Avril 5	ζ Lion	2	65. 39. 5,2	24. 28. 40 B.
Août 25	θ Serpent	5	45. 7. 4,0	3. 56. 18 B.
Mai 30	υ Scorpion	4	22. 18. 40,6	18. 53. 27 A.

Le quart-de-cercle mobile de 6 pieds, avec lequel nous avons obſervé toutes les hauteurs méridiennes des Étoiles & des Planètes, pendant le cours de l'année 1785, eſt le même inſtrument qui nous a ſervi à déterminer l'obliquité de l'Écliptique, par une ſuite non interrompue de quarante

années d'obſervations des hauteurs du Soleil dans le Solſtice. Le réſultat que nous avons trouvé, n'étant pas le même que celui qu'ont établi pluſieurs Aſtronomes, nous avons penſé qu'il ſeroit intéreſſant de rapporter ici les hauteurs méridiennes des principales Étoiles, telles que notre inſtrument nous les a données, ainſi que la déclinaiſon moyenne qui en réſulte, afin d'établir par-là une comparaiſon directe entre notre inſtrument & ceux des autres Obſervatoires.

Nota. La troiſième colonne renferme le nombre des obſervations entre leſquelles on a pris un milieu, pour réduire au jour moyen entre ceux où l'on a obſervé, la hauteur rapportée dans la quatrième colonne; cette hauteur n'eſt corrigée que de l'erreur de la diviſion & de la lunette de l'inſtrument: pour en déduire la déclinaiſon moyenne, compriſe dans la cinquième colonne, on a employé les Tables des réfractions rapportées dans l'Aſtronomie de M. de la Lande, les Tables d'aberration & de nutation de la Connoiſſance des Temps, *année 1781*, & l'on a ſuppoſé la hauteur de l'Équateur de $41^{d}\ 9'\ 46''$.

FIN.